Электромагнитные волны и их свойства

Задача 1. На какой диапазон длин волн можно настроить колебательный контур, если его индуктивность L=2мГн, а емкость может меняться от С1=69пФ до С2=533пФ?

Дано:

L = 2мГн = 0,002 Гн

C_1 = 69 пф = $69 \cdot 10^{-12}$ Ф

C_2 = 533 пф =

= $533 \cdot 10^{-12}$ Ф

λ_1 ; λ_2 - ?

Решение:

По формуле Томсона период колебаний контура

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

Длина связана с периодом колебаний

$$\lambda = c \cdot T$$

Тогда

$$\lambda_1 = c \cdot T_1 = c \cdot 2\pi\sqrt{L \cdot C_1} = 3 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot \sqrt{2 \cdot 10^{-3} \cdot 69 \cdot 10^{-12}} = 699{,}87 \text{ м}$$

$$\lambda_2 = c \cdot T_2 = c \cdot 2\pi\sqrt{L \cdot C_2} = 3 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot \sqrt{2 \cdot 10^{-3} \cdot 533 \cdot 10^{-12}} = 1945{,}18 \text{ м}$$

Ответ: $\lambda_1 = 699{,}87$ м ; $\lambda_2 = 1945{,}18$ м

Задача 2. Катушка с индуктивностью L = 30 мкГн присоединенная к плоскому конденсатору с площадью пластин S = 0,01 м^2 и расстоянием между ними d = 0,1 мм. Найти диэлектрическую проницаемость ε среды, которая заполняет пространство между пластинами, если контур настроен на длину волны λ = 750 м.

Дано:

L = 30 мкГн =
= 30·10^{-6} Гн
S = 0,01 м^2
d = 0,1 м = 10^{-4} м
$\lambda = 750$ м

ε - ?

Решение:

По формуле Томсона период колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

Емкость плоского конденастора

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d},$$

Тогда период колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{LC} = 2\pi\sqrt{L\frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}}$$

Длина волны связана с периодом

$$\lambda = c \cdot T,$$

где c – скорость света.

Тогда диэлектрическая проницаемость

$$\varepsilon = \frac{T^2 d}{4\pi^2 L \varepsilon_0 S} = \frac{\lambda^2 d}{4\pi^2 L \varepsilon_0 S c^2} = \frac{750^2 \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 3{,}14^2 \cdot 30 \cdot 10^{-6} \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}01 \cdot (3 \cdot 10^8)^2} = 5{,}97 \approx 6$$

Ответ: $\varepsilon = 5{,}97 \approx 6$

Задача 3. Уравнение изменения со временем разности потенциалов на обкладках конденсатора в колебательном контуре имеет вид $U = 50\cos 10^4\pi t$ В. Емкость конденсатора $C = 0{,}1$ мкФ. Найти период T колебаний, индуктивность L контура, закон изменения со временем t тока I в цепи и длину волны λ, соответствующую этому контуру.

- Решение:

Закон изменения напряжения на обкладках конденсатора

$$U = U_0 cos\omega t$$

Амплитуда напряжения

$$U_0 = \frac{q}{C}$$

Период колебаний находим по формуле Томсона

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

Циклическая частота связана с периодом соотношением

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Уравнение колебания напряжения запишется в виде

$$U = \frac{q}{C} cos\omega t$$

Тогда период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{10^4\pi} = 2 \cdot 10^{-4}\ c$$

Индуктивность катушки

$$L = \frac{1}{\omega^2 C} = \frac{1}{(10^4\pi)^2 \cdot 0.1 \cdot 10^{-5}} = 1.01 \cdot 10^{-2}\ \text{Гн}$$

Ток в контуре – первая производная от заряда по времени

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{CdU}{dt} = -CU_0\omega sin\omega t$$

$$I = -0.05\pi sin 10^4 \pi t$$

Длина волны, создаваемая контуром

$$\lambda = cT = 2\pi c\sqrt{LC} = 2 \cdot 3.14 \cdot 3 \cdot 10^8 \sqrt{1.01 \cdot 10^{-2} \cdot 0.1 \cdot 10^{-6}}$$
$$= 6 \cdot 10^4\ \text{м}$$

Задача 4. Найти соотношение энергии $W_м/W_{эл}$ магнитного поля колебательного контура к энергии его электрического поля для момента времени $t=T/8$.

- Решение:

Энергия электрического поля на обкладках конденсатора $W_{эл} = \frac{CU^2}{2}$

Энергия магнитного поля в катушке индуктивности $W_м = \frac{LI^2}{2}$

Закон изменения напряжения на обкладках конденсатора

$$U = U_0 cos\omega t$$

Индуктивность катушки $L = \frac{1}{\omega^2 C} \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC}$

Ток в контуре – первая производная от заряда по времени

$$I = \frac{dq}{dt} = C\frac{dU}{dt} = -CU_0 \omega sin\omega t$$

Тогда $W_{эл} = \frac{CU^2}{2} = \frac{CU_0^2\ cos^2\omega t}{2}, W_м = \frac{LI^2}{2} = \frac{LC^2U_0^2\ \omega^2 sin^2\omega t}{2}$

$$\frac{W_м}{W_{эл}} = LC\omega^2 tg^2\omega t = tg^2\omega t = tg^2\frac{2\pi}{T}t = tg^2\frac{\pi}{4} = 1.$$

Задача 5. Два конденсатора с емкостями C_1=0,2 мкФ и C_2=0,1 мкФ включены последовательно в цепь переменного тока напряжением U=220 В и частотой ν=50 Гц. Найти ток I в цепи и падения потенциала U_{C1} и U_{C2} на первом и втором конденсаторах.

- Решение:

Полное сопротивление цепи (R=0, L=0): $Z = \frac{1}{\omega C}$

Циклическую частоту выражаем через частоту: $\omega = 2\pi\nu$

Конденсаторы включены последовательно, поэтому

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \Rightarrow Z = \frac{(C_1 + C_2)}{2\pi\nu C_1 C_2}$$

Закон Ома для цепи переменного тока

$$I = \frac{U}{Z} = U\omega C = \frac{2\pi\nu U C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 2 \cdot 3.14 \cdot 50 \cdot 220 \cdot \frac{0.2 \cdot 10^{-6} \cdot 0.1 \cdot 10^{-6}}{(0.2 + 0.1) \cdot 10^{-6}} = 4.608 \cdot 10^{-3} A$$

Падения потенциала U_{C1} и U_{C2} на первом и втором конденсаторах

$$U_{C1} = IZ_{C1} = \frac{UC_2}{C_1 + C_2} = \frac{220 \cdot 0.1 \cdot 10^{-6}}{(0.2 + 0.1) \cdot 10^{-6}} = 73.33 \text{ В}$$

$$U_{C2} = IZ_{C2} = \frac{UC_1}{C_1 + C_2} = \frac{220 \cdot 0.2 \cdot 10^{-6}}{(0,2 + 0,1) \cdot 10^{-6}} = 146,66 \text{ В}$$

Задача 6. Электромагнитная волна с частотой ν = 3,0 МГц переходит из вакуума в немагнитную среду с диэлектрической проницаемостью ε=4,0. Найти приращение ее длины волны.

- Решение:

Длина волны в вакууме $$\lambda_1 = \frac{c}{\nu}$$

Длина волны в среде уменьшается за счет уменьшения скорости распространения

$$\lambda_2 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \frac{1}{\nu}$$

Приращение

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{c}{\nu}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - 1\right)$$

$\Delta\lambda$=-50 м.

Задача 7. Плоская электромагнитная волна $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{\mathrm{m}} \cos(\omega t - kr)$ распространяется в вакууме. Считая векторы E_{m} и k известными, найти вектор $\boldsymbol{H}$ как функцию времени t в точке с радиус-вектором $\boldsymbol{r} = 0$.

- Решение: $\vec{H} = \vec{H}_m \cos(\omega t - kr)$

$\vec{E}_m, \vec{H}_m, \vec{k}$ - образуют правую тройку векторов.

Следовательно, $\vec{H}_m \uparrow\uparrow \left[\vec{k}, \vec{E}_m\right]$

$$\sqrt{\varepsilon_0} E_m = \sqrt{\mu_0} H_m \Rightarrow \vec{H}_m = H_m \vec{e}_H$$

Здесь $\vec{e}_H$ - орт вектора $\vec{H}_m$

$$\vec{e}_H = \frac{\left[\vec{k}, \vec{E}_m\right]}{kE_m} \Rightarrow \vec{H}_m = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_m \frac{\left[\vec{k}, \vec{E}_m\right]}{kE_m}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \left[\vec{k}, \vec{E}_m\right] \cos(\omega t - kr) = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \left[\vec{k}, \vec{E}_m\right] \cos(ckt)$$

Задача 8. Найти формулы для полного сопротивления цепи Z и сдвига фаз φ между напряжением и током при различных способах включения сопротивления R, емкости C и индуктивности L. Рассмотреть случаи: а) R и C включены последовательно; б) R и C включены параллельно; в) R и L включены последовательно; г) R и L включены параллельно; д) R, L и C включены последовательно.

- Решение:

Если цепь содержит сопротивление, емкость и индуктивность, то полное сопротивление цепи $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$.

а) если R и C включены последовательно, то L=0. Тогда $Z = \sqrt{R^2 + {X_C}^2} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$ и $\mathrm{tg}\varphi = \frac{X_C}{R} = \frac{1}{\omega CR}$.

б) если R и C включены параллельно, то L=0. Тогда $Z = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{{X_C}^2}} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + (\omega C)^2} = \frac{R}{\sqrt{1+R^2\omega^2C^2}}$ и $\mathrm{tg}\varphi = \frac{R}{-X_C} = -R\omega C$.

в) если R и L включены последовательно, то C=0. Тогда $Z = \sqrt{R^2 + {X_L}^2} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ и $\text{tg}\varphi = \frac{X_L}{R} = \frac{\omega L}{R}$.

г) если R и L включены параллельно, то C=0. Тогда $Z = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{{X_L}^2}} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{(\omega L)^2}} = \frac{R\omega L}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}$ и $\text{tg}\varphi = \frac{R}{X_L} = \frac{R}{\omega L}$

д) если R, C и L включены последовательно, то $Z = \sqrt{R^2 + (X_L + X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$ и сдвиг фаз $tg\varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$