Галанов Ю.И.
zeidel.mcd

Решение систем линейных уравнений итерационными методами.

Метод Зейделя.

Задание. Методом Зейделя решить заданную систему линейных уравнений точностью до 0.001.

Приводим систему к виду: $\mathbf{X} := \mathbf{A}\cdot\mathbf{X} + \mathbf{B}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} := \begin{bmatrix} (0.23\cdot x_1 - \mathbf{0.04}\cdot x_2) + 0.21\cdot x_3 - 0.018\cdot x_4 + 1.24 \\ 0.45\cdot x_1 + -0.23\cdot x_2 + 0.06\cdot x_3 + (-0.88\cdot x_4 + 0) \\ 0.26\cdot x_1 + 0.34\cdot x_2 + -0.11\cdot x_3 + 0.62\cdot x_4 + 0 \\ 0.05\cdot x_1 + -0.25\cdot x_2 + 0.34\cdot x_3 + -0.12\cdot x_4 + -1.17 \end{bmatrix}$$

Установим начало нумерации массивов: $\mathbf{ORIGIN} := 1$

Матрица системы:

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 0.23 & -0.04 & 0.21 & -0.18 \\ 0.45 & -0.23 & 0.06 & -0.88 \\ 0.26 & 0.34 & -0.11 & 0.62 \\ 0.05 & -0.25 & 0.34 & -0.12 \end{pmatrix}$$

Матрица свободных членов:

$$\mathbf{B} := \begin{pmatrix} 1.24 \\ 0 \\ 0 \\ -1.17 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{i} := 1..4 \qquad \mathbf{j} := 1..4$$

Разобьем матрицу А на две треугольных: A:=F+D.

$\mathbf{F}_{\mathbf{i},\mathbf{j}} := \mathbf{if}(\mathbf{i} > \mathbf{j}, \mathbf{A}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}, 0)$ Нижняя треугольная матрица

$\mathbf{D}_{\mathbf{i},\mathbf{j}} := \mathbf{if}(\mathbf{i} \le \mathbf{j}, \mathbf{A}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}, 0)$ Верхняя треугольная матрица

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.45 & 0 & 0 & 0 \\ 0.26 & 0.34 & 0 & 0 \\ 0.05 & -0.25 & 0.34 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0.23 & -0.04 & 0.21 & -0.18 \\ 0 & -0.23 & 0.06 & -0.88 \\ 0 & 0 & -0.11 & 0.62 \\ 0 & 0 & 0 & -0.12 \end{pmatrix}$$

Представим систему в виде: $\mathbf{X}^{\langle \mathbf{k}+1\rangle} := \mathbf{F}\cdot\mathbf{X}^{\langle \mathbf{k}+1\rangle} + \mathbf{D}\cdot\mathbf{X}^{\langle \mathbf{k}\rangle} + \mathbf{B}$

Сведем решение системы методом Зейделя к методу простых итераций.

$\mathbf{N} := 100 \qquad \mathbf{k} := 2..\mathbf{N} \qquad \mathbf{E} := \mathbf{identity}(4) \qquad \mathbf{G} := \mathbf{E} - \mathbf{F}$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.45 & 1 & 0 & 0 \\ -0.26 & -0.34 & 1 & 0 \\ -0.05 & 0.25 & -0.34 & 1 \end{pmatrix} \qquad |\mathbf{G}| = 1$$

$$\mathbf{D'} := \mathbf{G}^{-1}\cdot\mathbf{D} \qquad \mathbf{B'} := \mathbf{G}^{-1}\cdot\mathbf{B}$$

Мы свели решение системы к методу простых итераций => $\mathbf{X}^{\langle \mathbf{k}+1\rangle} := \mathbf{D'}\cdot\mathbf{X}^{\langle \mathbf{k}\rangle} + \mathbf{B'}$

Зададим первое и второе приближения:

$$\mathbf{X}^{\langle 1\rangle} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{X}^{\langle 2\rangle} := \mathbf{B'}$$

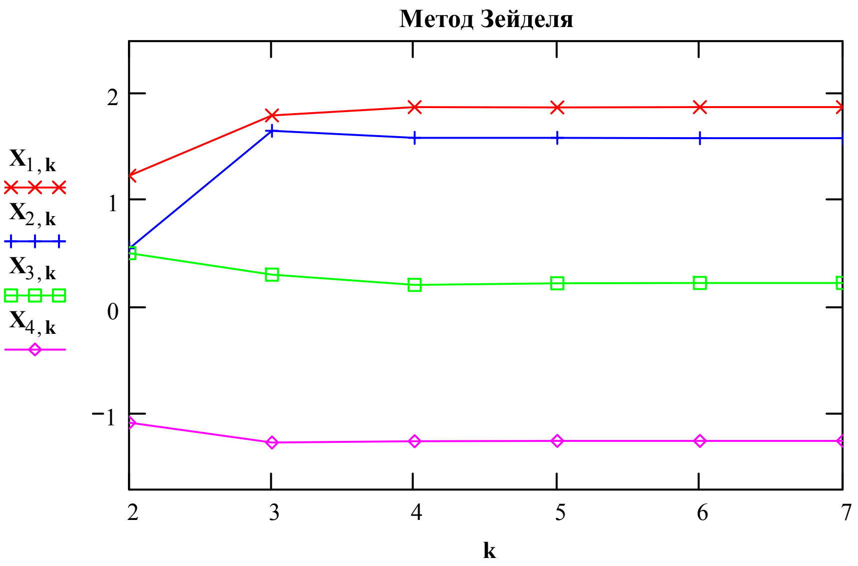
$$\mathbf{X}^{\langle \mathbf{k}+1\rangle} := \mathbf{D'}\cdot\mathbf{X}^{\langle \mathbf{k}\rangle} + \mathbf{B'}$$

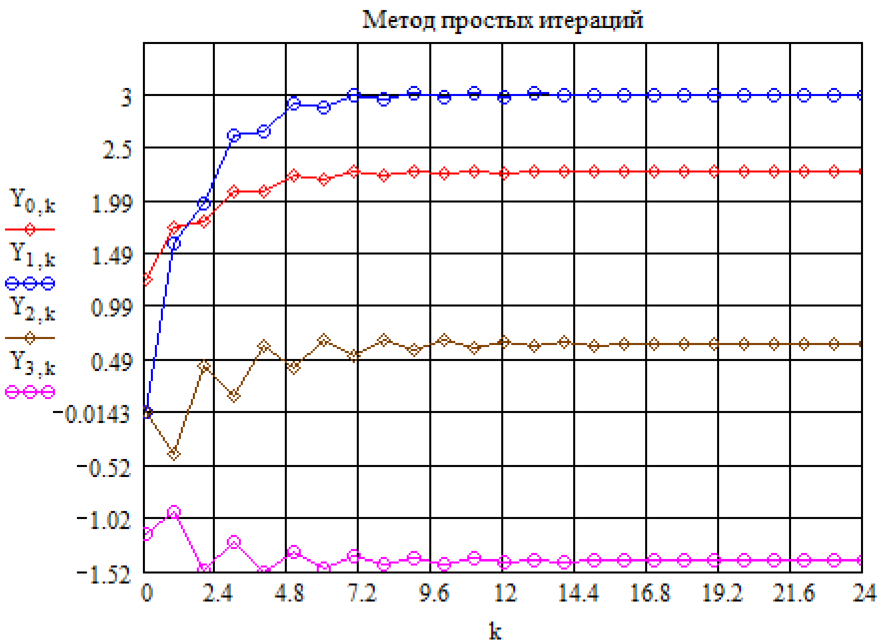
Для остановки итераций можно использовать одно из условий:

$$\mathbf{max}\left(\left|\mathbf{X}^{\langle \mathbf{k}\rangle} - \mathbf{X}^{\langle \mathbf{k}-1\rangle}\right|\right) < 0.001 \quad \text{или} \quad \mathbf{min}\left(\left|\mathbf{X}^{\langle \mathbf{k}\rangle} - \mathbf{X}^{\langle \mathbf{k}-1\rangle}\right|\right) < 0.001$$

```
X := | X<1> ← (0, 0, 0)
     | X<2> ← B'
     | k ← 2
     | while  max(|X<k> − X<k−1>|) > 0.001
     |     | X<k+1> ← D'·X<k> + B'
     |     | k ← k + 1
     | X
```

Построим зависимости компонент вектора решений от номера итерации:





$\text{cols}(Y) = 25$

Найдем число итераций, необходимых для достиженеа заданной точности:

$\text{cols}(\mathbf{X}) = 7$

Решение $\mathbf{X}^{\langle 7 \rangle} = \begin{pmatrix} 1.882 \\ 1.591 \\ 0.233 \\ -1.245 \end{pmatrix}$

Вспомним, что решение данной системы уравнений методом простых итераций потребовало 25 итераци => $\begin{pmatrix} 1.882 \\ 1.59 \\ 0.233 \\ -1.245 \end{pmatrix}$