

Определенный интеграл

1. Вычислить определённые интегралы

$$1) \int_0^1 \frac{2^{\arctg x}}{1+x^2} dx \quad 2) \int_{-1}^3 \ln(2x^2+3) dx \quad 3) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2+2}}$$

$$4) \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos^5 x}{\sin^4 x} dx \quad 5) \int_2^3 \frac{x+2}{x^2(x+1)} dx \quad 6) \int_1^3 \frac{dx}{x^2 \sqrt{9+x^2}}$$

2. Найти среднее значение функций в указанных интервалах

$$1) y = \cos^3 x, \quad [0; \pi/4], \quad 2) y = \frac{1}{\sqrt[5]{3-4x}}, \quad [-3/4; 0]$$

3. Оценить значения интегралов

$$1) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} \quad 2) \int_3^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}}$$

4. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1) \int_0^{\infty} x \sin x dx \quad 2) \int_0^{\pi/6} \frac{\cos 3x dx}{\sqrt{(1-\sin 3x)^5}}$$

$$3) \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2x^6+3x^2+5}} \quad 4) \int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1) \begin{cases} y = x^2, \\ y - x = 2. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \rho = \cos \varphi, \\ \rho = 2 \cos \varphi. \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x = 9(t - \sin t), \\ y = 9(1 - \cos t), \\ y = 0, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

6. Найти объёмы тел, образованных вращением фигур, ограниченных указанными линиями: 1) – вокруг оси OX, 2) – вокруг оси OY :

$$1) \begin{cases} x = \sqrt[3]{y-2}, \\ y = 1, \quad x = 1. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 3 \sin t. \end{cases}$$

7. Вычислить длины дуг линий

$$1) L : \begin{cases} y = 1 - \ln(\cos x), \\ 0 \leq x \leq \pi/6. \end{cases} \quad 2) L : \begin{cases} y = 2(\cos t + t \sin t), \\ x = 2(\sin t - t \cos t), \quad 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

8. Определить работу, затрачиваемую на перенос электрического заряда q из бесконечности в точку $A(0;1)$ электрического поля заряда Q , сосредоточенного в начале координат.

Определенный интеграл

1. Вычислить определённые интегралы

$$1) \int_0^{\sqrt{3}} x \sqrt[3]{1+x^2} dx \quad 2) \int_1^2 \frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{x}} dx \quad 3) \int_2^3 \frac{2x^4 - 5x^2 + 3}{x^2 - 1} dx$$

$$4) \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx \quad 5) \int_1^2 \sqrt{x} \ln x dx \quad 6) \int_{1/3}^{4/3} \frac{dx}{\sqrt{9+6x-9x^2}}$$

2. Найти среднее значение функций в указанных интервалах

$$1) y = \frac{x}{\sin^2 x}, \quad [\pi/4; \pi/2], \quad 2) y = \frac{x^2}{x^2 + 1}, \quad [0; \pi/4]$$

3. Оценить значения интегралов

$$1) \int_{-3}^7 \frac{(x+3)dx}{x^2+7} \quad 2) \int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} \arcsin(x^2) dx$$

4. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1) \int_1^{\infty} \frac{dx}{9x^2 - 9x + 2} \quad 2) \int_0^{1/4} \frac{dx}{\sqrt{1-4x}}$$

$$3) \int_1^{\infty} \left(1 - \cos \frac{2}{x}\right) dx \quad 4) \int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1) \begin{cases} y = x^2 - 2x, \\ y = 3x - 1. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \quad y = 0, \\ 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases} \quad 3) \begin{cases} \rho = \sin \varphi, \\ \rho = \cos \varphi. \end{cases}$$

6. Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной указанными линиями: 1) – вокруг оси OX, 2) – вокруг оси OY

$$1) \begin{cases} (y-1)^2 = x, \\ x = 0, \quad y = 2. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y = \sin x, \\ y = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

7. Вычислить длины дуг кривых

$$1) L : \begin{cases} y = \ln x, \\ \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15}. \end{cases} \quad 2) L : \begin{cases} \rho = \sin^3(\varphi/3), \\ 0 \leq \varphi \leq \pi/2. \end{cases}$$

8. Определить кинетическую энергию однородного диска массой M и радиусом R , вращающегося с угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через центр диска перпендикулярно его плоскости.

Определенный интеграл

1. Вычислить определённые интегралы

$$\begin{array}{lll}
 1) \int_9^{12\sqrt{3}} \frac{12x^5 dx}{\sqrt{1+x^6}} & 2) \int_{2\sqrt{3}}^6 \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}} & 3) \int_0^\pi (x+2) \cos(x/2) dx \\
 4) \int_3^4 \frac{dx}{x^2-6x+10} & 5) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^4+x^2} & 6) \int_0^{\pi/3} \cos^3 x \sin^2 x dx
 \end{array}$$

2. Найти среднее значение функций в указанных интервалах

$$1) y = (x-2) \cdot \sqrt{3x-1}, \quad [1/3; 5/3], \quad 2) y = \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}, \quad [0; \pi]$$

3. Оценить значения интегралов

$$1) \int_0^1 \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x} dx \quad 2) \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx$$

4. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$\begin{array}{ll}
 1) \int_{-\infty}^0 \left(\frac{x^2}{x^3-1} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx & 2) \int_0^{\pi/2} \frac{2 \sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx \\
 3) \int_3^\infty \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}} & 4) \int_0^1 \frac{\operatorname{tg} x dx}{\sqrt{1-x^2}}
 \end{array}$$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1) \begin{cases} y = x^2, \\ y = 1 + 3x^2/4. \end{cases} \quad 2) \quad | \quad \rho = 3 \cos 2\varphi. \quad 3) \quad \begin{cases} x = 3 \sin t, & y = 3/2, \\ y = 3 \cos t, & (y \geq 3/2) \end{cases}$$

6. Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной указанными линиями: 1) – вокруг оси OX, 2) – вокруг оси OY

$$1) \quad \begin{cases} y = x(4-x), \\ y = 0. \end{cases} \quad 2) \quad \begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \\ y = 0, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

7. Вычислить длины дуг кривых

$$1) L : \begin{cases} y = x^2/4 - (\ln x)/2, \\ 1 \leq x \leq 2. \end{cases} \quad 2) L : \begin{cases} x = 4 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t. \end{cases}$$

8. Определить количество тепла, выделяемого переменным током

$I = I_0 \sin \left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi \right)$ в течение периода T в проводнике с сопротивлением R .

Определенный интеграл

1. Вычислить определённые интегралы

$$1) \int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^6} dx \quad 2) \int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx \quad 3) \int_{3/2}^2 \operatorname{arctg}(2x-3) dx$$

$$4) \int_{\pi/4}^{\pi/3} \operatorname{tg}^4 x dx \quad 5) \int_2^3 \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)} \quad 6) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$$

2. Найти среднее значение функций в указанных интервалах

$$1) y = e^{\sqrt{1-x}}, \quad [-3; 0] \quad 2) y = \frac{1}{\sqrt{x^2+4x}}, \quad [1; 2]$$

3. Оценить значения интегралов

$$1) \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin x}{x} dx \quad 2) \int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} \sqrt[3]{(x^2-8)^2} dx$$

4. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1) \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2-4x} \quad 2) \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$$

$$3) \int_1^{\infty} \frac{\sin(1/\sqrt[4]{x^3})}{\sqrt{x}} dx \quad 4) \int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\sin 2x}$$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1) \left| \begin{array}{l} y = 2/x, \\ y = -x/2 - 5/2. \end{array} \right. \quad 2) \left| \begin{array}{l} x = 2 \cos t, \\ y = 2 \sin t + 1, \\ x = 0. \end{array} \right. \quad 3) \left| \rho = 2(1 - \cos \varphi) \right.$$

6. Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной указанными линиями: 1) – вокруг оси OX, 2) – вокруг оси OY:

$$1) \left| \begin{array}{l} y = 1 - x^2 \\ x = \sqrt{y-2}, \quad x = 0, \quad x = 1. \end{array} \right. \quad 2) \left| \begin{array}{l} y = \sin x, \\ y = 0, \quad x = \pi/2. \end{array} \right.$$

7. Вычислить длины дуг кривых

$$1) L : \left| \begin{array}{l} y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x, \\ 0 \leq x \leq 7/9. \end{array} \right. \quad 2) L : \left| \begin{array}{l} x = 5 \cos^2 t, \\ y = 5 \sin^2 t, \quad t \in [0; 5\pi/6] \end{array} \right.$$

8. Определить работу, которую нужно затратить, чтобы остановить однородный шар массой M и радиусом R , вращающийся вокруг диаметра с угловой скоростью ω .

Определенный интеграл

1. Вычислить определённые интегралы

$$1) \int_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{3x+25}} \quad 2) \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{(9+x^2)^3}} \quad 3) \int_{-2}^0 x^2 e^{-x/2} dx$$

$$4) \int_0^{\pi/4} \sin^3 2x dx \quad 5) \int_8^{10} \frac{(x^2+3) dx}{x^3-x^2-6x} \quad 6) \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1} dx$$

2. Найти среднее значение функций в указанных интервалах

$$1) y = \operatorname{arctg} x, \quad [0; \sqrt{3}] \quad 2) y = \frac{x}{x^2+3x-1}, \quad [1; 3]$$

3. Оценить значения интегралов

$$1) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{7-2\cos x} \quad 2) \int_1^2 \frac{x dx}{(x^2+1)^3}$$

4. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1) \int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x-1)^2} \quad 2) \int_1^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}$$

$$3) \int_2^{\infty} \frac{x^4 dx}{(3x^5+x^4+3)^8} \quad 4) \int_0^2 \frac{x^2 dx}{\operatorname{arctg}^3 x}$$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1) \left| \begin{array}{l} y = 6x^2 - x^4, \\ y = 1, \quad (x > 0). \end{array} \right. \quad 2) \rho = \sqrt{2 \sin 2\varphi}. \quad 3) \left| \begin{array}{l} x = 2 \sin 2t, \\ y = 2 \sin t, \\ t \in [0; \pi/2]. \end{array} \right.$$

6. Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной указанными линиями: 1) – вокруг оси OX, 2) – вокруг оси OY:

$$1) \left| \begin{array}{l} y = \sqrt{1-x^2}, \\ y = x, \\ y = 0, \quad (x > 0, y > 0). \end{array} \right. \quad 2) \left| \begin{array}{l} y^2 + x - 4 = 0, \\ y = x - 2. \end{array} \right.$$

7. Вычислить длины дуг кривых

$$1) L: \left| \begin{array}{l} y = -\ln \cos x, \\ 0 \leq x \leq \pi/6. \end{array} \right. \quad 2) L: \left| \begin{array}{l} x = 5 \cos^2 t, \\ y = 5 \sin^2 t, \quad 0 \leq t \leq \pi/2. \end{array} \right.$$

8. Найти силу давления воды на вертикальную заслонку в форме эллипса с полуосями a и b , центр которой погружен в воду на глубину $2b$.

Определенный интеграл

1. Вычислить определённые интегралы

$$\begin{array}{lll}
 1) \int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx & 2) \int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}} & 3) \int_0^{\pi/8} x^2 \sin 4x dx \\
 4) \int_3^4 \frac{dx}{(x+1)(x-2)} & 5) \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}+1} & 6) \int_0^{\pi/8} \sin x \sin 3x dx
 \end{array}$$

2. Найти среднее значение функций в указанных интервалах

$$1) y = \ln(x+1), \quad [0; 1] \quad 2) y = \cos^5 x \sin x, \quad [0; \pi/2]$$

3. Оценить значения интегралов

$$1) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos x} \quad 2) \int_0^1 \frac{x^6 dx}{\sqrt{x+1}}$$

4. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$\begin{array}{ll}
 1) \int_0^{\infty} \frac{dx}{2x^2-2x+1} & 2) \int_{1/2}^1 \frac{dx}{9\sqrt{1-2x}} \\
 3) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x+\sin^2 x} & 4) \int_0^{1/2} \frac{\ln(1+\sqrt[4]{x})}{e^{\operatorname{tg} x}-1} dx
 \end{array}$$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1) \left| \begin{array}{l} y = x^2, \\ y = \sqrt{x}. \end{array} \right. \quad 2) \rho = 2(1 + \cos \varphi). \quad 3) \left| \begin{array}{l} x = 2 \cos t, \\ y = 2 \sin t, \quad y = 1. \end{array} \right.$$

6. Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной указанными линиями: 1) – вокруг оси ОХ, 2) – вокруг оси ОУ:

$$1) \left| \begin{array}{l} y^2 = x - 2 \\ y = x^3, \quad 0 \leq y \leq 1. \end{array} \right. \quad 2) \left| \begin{array}{l} 2y = x^2, \\ 2x + 2y - 3 = 0. \end{array} \right.$$

7. Вычислить длины дуг кривых:

$$1) L: \left| \begin{array}{l} y = \ln(5/2x), \\ \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}. \end{array} \right. \quad 2) L: \left| \begin{array}{l} x = \sqrt{3} t^2, \\ y = t - t^3, \quad 0 \leq t \leq 1. \end{array} \right.$$

8. Капля с начальной массой M , падая под действием силы тяжести испаряется, теряя каждую секунду массу m . Найти работу силы тяжести за время от начала падения до полного испарения капли.

Определенный интеграл

1. Вычислить определённые интегралы

$$1) \int_0^1 \frac{x^3 dx}{x^8 + 1} \quad 2) \int_2^4 \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} dx \quad 3) \int_1^e x \ln^2 x dx$$

$$4) \int_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{ctg}^3 x dx \quad 5) \int_2^3 \frac{dx}{x^4 - 1} \quad 6) \int_0^4 \frac{x dx}{\sqrt{1 + x}}$$

2. Найти среднее значение функций в указанных интервалах

$$1) y = \frac{1}{3 \sin x + \cos x}, \quad [0; \pi/4] \quad 2) y = (e^x + e^{-x}), \quad [\ln 2; \ln 3]$$

3. Оценить значения интегралов

$$1) \int_0^1 \sqrt{1 + x^4} dx \quad 2) \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + 0,5 \sin^2 x} dx$$

4. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(1+x)} \quad 2) \int_1^5 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3 - 1}}$$

$$3) \int_1^{\infty} \frac{(1 - 4 \sin 2x) dx}{x^3 + \sqrt{x}} \quad 4) \int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x}$$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1) \begin{cases} y = \sin(\pi x/2), \\ y = x^2. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = 1 - \cos t, \\ y = t - \sin t, \\ y = (\pi x)/2. \end{cases} \quad 3) \rho = 2 \sin^2 \varphi$$

6. Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной указанными линиями: 1) – вокруг оси ОХ, 2) – вокруг оси ОУ:

$$1) \begin{cases} y = \sqrt{x - 1}, \\ y = 0, \quad y = 1, \quad x = 1/2. \end{cases} \quad 2) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. .$$

7. Вычислить длины дуг кривых

$$1) L : \begin{cases} y = \ln(x^2 - 1), \\ 2 \leq x \leq 3. \end{cases} \quad 2) L : \begin{cases} \rho = 3 e^{\varphi/3}, \\ -1/2 \leq \varphi \leq 1/2. \end{cases}$$

8. Горизонтальный цилиндрический бак длиной 2 м и радиусом основания 0,5 м

заполнен водой. Найти минимальную работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из бака.

Определенный интеграл

1. Вычислить определённые интегралы

$$\begin{array}{lll}
 1) \int_0^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4+4}} & 2) \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2} dx & 3) \int_2^3 x \ln(x-1) dx \\
 4) \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x} & 5) \int_2^3 \frac{3x^2+2x-3}{x^3-x} dx & 6) \int_0^{13} \frac{x+1}{\sqrt[3]{2x+1}} dx
 \end{array}$$

2. Найти среднее значение функций в указанных интервалах

$$1) y = x \cdot \sin 2x, \quad [0; \pi/4] \quad 2) y = \frac{e^x}{e^x+1}, \quad [0; 1]$$

3. Оценить значения интегралов

$$1) \int_0^1 \sqrt{1+x^4} dx \quad 2) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{5+2\sin x}}$$

4. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$\begin{array}{ll}
 1) \int_1^{\infty} \frac{dx}{\ln 3(x^2+2x)} & 2) \int_0^3 \frac{\sqrt[3]{9} dx}{\sqrt[3]{9-x^2}} \\
 3) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt{1+x^5+x^{10}}} & 4) \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-\cos(3x^3)}}
 \end{array}$$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1) \begin{cases} y = x^2 - x, \\ y = 3x. \end{cases} \quad 2) \rho = 2 + \cos \varphi \quad 3) \begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 3t - t^3, \end{cases} \quad t \in [0; \sqrt{3}].$$

6. Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной указанными линиями: 1) – вокруг оси ОХ, 2) – вокруг оси ОУ:

$$1) \begin{cases} x = y^3, \\ y = x^3, \end{cases} \quad (x \geq 0). \quad 2) (x-R)^2 + y^2 = R^2.$$

7. Вычислить длины дуг кривых

$$1) L: \begin{cases} y = e^x - e, \\ \ln \sqrt{3} \leq x \leq \ln \sqrt{15}. \end{cases} \quad 2) L: \begin{cases} x = 8 \sin t + 6 \cos t, \\ y = 6 \sin t - 8 \cos t, \\ 0 \leq t \leq \pi/2. \end{cases}$$

8. Растяжение пружины пропорционально приложенной силе. Найти работу, затрачиваемую на растяжение пружины на 0,1 м, если сила 10н растягивает ее на 0,02 м.

Определенный интеграл

1. Вычислить определённые интегралы

$$1) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-3x}} \quad 2) \int_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4} dx \quad 3) \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x} + \sqrt[3]{1+x}}$$

$$4) \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2} dx \quad 5) \int_3^5 \frac{x^2+2}{(x+1)^2(x-1)} dx \quad 6) \int_0^{\pi/2} \cos^5 x dx$$

2. Найти среднее значение функций в указанных интервалах

$$1) y = \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}, \quad [0; 9] \quad 2) y = x \cdot \cos x, \quad [0; \pi/2]$$

3. Оценить значения интегралов

$$1) \int_{-1}^1 \sqrt{8+x^3} dx \quad 2) \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{1+\cos^2 x} dx$$

4. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1) \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\arctg 5x}}{1+25x^2} dx \quad 2) \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{4x-x^2-4}}$$

$$3) \int_1^{\infty} \frac{\ln(x^2+4)}{x} dx \quad 4) \int_0^1 \frac{\cos x dx}{\sqrt[4]{x} - \sin x}$$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1) \begin{cases} y^2 + 8x = 16, \\ y^2 - 24x = 48. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = \ln(1+t), \\ y = 5t - t^2, \\ y = 0. \end{cases} \quad 3) \rho = 4 \sin^2 \varphi.$$

6. Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной указанными линиями: 1) – вокруг оси ОХ, 2) – вокруг оси ОУ:

$$1) \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y^2 = 3x/2. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y = x^2 + 1, \\ y = x, \quad x = 0, \quad x = 1. \end{cases}$$

7. Вычислить длины дуг кривых

$$1) L : \begin{cases} y = e^x + 6, \\ \ln \sqrt{8} \leq x \leq \ln \sqrt{15}. \end{cases} \quad 2) L : \begin{cases} \rho = 5\varphi, \\ 0 \leq \varphi \leq 12/5. \end{cases}$$

8. Найти кинетическую энергию однородного стержня массой M и длиной L , вращающегося с угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей перпендикулярно к стержню через один из его концов.

Определенный интеграл

1. Вычислить определённые интегралы

$$\begin{array}{lll}
 1) \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin x \cos^3 x \, dx & 2) \int_0^3 \frac{x^3 \, dx}{\sqrt{9+x^2}} & 3) \int_{-1}^0 (x+3)e^{-2x} \, dx \\
 4) \int_0^{\pi/32} (32 \cos^2 4x - 16) \, dx & 5) \int_{-1}^0 \frac{x \, dx}{x^3 - 1} & 6) \int_1^2 \frac{dx}{x^2 + 5x + 4}
 \end{array}$$

2. Найти среднее значение функций в указанных интервалах

$$1) y = \operatorname{ctg}^3 x, \quad [\pi/6; \pi/2] \quad 2) y = \frac{1}{3x^2 - x + 1}, \quad [1/6; 2].$$

3. Оценить значения интегралов

$$1) \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \frac{1}{2} \sin^2 x} \, dx \quad 2) \int_0^1 \frac{x^7}{\sqrt[3]{1+x^8}} \, dx$$

4. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$\begin{array}{ll}
 1) \int_1^{\infty} \frac{4 \, dx}{x(1+\ln^2 x)} & 2) \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x \, dx}{\sqrt[7]{\cos^2 x}} \\
 3) \int_1^{\infty} \frac{\operatorname{tg}(1/x) \, dx}{1+x\sqrt{x}} & 4) \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[4]{(1+x^3)^5}}.
 \end{array}$$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1) \begin{cases} y = x^2, \\ y = 2x - x^2. \end{cases} \quad 2) \rho = 3 \sin 4\varphi. \quad 3) \begin{cases} x = 4 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t. \end{cases}$$

6. Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной указанными линиями: 1) – вокруг оси OX, 2) – вокруг оси OY:

$$1) \begin{cases} y = \arcsin x, \\ 0 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad 2) x^2 + (y-2)^2 = 1.$$

7. Вычислить длины дуг кривых

$$1) L : \begin{cases} y = \sqrt{1-x^2} + \arccos x, \\ 0 \leq x \leq 8/9. \end{cases} \quad 2) L : \begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \\ -\pi/6 \leq t \leq \pi/6. \end{cases}$$

8. Вертикальная цилиндрическая цистерна с радиусом основания 0,5 м и высотой 2 м, заполнена водой. Найти силу давления воды на стенки цистерны.

Определенный интеграл

1. Вычислить определённые интегралы

$$\begin{array}{lll}
 1) \int_{\pi^2/9}^{\pi^2} \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx & 2) \int_{1/\sqrt{3}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x^4+x^6}} & 3) \int_1^2 \ln(3x+2) dx \\
 4) \int_0^{\pi/4} 2 \cos x \sin 3x dx & 5) \int_0^2 \frac{dx}{(x+1)(x^2+4)} & 6) \int_{2/3}^{7/3} \frac{x dx}{\sqrt{3x+2}}
 \end{array}$$

2. Найти среднее значение функций в указанных интервалах

$$1) y = x \cdot e^{-x}, \quad [0; \ln 5] \quad 2) y = \frac{x^{-1/2}}{1+x^{-1/3}}, \quad [1/2; 1]$$

3. Оценить значения интегралов

$$1) \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin x}{x} dx \quad 2) \int_0^2 \frac{x^2+5}{x^2+2} dx$$

4. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$\begin{array}{ll}
 1) \int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}} & 2) \int_{-3/4}^0 \frac{dx}{\sqrt{4x+3}} \\
 3) \int_1^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x} + \cos^2 x} & 4) \int_1^2 \frac{dx}{\ln x}
 \end{array}$$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$1) \begin{cases} y = 3/x, \\ y = 4 - x. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = t, \\ y = t(3-t), \quad y = 0. \end{cases} \quad 3) \begin{cases} \rho = 4 \cos^2 \varphi, \\ \rho = 2, \quad (\rho \geq 2) \end{cases}$$

6. Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной указанными линиями: 1) – вокруг оси OX, 2) – вокруг оси OY:

$$1) \begin{cases} y = \sin x, \\ 0 \leq x \leq \pi. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y = x^2 + 1, \\ x = -a, \quad x = a, \quad y = 1/2. \end{cases}$$

7. Вычислить длины дуг кривых

$$1) L : \begin{cases} y = 1 - \ln \sin x, \\ x \in [\pi/6; \pi/3]. \end{cases} \quad 2) L : \begin{cases} \rho = 3(1 - \cos \varphi), \\ \varphi \in [0; \pi/2]. \end{cases}$$

8. Металлическая цепь массой M и длиной L , намотанная на барабан, начинает свободно сматываться с него. Определить полезную работу, совершаемую силой тяжести за весь период полного сматывания цепи с барабана.

Определенный интеграл

1. Вычислить определённые интегралы

$$1) \int_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^x(3+e^{-x})} \quad 2) \int_0^{\sqrt{6}} \sqrt{6-x^2} dx \quad 3) \int_0^{\pi/2} x \cos x dx$$

$$4) \int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\cos x} \quad 5) \int_2^3 \frac{dx}{x^3-1} \quad 6) \int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5-4x}}$$

2. Найти среднее значение функций в указанных интервалах

$$1) y = \frac{1}{e^x - 2}, \quad [\ln 3; \ln 5] \quad 2) y = \sin^2 x \cdot \cos x, \quad [0; \pi/2]$$

3. Оценить значения интегралов

$$1) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + 0,5 \cos x} \quad 2) \int_1^3 \sqrt{3+x^3} dx$$

4. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1) \int_0^{\infty} \frac{(x+2) dx}{\sqrt[3]{(x^2+4x+1)^4}} \quad 2) \int_0^{\pi/6} \frac{\cos 3x dx}{\sqrt[6]{(1-\sin 3x)^5}}$$

$$3) \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}^5(1/x) dx}{(1+x^2)^{3/2}} \quad 4) \int_0^1 \frac{e^{1/x} dx}{x^3}$$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$1) \begin{cases} y = x^2, \\ y = 2\sqrt{2x}. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \rho = \sqrt{3} \cos \varphi, \\ \rho = \sin \varphi. \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x = t^2, \\ y = 2t - t^3, \\ y = 0. \end{cases}$$

6. Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной указанными линиями: 1) – вокруг оси OX, 2) – вокруг оси OY:

$$1) \begin{cases} x^2 + (y-b)^2 = a^2, \\ (a < b). \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y = 2 - x^2/2, \\ x + y = 2. \end{cases}$$

7. Вычислить длины дуг кривых:

$$1) L : \begin{cases} y = 2 + \operatorname{ch} x, \\ 0 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad 2) L : \begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t, \quad 0 \leq t \leq \ln \pi. \end{cases}$$

8. Ветер производит равномерное давление ($P = 100 \text{ н/м}^2$) на прямоугольную дверь шириной 1 м и высотой 2 м. Определить момент силы давления ветра относительно края двери, подвешенного на петлях. Какую силу нужно приложить к свободному краю двери, чтобы приоткрыть ее?

Определенный интеграл

1. Вычислить определённые интегралы

$$1) \int_1^{\sqrt{2}} \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}} \quad 2) \int_{1/\sqrt{3}}^1 \frac{dx}{x^5 \sqrt{x^2+1}} \quad 3) \int_{-3}^0 (x-2)e^{-x/3} dx$$

$$4) \int_0^{\pi} \sin 3x \cos 5x dx \quad 5) \int_{1/3}^{1/2} \frac{x dx}{(x-1)^3} \quad 6) \int_1^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} dx$$

2. Найти среднее значение функций в указанных интервалах

$$1) y = \sqrt{1-2x}, \quad [0; 1/2] \quad 2) y = \sin^3 x, \quad [0; 2\pi]$$

3. Оценить значения интегралов

$$1) \int_{-6}^8 \sqrt{100-x^2} dx \quad 2) \int_1^2 \frac{e^{-x}}{x+1} dx$$

4. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1) \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x dx}{\pi(1+4x^2)} \quad 2) \int_0^1 \frac{x dx}{1-x^4}$$

$$3) \int_1^{\infty} \frac{(x-1) dx}{x \sqrt{x^5+x^2+1}} \quad 4) \int_0^1 \frac{e^x dx}{\sqrt{1-\cos x}}$$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$1) \begin{cases} y = x^2, \\ y = \sqrt[3]{x}. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \rho = 6 \sin 3\varphi, \\ \rho = 3, \quad (\rho \geq 3). \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x = \ln(1+t), \\ y = t(2-t), \quad y = 0. \end{cases}$$

6. Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной указанными линиями: 1) – вокруг оси OX, 2) – вокруг оси OY:

$$1) \begin{cases} x^3 = (y-1)^2, \\ y = 0, \\ x = 0. \end{cases} \quad 2) \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

7. Вычислить длины дуг кривых

$$1) L: \begin{cases} y = \sqrt{x-x^2} - \arccos \sqrt{x}, \\ 1/9 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad 2) L: \begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3/3 - t, \\ 0 \leq t \leq \sqrt{3}. \end{cases}$$

8. Определить кинетическую энергию однородного диска массой M и радиусом R , вращающегося с угловой скоростью ω вокруг диаметра.

Определенный интеграл

1. Вычислить определённые интегралы

$$1) \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \frac{x dx}{\cos^2(x^2)} \quad 2) \int_0^{1/2} \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}} \quad 3) \int_0^1 \frac{\arcsin(x/2)}{\sqrt{2-x}} dx$$

$$4) \int_0^{\pi/3} \operatorname{tg}^2 x dx \quad 5) \int_2^3 \frac{x^3 + x^2 + 2}{x(x^2 - 1)} dx \quad 6) \int_{\ln 5}^{\ln 12} \frac{dx}{\sqrt{e^x + 4}}$$

2. Найти среднее значение функций в указанных интервалах

$$1) y = \frac{1}{1 + \sqrt{3x - 2}}, \quad [1; 6] \quad 2) y = x \cdot \cos x, \quad [0; \pi/2]$$

3. Оценить значения интегралов

$$1) \int_0^2 \sqrt{1 + x^3} dx \quad 2) \int_0^1 e^{-x^2} dx$$

4. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1) \int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{\pi(x^2 + 4x + 5)} \quad 2) \int_0^{2/3} \frac{\sqrt{\ln(2-3x)}}{2-3x} dx$$

$$3) \int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + 1}} \quad 4) \int_0^1 \frac{\sin x dx}{1 - x^2}$$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$1) \begin{cases} y = 2(1 - x), \\ y = 1 - x^2, \\ x = 0. \end{cases} \quad 2) \rho = \sqrt{2} \cos(\varphi - \pi/4). \quad 3) \begin{cases} x = t^2 - 4, \\ y = t^3 - 4t. \end{cases}$$

6. Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной указанными линиями: 1) – вокруг оси OX, 2) – вокруг оси OY:

$$1) \begin{cases} y = x - x^2, \\ y = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = \sqrt{3} \cos t, \\ y = 2 \sin t. \end{cases}$$

7. Вычислить длины дуг кривых

$$1) L : \begin{cases} y = \ln \sin x, \\ \pi/3 \leq x \leq \pi/2. \end{cases} \quad 2) L : \rho = 2a (\sin \varphi + \cos \varphi).$$

8. Скорость прямолинейного движения тела в зависимости от времени выражается формулой $v = \sqrt{1+t}$ м/с. Найти путь, пройденный телом за первые 10 с.

Определенный интеграл

1. Вычислить определённые интегралы

$$\begin{array}{lll}
 1) \int_0^{\pi/3} \operatorname{tg}^2 x \, dx & 2) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx & 3) \int_0^{\pi/4} x \sin 2x \, dx \\
 4) \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{2+\sin x} & 5) \int_{1/8}^{1/2} \frac{dx}{x-x^2} & 6) \int_1^3 \frac{x \, dx}{x^2+3x-1}
 \end{array}$$

2. Найти среднее значение функций в указанных интервалах

$$1) y = \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}, \quad [1; 4] \quad 2) y = \frac{\ln x}{x^5}, \quad [1; 2]$$

3. Оценить значения интегралов

$$1) \int_0^1 \sqrt{1+x^4} \, dx \quad 2) \int_{1/2}^2 \frac{4^x}{x} \, dx$$

4. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$\begin{array}{ll}
 1) \int_4^{\infty} \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2-4x+1}} & 2) \int_{1/2}^1 \frac{\ln 2 \, dx}{(1-x) \ln^2(1-x)} \\
 3) \int_1^{\infty} \frac{\sin^2(1/x) \, dx}{3+x} & 4) \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}}
 \end{array}$$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1) \begin{cases} y^2 = x+1, \\ y^2 = 9-x. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \rho = 2 \sin \varphi, \\ \rho = 4 \sin \varphi. \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x = t^2, & x = 0, \\ y = e^{t^2}, & y = e. \end{cases}$$

6. Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной указанными линиями: 1) – вокруг оси OX, 2) – вокруг оси OY:

$$1) \begin{cases} y = e^{-2x} - 1, \\ y = e^{-x} + 1, \\ x = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 3 \ln t, \\ x = 0, \quad y = 0. \end{cases}$$

7. Вычислить длины дуг кривых

$$1) L: \begin{cases} y = (e^{2x} + e^{-2x} + 3)/4, \\ 0 \leq x \leq 2. \end{cases} \quad 2) L: \begin{cases} x = t^3/3, \\ y = 4 - t^2/2, \quad t \in [0; \sqrt{8}]. \end{cases}$$

8. Скорость распада радия в каждый момент времени пропорциональна его наличному количеству. Найти относительной количество радия, которое распадется за 100 лет, если известно начальное количество Q_0 радия и период его полураспада $T = 600$ лет.

Определенный интеграл

1. Вычислить определённые интегралы

$$\begin{array}{lll}
 1) \int_0^2 x^2 \cdot \sqrt[3]{5x^3 - 1} dx & 2) \int_1^e \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx & 3) \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt{\sin x}} \\
 4) \int_{-1}^0 x \cdot (x+1)^{10} dx & 5) \int_1^2 \frac{dx}{x^2 - 3x} & 6) \int_0^{\ln 3} \frac{1 - e^x}{1 + e^x} dx
 \end{array}$$

2. Найти среднее значение функций в указанных интервалах

$$1) y = \frac{1}{2 \cos 2x + 3}, \quad [0; \pi/4] \quad 2) y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad [1; \sqrt{3}]$$

3. Оценить значения интегралов

$$1) \int_1^2 2^{x^2} dx \quad 2) \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{x+1}} dx$$

4. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$\begin{array}{ll}
 1) \int_e^{\infty} \frac{dx}{x(2 + \ln x)^2} & 2) \int_0^1 \frac{x^3 + \sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[5]{x^3}} dx \\
 3) \int_1^{\infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4\sqrt{x}}}{\sqrt{5x-1}} dx & 4) \int_0^1 \frac{2x \sin x dx}{\sqrt[4]{(1 - \cos x)^5}}
 \end{array}$$

5. Найти площади фигур, ограниченных линиями:

$$1) \begin{cases} y = 4(x-2), \\ y = (x-1)^2, \\ y = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = 2 \cos t (1 + \cos t), \\ y = 2 \sin t (1 + \cos t), \\ 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases} \quad 3) \rho = 1 + \sqrt{2} \cos \varphi.$$

6. Найти объёмы тел, образованных вращением фигур, ограниченных указанными линиями: 1) – вокруг оси OX, 2) – вокруг оси OY :

$$1) \begin{cases} y^2 = (x+4)^3, \\ x = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y = x^2, \\ 8x = y^2. \end{cases}$$

7. Вычислить длины дуг кривых

$$1) L : \begin{cases} y = (e^x + e^{-x})/2 + 3, \\ 0 \leq x \leq 2. \end{cases} \quad 2) L : \begin{cases} \rho = 2a \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi}, \\ \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2. \end{cases}$$

8. Определить массу стержня длиной 1 м, линейная плотность которого в зависимости от расстояния x от одного из его концов меняется по закону $\rho(x) = 6 + 0,3x^2$ (кг/м).

Определенный интеграл

1. Вычислить определённые интегралы

$$1) \int_0^1 \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}} \quad 2) \int_1^2 \frac{(x-2) dx}{x^2 - 2x + 2} \quad 3) \int_4^5 \frac{x dx}{x^4 - x^2 + 3}$$

$$4) \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^3 x} \quad 5) \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{x \cos x dx}{\sin^2 x} \quad 6) \int_0^{\sqrt{2,5}} \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}$$

2. Найти среднее значение функций в указанных интервалах

$$1) y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}, \quad [1/3; 1/8] \quad 2) y = \frac{1}{(11+5x)^3}, \quad [-2; -1]$$

3. Оценить значения интегралов

$$1) \int_1^e \frac{dx}{\ln x + 2} \quad 2) \int_1^3 \frac{dx}{(x^2 - 4x + 8)^2}$$

4. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1) \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(8+x^3)^4}} \quad 2) \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^5}}$$

$$3) \int_1^{\infty} \frac{2x\sqrt{x}}{\sin(1/x)} dx \quad 4) \int_0^2 \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} dx$$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$1) \begin{cases} y = x^2, \\ y = 2 - x, \\ y = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = t^2, \\ y = 2t - t^3. \end{cases} \quad 3) \rho = \cos \varphi + \sin \varphi.$$

6. Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной указанными линиями: 1) – вокруг оси ОХ, 2) – вокруг оси ОУ:

$$1) \begin{cases} y = 8 - x^2, \\ y = x^2. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y = 2 \cos t, \\ x = 5 \sin t. \end{cases}$$

7. Вычислить длины дуг кривых

$$1) L: \begin{cases} y = 1 - \arccos x + \sqrt{1-x^2}, \\ 0 \leq x \leq 9/16. \end{cases} \quad 2) L: \begin{cases} \rho = \varphi^2, \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

8. Сила тока в проводнике с сопротивлением 55,0 меняется по закону $I = 4 \cos \omega t$, А. Определить количество тепла, выделится в проводнике за время от $t = 0$ до $t = 3\pi/\omega$, с.

Определенный интеграл

1. Вычислить определённые интегралы

$$\begin{array}{lll}
 1) \int_2^3 \frac{dx}{x \sqrt{\ln^2 x}} & 2) \int_2^{e^2} \frac{\ln x \, dx}{x^2} & 3) \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \, dx \\
 4) \int_1^2 \frac{dx}{x^3 + 1} & 5) \int_0^{\pi/4} \sin 3x \cos 5x \, dx & 6) \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x+2}} \, dx
 \end{array}$$

2. Найти среднее значение функций в указанных интервалах

$$1) y = x \cdot \operatorname{tg}^2 x, \quad [0; \pi/4] \quad 2) y = \frac{1}{x^2 + 4x + 3}, \quad [0; 2]$$

3. Оценить значения интегралов

$$1) \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^{10} x \, dx \quad 2) \int_2^3 \frac{dx}{1 + x - 2x^2}$$

4. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$\begin{array}{ll}
 1) \int_2^{\infty} \frac{x \, dx}{\sqrt{(x^2 + 4)^3}} & 2) \int_0^{1/3} \frac{e^{3+1/x}}{x^2} \, dx \\
 3) \int_1^{\infty} \frac{dx}{5x^4 + 3x^2 + 2} & 4) \int_0^1 \frac{\ln(1 + \sqrt{x}) \, dx}{e^{-x^2} - 1}
 \end{array}$$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$1) \begin{cases} y = x^2 + 1, \\ y = 4 - 2x, \\ x = 0, \\ y = 0. \end{cases} \quad 2) \rho = 1 + \sqrt{2} \sin \varphi. \quad 3) \begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 2t^2 - t^3 \end{cases}$$

6. Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной указанными линиями: 1) – вокруг оси ОХ, 2) – вокруг оси ОУ:

$$1) \begin{cases} xy = 4, \\ 2x + y = 6. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = 3 \cos^2 t, \\ y = 4 \sin^2 t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi/2.$$

7. Вычислить длины дуг кривых

$$1) L : \begin{cases} y = (1 - e^x - e^{-x})/2, \\ 0 \leq x \leq 3. \end{cases} \quad 2) L : \begin{cases} x = t^6/6, & x = 0, \\ y = 2 - t^4/4, & y = 0. \end{cases}$$

8. Заряд Q равномерно распределен по дуге полуокружности радиуса R . Найти величину и направление силы, с которой полуокружность действует на одноименный заряд q , расположенный в центре окружности.

Определенный интеграл

1. Вычислить определённые интегралы

$$\begin{array}{lll}
 1) \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x \, dx}{\sqrt{1 + \cos x}} & 2) \int_{-1/2}^{1/2} \arccos 2x \, dx & 3) \int_0^1 \frac{(x^2 + 3x) \, dx}{(x+1)(x^2+1)} \\
 4) \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} & 5) \int_{2/\sqrt{3}}^2 \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}} & 6) \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x - 5}}
 \end{array}$$

2. Найти среднее значение функций в указанных интервалах

$$1) y = \frac{1}{x + x^2}, \quad [1; 1.5] \quad 2) y = \frac{e^x}{e^x - 1}, \quad [1; 2]$$

3. Оценить значения интегралов

$$1) \int_{-2}^1 \sqrt[3]{2x+1} \, dx \quad 2) \int_{1/4}^e x^2 e^{1/x} \, dx$$

4. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$\begin{array}{ll}
 1) \int_0^{\infty} \frac{x^3 \, dx}{\sqrt{x^4 + 7}} & 2) \int_{1/3}^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 9}} \\
 3) \int_3^{\infty} \frac{3 + \sin x}{\sqrt[5]{x}} \, dx & 4) \int_0^{0,3} \frac{dx}{\sqrt{x} (1 - \cos 5x)}
 \end{array}$$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$1) \begin{cases} y = 2 - x^2, \\ y = 1 - x, \\ x = 0, \quad y = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = 2 \cos t - \cos 2t, \\ y = 2 \sin t - \sin 2t, \\ 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases} \quad 3) \begin{cases} \rho = 3 \sin \varphi, \\ \rho = 5 \sin \varphi. \end{cases}$$

6. Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной указанными линиями: 1) – вокруг оси OX, 2) – вокруг оси OY:

$$1) \frac{x^2}{16} + y^2 = 1. \quad 2) \begin{cases} 2y = x^2 + 4x + 4, \\ y = 2. \end{cases}$$

7. Вычислить длины дуг кривых

$$1) L : \begin{cases} y^2 = (x+1)^3, \\ 1 \leq x \leq 6. \end{cases} \quad 2) L : \begin{cases} \rho = 4 \varphi, \\ 0 \leq \varphi \leq 3/4. \end{cases}$$

8. Деревянный цилиндрический чурбан с радиусом основания 0,3 м и высотой 0,5 м плавает в воде в вертикальном положении. Найти работу, которую необходимо затратить, чтобы извлечь чурбан из воды (плотность древесины $\rho = 900 \text{ кг/м}^3$).

Определенный интеграл

1. Вычислить определённые интегралы

$$1) \int_1^4 \frac{1 + \sqrt{x}}{x^2} dx \quad 2) \int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3} dx \quad 3) \int_{-2}^2 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$$

$$4) \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5 - 3 \cos x} \quad 5) \int_0^{1/2} \frac{x^2 dx}{x^4 - 1} \quad 6) \int_{-1}^0 \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+1}}$$

2. Найти среднее значение функций в указанных интервалах

$$1) y = \cos^3 x, \quad [0; \pi] \quad 2) y = \frac{1}{e^x + 1}, \quad [0; 2]$$

3. Оценить значения интегралов

$$1) \int_0^3 \sqrt[3]{(x^2 - 2x)^2} dx \quad 2) \int_{1/e}^1 x^2 \ln x dx$$

4. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1) \int_0^{\infty} \frac{x dx}{16x^4 + 1} \quad 2) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{(2-4x)^3}}$$

$$3) \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x+3)(x+6)}} \quad 4) \int_0^2 \frac{\ln(1 + \sqrt[7]{x^5})}{e^{\sin 2x} - 1} dx$$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$1) \begin{cases} y = e^{-x}, \\ y = e^x, \\ y = e. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \rho = 4 \cos \varphi, \\ \rho = 6 \cos \varphi. \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 4 \sin t \cos^2 t, \quad t \in [0; \pi/2]. \end{cases}$$

6. Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной указанными линиями: 1) – вокруг оси ОХ, 2) – вокруг оси ОУ:

$$1) \begin{cases} y^2 = 4x/3, \\ x = 3. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y = x, \\ y = x + \sin^2 x, \\ 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

7. Вычислить длины дуг кривых

$$1) L : \begin{cases} y = \arcsin x + \sqrt{1-x^2}. \end{cases} \quad 2) L : \begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \\ \pi/6 \leq \varphi \leq \pi/4. \end{cases}$$

8. Вертикальная плотина имеет форму полукруга радиуса 3 м. Найти силу давления воды на плотину.

Определенный интеграл

1. Вычислить определённые интегралы

$$1) \int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx \quad 2) \int_0^{\pi/6} \frac{dx}{9 + 4 \sin^2 x - 7 \cos^2 x} \quad 3) \int_0^1 \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$$

$$4) \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x^5 \sqrt{x^2 - 1}} \quad 5) \int_{-5}^2 \frac{dx}{x^2 + 4x - 21} \quad 6) \int_1^{1.5} \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} dx$$

2. Найти среднее значение функций в указанных интервалах

$$1) y = \frac{1}{4x^2 - 9}, \quad [-1; 0] \quad 2) y = (x + 3) \cdot \sin x, \quad [0; \pi/2]$$

3. Оценить значения интегралов

$$1) \int_0^4 x^3 \cdot e^{-x} dx \quad 2) \int_{-1}^3 \frac{4 - x^2}{4 + x^2} dx$$

4. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1) \int_0^{\infty} \frac{\pi dx}{(1 + 9x^2) \operatorname{arctg}^2 3x} \quad 2) \int_0^3 \frac{x^4 dx}{\sqrt[3]{1 - x^5}}$$

$$3) \int_1^{\infty} \frac{x dx}{(1 + x^2)^2} \quad 4) \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x dx}{x \sqrt{x}}$$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$1) \begin{cases} y = 4/x^2, \\ x = 1, \\ x = 2, \quad y = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = t, \\ y = 4t - t^2, \quad y = 0 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} \rho = 4 \sin \varphi, \\ \rho = 2, \quad (\rho \leq 2) \end{cases}$$

6. Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной указанными линиями: 1) – вокруг оси OX, 2) – вокруг оси OY:

$$1) \begin{cases} y = e^x, \\ x = 1, \quad x = 0, \quad y = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y^2 = 4 - x, \\ x = 0. \end{cases}$$

7. Вычислить длины дуг кривых:

$$1) L: \begin{cases} y^2 = x^3, \\ 0 \leq x \leq 4. \end{cases} \quad 2) L: \begin{cases} \rho = 8 \cos \varphi, \\ 0 \leq \varphi \leq \pi/4. \end{cases}$$

8. Заряд Q равномерно распределен вдоль отрезка прямой длиной L . Найти величину и направление силы, с которой отрезок действует на одноименный заряд q , расположенный на оси отрезка на расстоянии $L/2$ от одного из его концов.

Определенный интеграл

1. Вычислить определённые интегралы

$$\begin{array}{lll}
 1) \int_1^{\sqrt[3]{3}} \frac{x^2 dx}{x^6 + 1} & 2) \int_0^{\ln 2} \sqrt{1 + e^{-2x}} dx & 3) \int_0^{\pi} x^2 \sin x dx \\
 4) \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} dx & 5) \int_1^2 \frac{dx}{x^3 + x} & 6) \int_3^8 \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} - 1} dx
 \end{array}$$

2. Найти среднее значение функций в указанных интервалах

$$1) y = \frac{1}{\sqrt{5 + 4x - x^2}}, \quad [2; 4] \quad 2) y = \cos^5 x, \quad [0; \pi/2]$$

3. Оценить значения интегралов

$$1) \int_0^2 e^{2x - x^2} dx \quad 2) \int_{-3}^2 \frac{x - 3}{x^2 + 7} dx$$

4. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$\begin{array}{ll}
 1) \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{1+x} & 2) \int_0^4 \frac{10x dx}{\sqrt[4]{(16-x^2)^3}} \\
 3) \int_2^{\infty} \frac{3 + \arcsin(1/x)}{1+x^2} dx & 4) \int_0^1 \frac{\cos^2 x dx}{\ln^2(1+\sqrt{x})}
 \end{array}$$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$1) \begin{cases} y = 1 - x^2, \\ y = x^2 + 2, \\ x = 0, \quad x = 1. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = \ln 2t, \\ y = 0, \quad x = e - 1. \end{cases} \quad 3) \rho = 2 \cos 3\varphi.$$

6. Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной указанными линиями: 1) – вокруг оси OX, 2) – вокруг оси OY:

$$1) \begin{cases} y^2 = 4x, \\ x^2 = 4y. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = at^2, \\ y = a \ln t, \\ x = 0, \quad y = 0. \end{cases}$$

7. Вычислить длины дуг кривых:

$$1) L : \begin{cases} 9y^2 = 4(3-x)^3, \\ x = 0. \end{cases} \quad 2) L : \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \\ 0 \leq t \leq \pi/2. \end{cases}$$

8. Определить минимальную работу, которую необходимо затратить, чтобы построить каменную коническую башню с радиусом основания 10 м и высотой 30 м. Плотность камня принять 2500 кг/м^3 .

Определенный интеграл

1. Вычислить определённые интегралы

$$1) \int_0^1 x^3 \cdot \sqrt{4 + 5x^4} dx \quad 2) \int_{-2}^2 x^2 \sqrt{4 - x^2} dx \quad 3) \int_1^2 \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} dx$$

$$4) \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx \quad 5) \int_2^3 \frac{dx}{2x^2 + 3x - 2} \quad 6) \int_1^{0.5 \ln 2} \frac{e^x dx}{e^x + e^{-x}}$$

2. Найти среднее значение функций в указанных интервалах

$$1) y = x \cdot \sin x \cdot \cos x, \quad [-\pi; \pi] \quad 2) y = \sqrt{x+1}, \quad [3; 8]$$

3. Оценить значения интегралов

$$1) \int_{-2}^2 x^3 \sqrt[3]{(x-1)^2} dx \quad 2) \int_{-2}^2 x^{2/3} \cdot e^{-x^2/3} dx$$

4. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1) \int_0^{\infty} x \cdot e^x dx \quad 2) \int_1^2 \frac{dx}{x \sqrt[3]{\ln^2 x}}$$

$$3) \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(4x^2 + 1)^3}} \quad 4) \int_0^1 \frac{(e^{3x^2} - 1) dx}{\sqrt{\sin^5 x}}$$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$1) \begin{cases} y = 1/x, \\ x = 1, \quad x = 2, \\ y = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = e^t, \\ y = 2e^t - e^{2t}, \\ y = 0. \end{cases} \quad 3) \rho = 0,5 + \sin \varphi.$$

6. Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной указанными линиями: 1) – вокруг оси OX , 2) – вокруг оси OY :

$$1) \begin{cases} x = \sqrt{1 - y^2}, \\ y = \sqrt{3x/2}, \\ y = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin 2t, \\ y = 0, \quad 0 \leq t \leq \pi/2. \end{cases}$$

7. Вычислить длины дуг кривых:

$$1) L : \begin{cases} x^2 = 4 - y, \\ y = 0. \end{cases} \quad 2) L : \begin{cases} \rho = 6(1 + \sin \varphi), \\ -\pi/2 \leq \varphi \leq 0. \end{cases}$$

8. Заряд Q равномерно распределен вдоль отрезка оси OX от $x = 0$ до $x = a$. Найти величину и направление силы, с которой отрезок действует на одноименный заряд q , расположенный на оси OY в точке $y = 2a$.

Определенный интеграл

1. Вычислить определённые интегралы

$$1) \int_1^{e^2} \frac{dx}{x \sqrt{1 + \ln x}} \quad 2) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^2} dx \quad 3) \int_0^1 x^3 \operatorname{arctg} x dx$$

$$4) \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{1 - \sin x} \quad 5) \int_2^3 \frac{dx}{x(x^2 - 1)} \quad 6) \int_{2/3}^{7/3} \frac{x dx}{\sqrt{2 + 3x}}$$

2. Найти среднее значение функций в указанных интервалах

$$1) y = \frac{x}{\sin^2 x}, \quad [\pi/3; \pi/2] \quad 2) y = \frac{x}{x^2 + 3x - 1}, \quad [1; 3]$$

3. Оценить значения интегралов

$$1) \int_{-1}^2 (x^2 + 2^{-x^2}) dx \quad 2) \int_{-1}^1 (1 + \sqrt{1 - x^6}) dx$$

4. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1) \int_{-\infty}^0 x \cdot \sin(x^2) dx \quad 2) \int_{-1}^0 \frac{dx}{1 - e^x}$$

$$3) \int_1^{\infty} x^3 \operatorname{arctg}^5 \frac{\pi}{x} dx \quad 4) \int_0^3 \frac{x^4 dx}{\sqrt{(x^4 - 81)^5}}$$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$1) \begin{cases} y = 5/x, \\ x + y = 6, \\ x = 6. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \rho = \sqrt{2} \cos(\varphi - \pi/4), \\ \rho = \sqrt{2} \sin(\varphi - \pi/4). \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x = e^t, \\ y = e^{-t}, & y = 0, \\ x = 1/2, & x = 2. \end{cases}$$

6. Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной указанными линиями: 1) – вокруг оси ОХ, 2) – вокруг оси ОУ:

$$1) \begin{cases} y^2 = (x - 1)^3, \\ x = 2. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y = e^x, & y = 0, \\ x = 0, & x = 2. \end{cases}$$

7. Вычислить длины дуг кривых:

$$1) L : \begin{cases} y = \frac{2}{5} x \sqrt[4]{x} - \frac{2}{3} \sqrt[4]{x^3}, \\ y = 0. \end{cases} \quad 2) L : \begin{cases} x = 4 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t, \\ \pi/6 \leq t \leq \pi/4. \end{cases}$$

8. Коническая емкость с радиусом основания R и высотой H , обращенная вершиной вниз, заполнена водой. Найти силу давления воды на стенку емкости.