Физика колебаний и волн.

Колебания – процессы (движения или изменения состояния), обладающие той или иной степенью повторяемости во времени.

- **Гармонические колебания** – колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется со временем по закону синуса или косинуса

$$x = A cos(\omega_0 t + \varphi_0) \text{или } x = A sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

x – смещение из положения равновесия,

A– максимальное значение колеблющейся величины, называется **амплитудой** колебаний,

ω_0 – **круговая (циклическая) частота**,

$(\omega_0 t + \varphi_0)$ – **фаза колебаний** в момент времени t.

- $T = \frac{2\pi}{\omega_0} \omega_0 = 2\pi\nu$

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 sin(\omega_0 t + \varphi_0) = A\omega_0 cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega_0^2 cos(\omega_0 t + \varphi_0) = A{\omega_0}^2 cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi)$$

Кинетическая энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$
$$= \frac{m\omega_0^2 A^2}{4}\big(1 - cos2(\omega_0 t + \varphi_0)\big).$$

Потенциальная энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания под действием упругой силы F:

$$E_p = -\int_0^x F dx = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$
$$= \frac{m\omega_0^2 A^2}{4}\big(1 + cos2(\omega_0 t + \varphi_0)\big).$$

Тогда полная энергия:

$$E = E_k + E_p = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} = \frac{kA^2}{2} = const, \text{ где} k = m\omega_0^2$$

Математический маятник

- Идеализированная система, состоящая из материальной точки массой m, подвешенной на невесомой нерастяжимой нити, и совершающей колебания под действием силы тяжести.

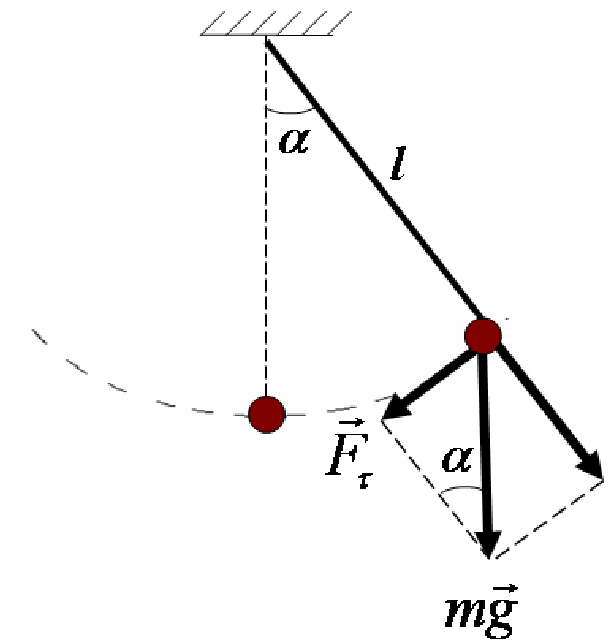
$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l} sin\alpha = 0$,примем $sin\alpha \approx \alpha$, тогда

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\alpha = 0$$

Следовательно:

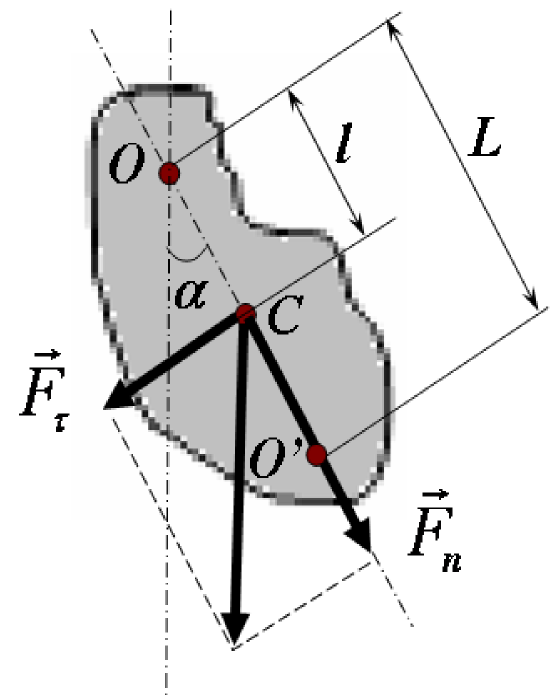
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$



Физический маятник

- Твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через точку О, не совпадающую с центром масс тела С. Точку О называют точкой подвеса.



$$\ddot{\alpha} + \frac{mgl}{I}\alpha = 0$$

Следовательно:

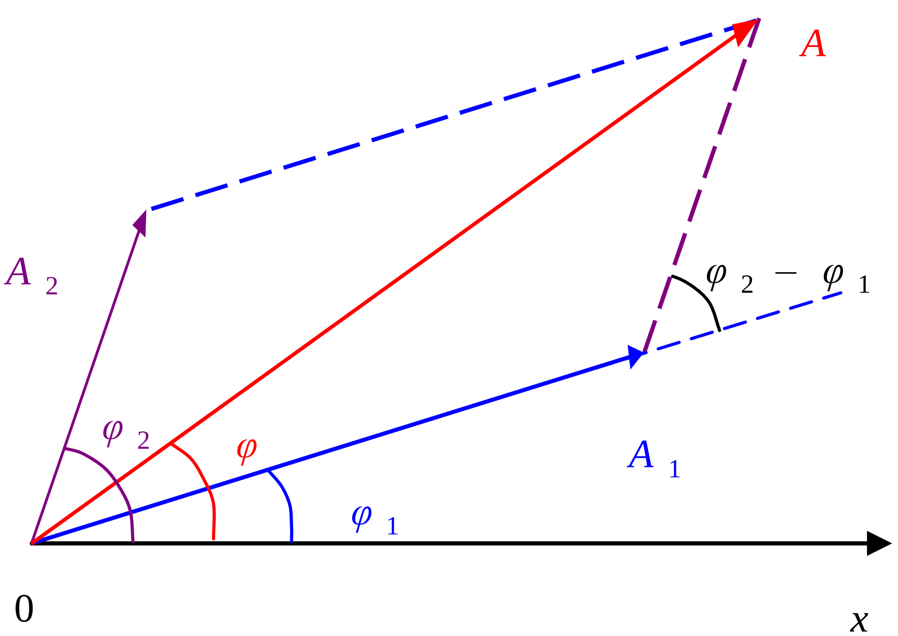
$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{mgl}}$ или

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$, где L – приведенная длина физического маятника, $L = \dfrac{I}{ml}$.

Сложение двух одинаково направленных колебаний

- $x_1 = A_1 cos(\omega_0 t + \varphi_1)$
- $x_2 = A_2 cos(\omega_0 t + \varphi_2)$

Разность фаз этих колебаний не зависит от времени, т.е. $(\varphi_1 - \varphi_2) = \text{const}$, такие колебания называются **когерентными**.



Для нахождения результирующего колебания воспользуемся методом векторных диаграмм.

$$x = A cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$tg\varphi = \frac{A_1 sin\varphi_1 + A_2 sin\varphi_2}{A_1 cos\varphi_1 + A_2 cos\varphi_2}$$

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

- **Сложение колебаний с одинаковыми частотами**

Пусть точка одновременно движется вдоль осей *x* и *y*:

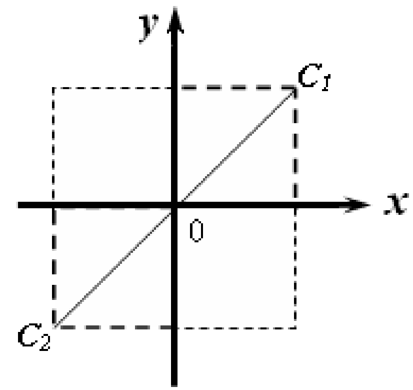
- $x = A_1 cos(\omega_0 t + \varphi_1)$
- $y = A_2 cos(\omega_0 t + \varphi_2)$

$$\boxed{\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

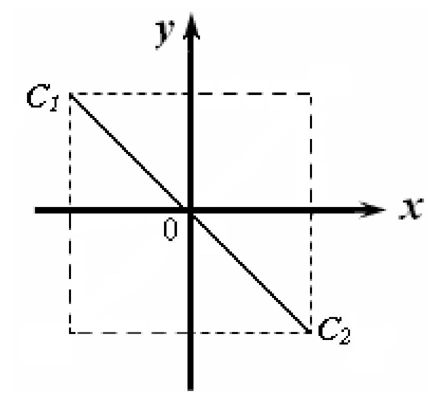
Частные случаи:

- Фазы колебаний равны
- $\frac{x}{y} = \frac{A_1}{A_2}$или $y = \frac{A_2}{A_1}x$

Такие колебания называют линейно-поляризованными.

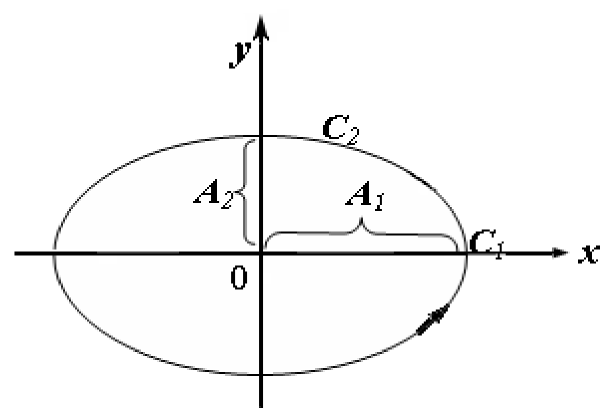


- Разность фаз равна π
- $\frac{x}{y} = -\frac{A_1}{A_2}$или $y = -\frac{A_2}{A_1}x$



- Разность фаз равна π/2
- $\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$

Такие колебания называют эллиптически поляризованными.



Затухающие колебания

- Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний линейной системы:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

x– колеблющаяся величина,

δ = const – коэффициент затухания,

ω_0 – собственная циклическая частота колебательной системы (т.е. в отсутствие потерь энергии, $\delta = 0$).

- Решение уравнения в виде:

$$x = A_0 e^{-\delta t} cos(\omega t + \varphi_0)$$

- Для пружинного маятника массой ***m***, совершающего малые колебания под действием упругой силы, сила трения пропорциональна скорости:
- $F_{\text{тр}} = -rv$, r- коэффициент сопротивления
- Дифференциальное уравнение затухающих колебаний маятника:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

- Решение:

$$x = A_0 e^{-\frac{r}{2m}t} cos(\omega t + \varphi_0)$$

где $\frac{r}{2m} = \delta$– коэффициент затухания

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{r^2}{4m^2}}$ - циклическая частота затухающих колебаний

Вынужденные колебания

- **Вынужденные колебания** – незатухающие колебания, возникающие под действием периодической силы, изменяющейся по гармоническому закону:

$$X(t) = X_0 cos\omega t$$

Для механических колебаний роль $X(t)$ играет внешняя вынуждающая сила

$$F = F_0 cos\omega t$$

Для простейшего пружинного маятника, на который действует внешняя сила:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 cos\omega t$$

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний маятника:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} cos\omega t$$

Амплитудаустановившихся вынужденных колебаний:

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$$

Сдвиг фаз между смещением и вынуждающей силой:

$$\varphi = arctg\left(\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

Резонансная частота:

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

$$A_{\text{рез}} = \frac{F_0/m}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

Задача 1.Точка совершает колебания по закону *x*(*t*)=*A*cos(*ωt*+*φ*), где A=2 см. Определить начальную фазу φ, если x(0)=–$\sqrt{3}$ см и $\dot{x}(0) < 0$. Построить векторную диаграмму для момента t=0.

- <u>Решение:</u>

Используя уравнение движения, выразим смещение в момент t=0: $x(0) = Acos(\varphi)$. Отсюда найдем начальную фазу:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{x(0)}{A}\right).$$

Подставим в это выражение заданные значения: $\varphi = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

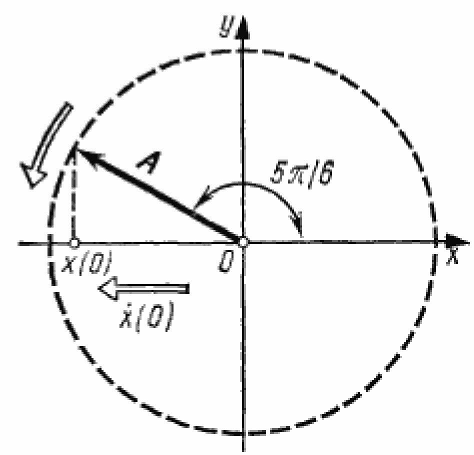
Следовательно, имеем два решения: $\varphi_1 = \frac{5\pi}{6}$ и $\varphi_2 = \frac{7\pi}{6}$.

Чтобы решить, какое из этих решений удовлетворяет условию $\dot{x}(0) < 0$найдем $\dot{x}(t)$:

$\dot{x}(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$.

Тогда $\dot{x}(0) = -A\omega \sin(\varphi) < 0$, если $\sin(\varphi) > 0$ (т.к. *A*>0 и *ω*>0).

Этому условию удовлетворяет значение $\varphi_1 = \frac{5\pi}{6}$.



Теперь построим векторную диаграмму:

Задача 2. Материальная точка массой m=5 г совершает гармонические колебания с частотой ν=0,5 Гц. Амплитуда колебаний А= 3 см. Определить:

1) скорость v точки в момент времени, когда смещение x=1,5 см;
2) максимальную силу F_{max} действующую на точку;
3) полную энергию E колеблющейся точки.

- Решение:

1) Уравнение гармонического колебания: $x(t) = Acos(\omega t + \varphi)$. Выражение для скорости получим, взяв первую производную по времени от смещения: $v(t) = -A\omega sin(\omega t + \varphi)$. Чтобы получить зависимость скорости от смещения, нужно исключить t. Для этого возведем оба уравнения в квадрат, выразим квадраты синуса и косинуса, сумма которых равна 1.

Получим: $\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{A^2\omega^2} = 1$. Учтем также, что ω=2$\pi\nu$. Следовательно $v = \pm 2\pi\nu\sqrt{A^2 - x^2}$. Подставляем значения, получаем v=8.2 см/с.

2) Силу найдем по второму закону Ньютона: F=ma. Чтобы определить выражение для ускорения, возьмем производную по времени от скорости: $a(t) = -A\omega^2 cos(\omega t + \varphi)$.

Следовательно, $F = -4mA\pi^2\nu^2 cos(\omega t + \varphi)$.

Тогда $F_{max} = 4\pi^2\nu^2 mA$. Подставляем значения, $F_{\max}$=1.48 мН.

3) Полная энергия есть сумма кинетической и потенциальной энергий, вычисленных для любого момента времени. Проще будет вычислить полную энергию в момент, когда кинетическая энергия достигает максимального значения. В этот момент потенциальная энергия равна нулю. Тогда$E = E_k^{max} = \frac{mv_{max}^2}{2}$.

$v_{max} = 2\pi\nu A$.

В итоге $E = 2\pi^2\nu^2 mA^2$.Подставляем цифры: E=22.1 мкДж.

Задача 3. Физический маятник представляет собой стержень длиной l=1 м и массой $3m_1$ с прикрепленным к одному из его концов обручем диаметром d=1/2 l и массой m_1. Горизонтальная ось Oz маятника проходит через середину стержня перпендикулярно ему (рис. 6.3). Определить период T колебаний такого маятника.

- Решение:

Период колебаний физического маятника определяется по формуле:

$$T = 2\pi\sqrt{I/mgl_C}$$

I – момент инерции маятника относительно оси колебаний;

m – его масса; l_C – расстояние от центра масс маятника до оси колебаний.

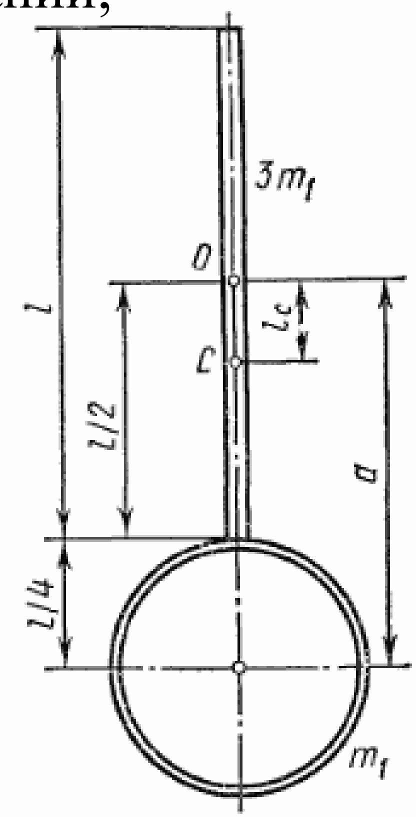


Рис. 6.3

Момент инерции маятника равен сумме моментов инерции стержня I_1 и обруча I_2:

$$I = I_1 + I_2$$

Момент инерции стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его центр масс, определяется по формуле $I_1 = \frac{1}{12}ml^2$. В данном случае m=$3m_1$ и $I_1 = \frac{1}{4}m_1l^2$.

Момент инерции обруча найдем, воспользовавшись теоремой Штейнера $I=I_0+ma^2$.

I – момент инерции относительно произвольной оси; $I0$ – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс параллельно заданной оси; a – расстояние между указанными осями. Применив эту формулу к обручу, получим

$$I_2 = m_1(l/4)^2 + m_1(3l/4)^2 = 5/8m_1l^2$$

Подставив выражения I_1и I_2в формулу для I, найдем момент инерции маятника относительно оси вращения:

$$I = 1/4m_1l^2 + 5/8m_1l^2 = 7/8m_1l^2$$

Расстояние l_Cот оси маятника до его центра масс равно

$$l_C = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{3m_1 \cdot 0 + m_1(3l/4)}{3m_1 + 3m_1} = \frac{3/4m_1l}{4m_1}$$

$$l_C = \frac{3}{16}l.$$

Задача 4. Складываются два колебания одинакового направления, выражаемых уравнениями $x_1=A_1 \cos \omega(t+\tau_1)$; $x_2=A_2 \cos \omega(t+\tau_2)$, где A=1 см, A_2=2 см, τ_1=1/6 с, τ_2=1/2 с, $\omega=\pi$ с$^{-1}$. 1. Определить начальные фазы φ_1 и φ_2 составляющих колебаний. 2. Найти амплитуду A и начальную фазу φ результирующего колебания. Написать уравнение результирующего колебания.

Решение. 1. Уравнение гармонического колебания имеет вид

$$x=A \cos (\omega t+\varphi). \qquad (1)$$

Преобразуем уравнения, заданные в условии задачи, к такому же виду:

$$x_1=A_1 \cos (\omega t+\omega\tau_1), \quad x_2=A_2 \cos (\omega t+\omega\tau_2). \qquad (2)$$

Из сравнения выражений (2) с равенством (1) находим начальные фазы первого и второго колебаний:

$$\varphi_1=\omega\tau_1=\pi/6 \text{ рад и } \varphi_2=\omega\tau_2=\pi/2 \text{ рад}.$$

2. Для определения амплитуды A результирующего колебания удобно воспользоваться векторной диаграммой, представленной на рис. 6.4. Согласно теореме косинусов, получим

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\Delta\varphi}, \qquad (3)$$

где $\Delta\varphi$ — разность фаз составляющих колебаний. Так как $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1$, то, подставляя найденные значения φ_2 и φ_1, получим $\Delta\varphi=\pi/3$ рад.

Подставим значения A_1, A_2 и $\Delta\varphi$ в формулу (3) и произведем вычисления: A=2,65 см.

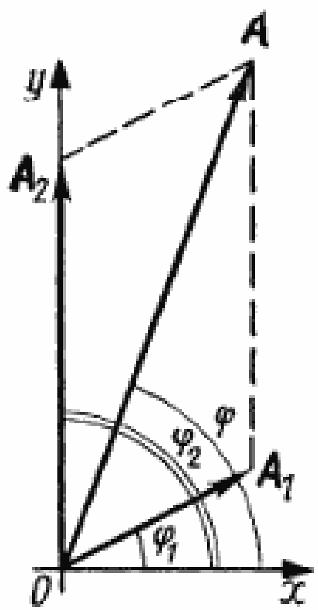


Рис. 6.4

Тангенс начальной фазы φ результирующего колебания определим непосредственно из рис. 6.4: $\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}$, откуда начальная фаза

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}.$$

Подставим значения A_1, A_2, φ_1, φ_2 и произведем вычисления:

$$\varphi = \operatorname{arctg}(5/\sqrt{3}) = 70{,}9^\circ = 0{,}394\pi \text{ рад}.$$

Так как угловые частоты складываемых колебаний одинаковы, то результирующее колебание будет иметь ту же частоту ω. Это позволяет написать уравнение результирующего колебания в виде $x = A\cos(\omega t + \varphi)$, где $A = 2{,}65$ см, $\omega = \pi$ с$^{-1}$, $\varphi = 0{,}394\,\pi$ рад.

Задача 5. Материальная точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях, уравнения которых

$x = A_1 \cos \omega t$, (1)

$y = A_2 \cos \omega/2\ t$, (2)

где A_1=1 см, A_2=2 см, $\omega=\pi$ с$^{-1}$. Найти уравнение траектории точки. Построить траекторию с соблюдением масштаба и указать направление движения точки.

Решение. Чтобы найти уравнение траектории точки, исключим время t из заданных уравнений (1) и (2). Для этого воспользуемся формулой $\cos(\alpha/2) = \sqrt{(1/2)(1+\cos\alpha)}$. В данном случае $\alpha = \omega t$, поэтому

$$y = A_2 \cos\frac{\omega}{2} t = A_2 \sqrt{(1/2)(1+\cos\omega t)}.$$

Так как согласно формуле (1) $\cos \omega t = x/A_1$, то уравнение траектории

$$y = A_2 \sqrt{(1/2)(1+x/A_1)}. \qquad (3)$$

Полученное выражение представляет собой уравнение параболы, ось которой совпадает с осью Ox. Из уравнений (1) и (2) следует, что смещение точки по осям координат ограничено и заключено в пределах от -1 до $+1$ см по оси Ox и от -2 до $+2$ см по оси Oy.

Для построения траектории найдем по уравнению (3) значения y, соответствующие ряду значений x, удовлетворяющих условию $|x| \leqslant 1$ см, и составим таблицу:

x, см	-1	$-0{,}75$	$-0{,}5$	0	$+0{,}5$	$+1$
y, см	0	$\pm 0{,}707$	± 1	$\pm 1{,}41$	$\pm 1{,}73$	± 2

Начертив координатные оси и выбрав масштаб, нанесем на плоскость xOy найденные точки. Соединив их плавной кривой, получим траекторию точки, совершающей колебания в соответствии с уравнениями движения (1) и (2) (рис. 6.5).

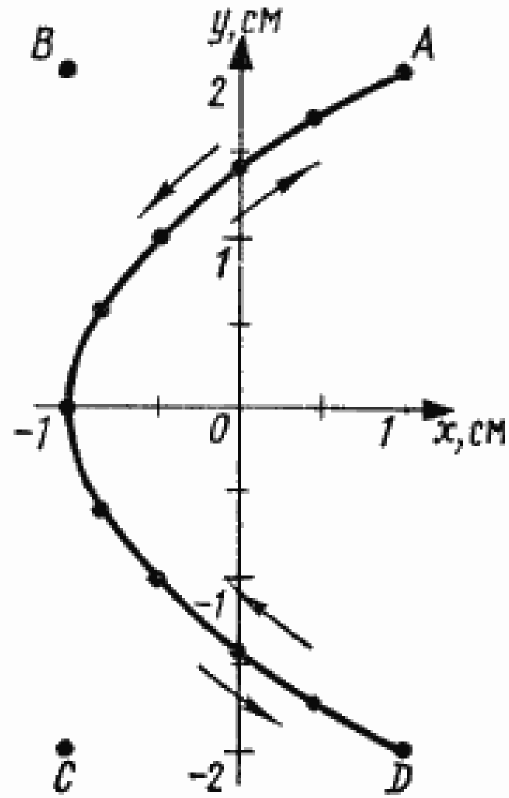


Рис. 6.5

Для того чтобы указать направление движения точки, проследим за тем, как изменяется ее положение с течением времени. В начальный момент $t=0$ координаты точки равны $x(0)=1$ см и $y(0)=2$ см. В последующий момент времени, например при $t_1=1$ с, координаты точек изменятся и станут равными $x(1)=-1$ см, $y(t)=0$. Зная положения точек в начальный и последующий (близкий) моменты времени, можно указать направление движения точки по траектории. На рис. 6.5 это направление движения указано стрелкой (от точки A к началу координат). После того как в момент $t_2=2$ с колеблющаяся точка достигнет точки D, она будет двигаться в обратном направлении.

Задача 6. Поперечная волна распространяется вдоль упругого шнура со скоростью v=15 м/с. Период T колебаний точек шнура равен 1,2 с, амплитуда A=2 см. Определить:

1) длину волны λ;

2) фазу φ колебаний, смещение ξ, скорость ξ' и ускорение ξ'' точки, отстоящей на расстоянии x=45 м от источника волн в момент t=4 с;

3) разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний двух точек, лежащих на луче и отстоящих от источника волн на расстояниях x_1=20 м и x_2=30 м.

Решение. 1. Длина волны равна расстоянию, которое волна проходит за один период, и может быть найдена из соотношения

$\lambda = vT$.

Подставив значения величин v и T, получим

$\lambda = 18$ м.

2. Запишем уравнение волны:

$$\xi = A \cos \omega (t - x/v), \tag{1}$$

где ξ — смещение колеблющейся точки; x — расстояние точки от источника волн; v — скорость распространения волн.

Фаза колебаний точки с координатой x в момент времени t определяется выражением, стоящим в уравнении волны под знаком косинуса:

$$\varphi = \omega\left(t - \frac{x}{v}\right), \quad \text{или} \quad \varphi = \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right),$$

где учтено, что $\omega = 2\pi/T$.

Произведя вычисления по последней формуле, получим

$\varphi = 5{,}24$ рад, или $\varphi = 300°$.

Смещение точки определим, подставив в уравнение (1) значения амплитуды A и фазы φ:

$$\xi = 1 \text{ см}.$$

Скорость $\dot{\xi}$ точки находим, взяв первую производную от смещения по времени:

$$\dot{\xi} = \frac{d\xi}{dt} = -A\omega \sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) = -\frac{2\pi A}{T}\sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) = \frac{2\pi A}{T}\sin\varphi.$$

Подставив значения величин π, A, T и φ и произведя вычисления, получим

$$\dot{\xi} = 9 \text{ см/с}.$$

Ускорение есть первая производная от скорости по времени, поэтому

$$\ddot{\xi} = \frac{d\dot{\xi}}{dt} = -A\omega^2 \cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) = -\frac{4\pi^2 A}{T^2}\cos\varphi.$$

Произведя вычисления по этой формуле, найдем

$$\ddot{\xi} = 27{,}4 \text{ см/с}^2.$$

3. Разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний двух точек волны связана с расстоянием Δx между этими точками соотношением

$$\Delta\varphi = (2\pi/\lambda)\Delta x = (2\pi/\lambda)(x_2 - x_1).$$

Подставив значения величин λ, x_1 и x_2 и вычислив, получим

$$\Delta\varphi = 3{,}49 \text{ рад}, \quad \text{или} \quad \Delta\varphi = 200^\circ.$$

Задача 7. На расстоянии l=4 м от источника плоской волны частотой ν=440 Гц перпендикулярно ее лучу расположена стена. Определить расстояния от источника волн до точек, в которых будут первые три узла и три пучности стоячей волны, возникшей в результате сложения бегущей и отраженной от стены волн. Скорость v волны считать равной 440 м/с.

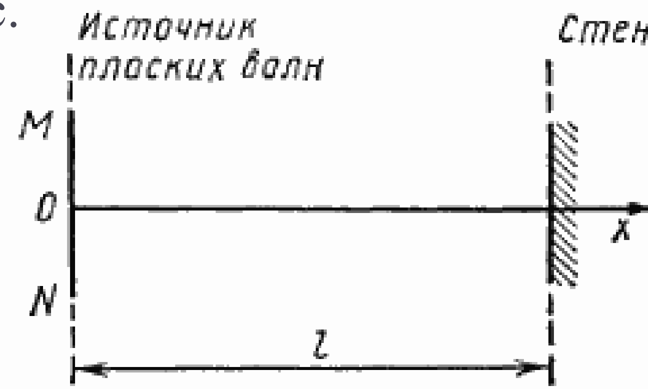


Рис. 7.2

Решение. Выберем систему координат так, чтобы ось x была направлена вдоль луча бегущей волны и начало O координат совпадало с точкой, находящейся на источнике MN плоской волны (рис. 7.2). С учетом этого уравнение бегущей волны запишется в виде

$$\xi_1 = A\cos(\omega t - kx). \tag{1}$$

Поскольку в точку с координатой x волна возвратится, пройдя дважды расстояние $l-x$, и при отражении от стены, как среды более плотной, изменит фазу на π, то уравнение отраженной волны может быть записано в виде

$$\xi_2 = A\cos\{\omega t - k[x + 2(l-x)] + \pi\}.$$

После очевидных упрощений получим

$$\xi_2 = -A\cos[\omega t - k(2l - x)]. \tag{2}$$

Сложив уравнения (1) и (2), найдем уравнение стоячей волны:

$$\xi=\xi_1+\xi_2=A\cos(\omega t-kx)-A\cos[\omega t-k(2l-x)].$$

Воспользовавшись формулой разности косинусов, найдем

$$\xi=-2A\sin k(l-x)\sin(\omega t-kl).$$

Так как выражение $A\sin k(l-x)$ не зависит от времени, то, взятое по модулю, оно может рассматриваться как амплитуда стоячей волны:

$$A_{\text{ст}}=|2A\sin k(l-x)|.$$

Зная выражение амплитуды, можем найти координаты узлов и пучностей.

Узлы возникнут в тех точках, где амплитуда стоячей волны равна нулю: $|2A\sin k(l-x)|=0$. Это равенство выполняется для точек, координаты x_n которых удовлетворяют условию

$$k(l-x_n)=n\pi\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{3}$$

Но $k=2\pi/\lambda$, или, так как $\lambda=v/\nu$,

$$k=2\pi\nu/v. \tag{4}$$

Подставив это выражение k в (3), получим

$$2\pi\nu(l-x_n)=n\pi v,$$

откуда координаты узлов

$$x_n=l-nv/(2\nu).$$

Подставив сюда значения l, v, ν и $n=0$, 1, 2, найдем координаты первых трех узлов:

$$x_0=4\text{ м},\quad x_1=3{,}61\text{ м},\quad x_2=3{,}23\text{ м}.$$

Пучности возникнут в тех точках, где амплитуда стоячей волны максимальна: $2A \sin k(l-x')=2A$. Это равенство выполняется для точек, координаты x'_n которых удовлетворяют условию $k(l-x'_n)=$ $=(2n+1)(\pi/2)$ $(n=0, 1, 2, 3, \ldots)$. Выразив здесь k по (4), получим

$$4\nu x'_n = 4\nu l - (2n+1)\,v,$$

откуда координаты пучностей

$$x'_n = l - (2n+1)\,v/(4\nu).$$

Подставив сюда значения l, v, ν и $n=0, 1, 2$, найдем координаты первых трех пучностей:

$$x'_0 = 3{,}81 \text{ м}, \quad x'_1 = 3{,}42 \text{ м}, \quad x'_2 = 3{,}04 \text{ м}.$$

Границы максимальных смещений точек среды в зависимости от их координат изображены на рис. 7.3. Здесь же отмечены координаты x_0, x_1, x_2, ... узлов и координаты x'_0, x'_1, x'_2, ... пучностей стоячей волны.

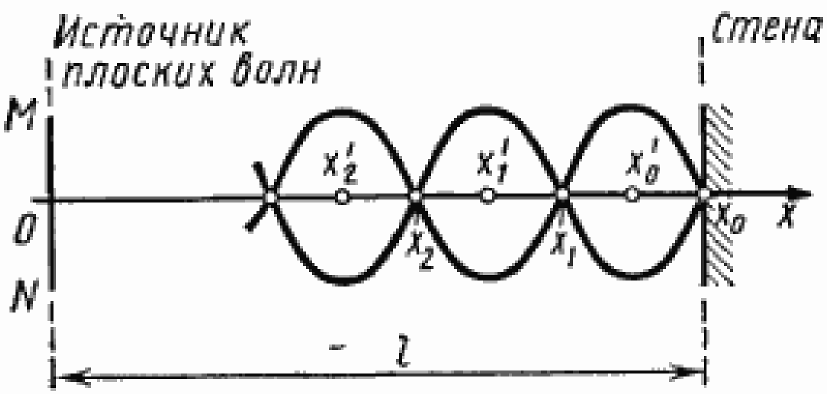


Рис. 7.3

Задача 8. Источник звука частотой ν=18 кГц приближается к неподвижно установленному резонатору, настроенному на акустическую волну длиной λ=1,7 см. С какой скоростью должен двигаться источник звука, чтобы возбуждаемые им звуковые волны вызвали колебания резонатора? Температура Т воздуха равна 290 К.

Решение. Согласно принципу Доплера, частота ν звука, воспринимаемая прибором (резонатором), зависит от скорости $u_{ист}$ источника звука и скорости $u_{пр}$ прибора. Эта зависимость выражается формулой

$$\nu = \frac{v + u_{пр}}{v - u_{ист}} \nu_0, \tag{1}$$

где v — скорость звука в данной среде; ν_0 — частота звуковых волн, излучаемых источником.

Учитывая, что резонатор остается неподвижным ($u_{пр} = 0$), из формулы (1) получим $\nu = \frac{v}{v - u_{ист}} \nu_0$, откуда

$$u_{ист} = v(1 - \nu_0/\nu). \tag{2}$$

В этом выражении неизвестны значения скорости v звука и частоты ν.

Скорость звука в газах зависит от природы газа и температуры и определяется по формуле

$$v = \sqrt{\gamma RT/M}. \tag{3}$$

Чтобы волны, приходящие к резонатору, вызвали его колебания, частота ν воспринимаемых резонатором волн должна совпадать с собственной частотой $\nu_{рез}$ резонатора, т. е.

$$\nu = \nu_{рез} = v/\lambda_{рез}, \tag{4}$$

где $\nu_{рез}$ — длина волны собственных колебаний резонатора.

Подставив выражения v и ν из равенства (3) и (4) в формулу (2), получим

$$u_{ист} = v\left(1 - \frac{\nu_0 \lambda_{рез}}{v}\right) = v - \nu_0 \lambda_{рез}, \quad \text{или}$$

$$u_{ист} = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}} - \nu_0 \lambda_{рез}.$$

Взяв значения $\gamma = 1{,}4$, $M = 0{,}029$ кг/моль, а также значения R, T, ν_0, $\lambda_{рез}$ и подставив их в последнюю формулу, после вычислений получим

$$u_{ист} = 36 \text{ м/с}.$$

Задача 9. По цилиндрической трубе диаметром d=20 см и длиной l=5 м, заполненной сухим воздухом, распространяется звуковая волна средней за период интенсивностью I=50 мВт/м^2. Найти энергию W звукового поля, заключенного в трубе.

- Решение:

$$I = \frac{\Phi}{S} = \frac{W}{tS} = \frac{<w> Sl}{tS} = \frac{<w> l}{t} = <w> v$$

Следовательно, $<w> = \frac{I}{v}$.

$W = <w> V = \frac{I}{v} V,\ V = \frac{\pi d^2}{4} l \Longrightarrow W = \frac{I}{v}\frac{\pi d^2}{4} l.$

$v = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}}$, где M = 28,97 г/моль – молярная масса сухого воздуха,

$\gamma = \frac{i+2}{i}$, R= 8,314 Дж/(моль·К).

Подставляем значения.