Атом водорода по Бору

Атом водорода по Бору

Атом водорода – простейшая атомная система, содержащая 1 электрон.

Водородоподобные ионы содержат 1 электрон: He^{+}; Li^{2+}; Be^{3+}.

Спектр излучения водорода (спектр излучения разряженного газа – спектр излучения отдельных атомов): линейчатый (дискретный) описывается **формулой Бальмера**

$$\nu_{nm} = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

$$\frac{1}{\lambda} = R'\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

$R = 3{,}29\cdot10^{15}$ с$^{-1}$ – постоянная Ридберга,
$m = 1, 2, 3 \ldots,$
$n = (m + 1), (m + 2) \ldots .$

$$R = R' \cdot c.$$

Атом водорода по Бору

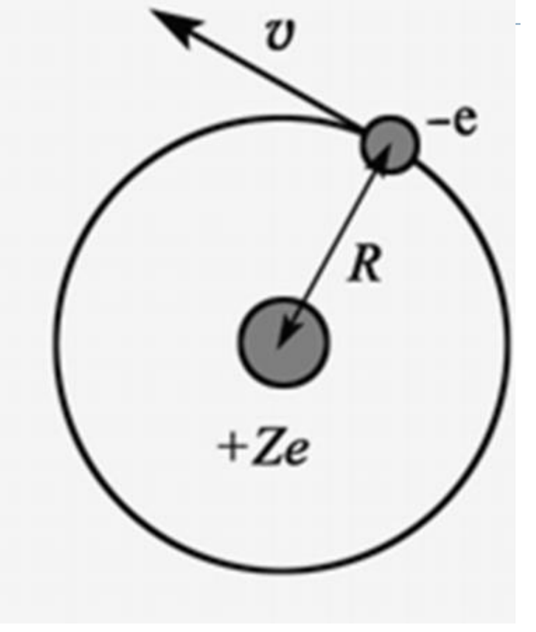
Н. Бор: объяснил ядерную модель атома Резерфорда, линейчатый спектр излучения атома и квантовый характер излучения и поглощения света.

I постулат (постулат стационарных состояний):

В атоме существуют стационарные (не изменяющиеся со временем) состояния, в которых он не излучает энергии; эти состояния характеризуются определенными дискретными значениями энергии.

Стационарным состояниям атома соответствуют стационарные орбиты, по которым движутся электроны. Движение электронов по стационарным орбитам не сопровождается излучением электромагнитных волн.

Атом водорода по Бору



В стационарном состоянии атома электрон, двигаясь по круговой орбите, должен иметь дискретные квантованные значения момента импульса:

$$L_n = \underbrace{m\,\upsilon_n}_{p_n} \cdot r_n = n\hbar,$$

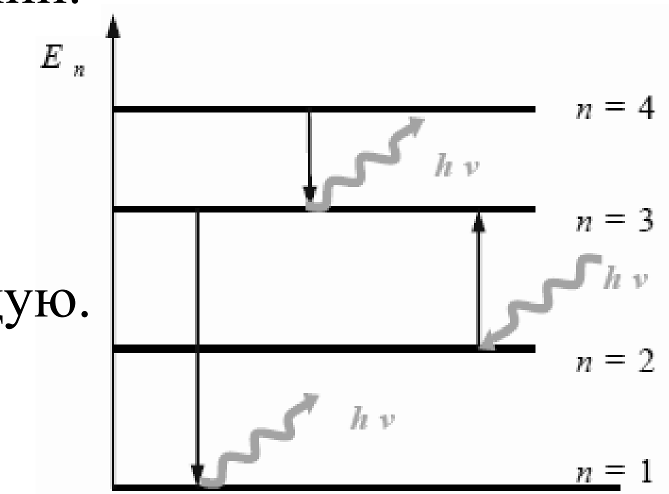
m – масса электрона,
ϑ_n – скорость электрона на n орбите,
r_n – радиус орбиты,
$n = 1, 2, 3 \ldots$ – квантовое число,

Атом водорода по Бору

II постулат (правило частот):
при переходе атома из одного стационарного состояния в другое испускается или поглощается один квант энергии в виде фотона

$$E_n - E_m = h\nu_{nm},$$

E_n, E_m – энергия атома в стационарном состоянии.



Если $E_n > E_m$:

$$\nu_{nm} = \frac{E_n - E_m}{h} -$$

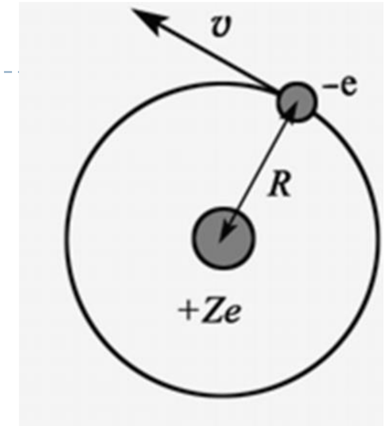
излучение фотона при переходе электрона с более удалённой от ядра орбиты на близлежащую.

Если $E_n < E_m$:

$$\nu_{nm} = -\frac{E_n - E_m}{h} -$$

поглощение фотона при переходе электрона в состояние с большей энергией, т.е. переход электрона на более удалённую от ядра орбиту
Набор дискретных частот ν_{nm} и определяет линейчатый спектр атома водорода.

Задача 1. Найти радиусы круговых стационарных орбит в модели атома Резерфорда, используя постулаты Бора; рассчитать для атома водорода радиус первой орбиты (первый Боровский радиус).



- Решение:

По второму закону Ньютона: $F_K = ma$

$$ma = \frac{m_e v^2}{r_n} \qquad F_K = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n^2} \qquad \Rightarrow \frac{m_e v^2}{r_n} = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n^2}$$

Согласно постулату Бора: $m_e v r_n = n\hbar \quad \Rightarrow v = \dfrac{n\hbar}{m_e r_n}$

$$\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n^2} = \frac{m_e n^2 \hbar^2}{m_e^2 r_n^3} \qquad \boxed{\Rightarrow r_n = \frac{4\pi\varepsilon_0 n^2 \hbar^2}{m_e Z e^2}}$$

Для атома водорода $Z=1$: $r_n = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 n^2 \hbar^2}{m_e e^2} \qquad r_1 = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2}$

- $$r_1 = 5.26 \cdot 10^{-11} \,м = 0.526\,\overset{o}{\mathrm{A}}$$

Задача 2. Найти аналитическое выражение для расчета полной энергии электрона в водородоподобном атоме; зарисовать энергетическую схему; рассчитать постоянную Ридберга.

- Решение: $E = E_k + E_p$

$$E_k = \frac{m_e v^2}{2} \qquad E_p = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad E = \frac{m_e v^2}{2} - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad \Rightarrow E = \frac{Ze^2}{2\cdot 4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{1}{2}\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\boxed{E_n = -\frac{1}{2}\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n}}$$

$$r_n = \frac{4\pi\varepsilon_0 n^2\hbar^2}{m_e Ze^2} \qquad E_n = -\frac{1}{2}\frac{Z^2 m_e e^4}{16\pi^2\varepsilon_0^2 n^2\hbar^2} = -\frac{Z^2 m_e e^4}{8h^2\varepsilon_0^2 n^2}$$

n – главное квантовое число, определяет последовательность энергетических уровней

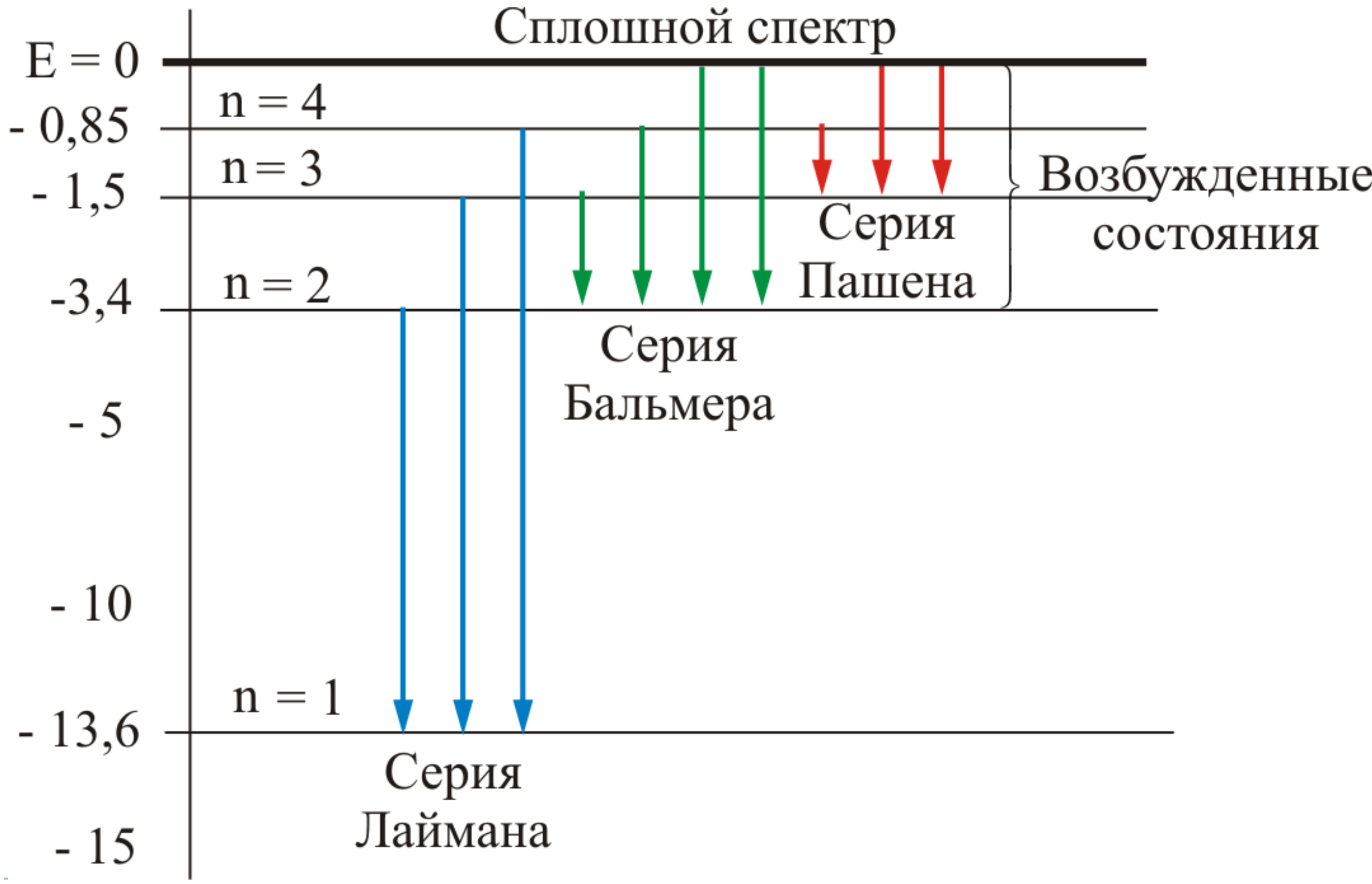
Задача 2. Найти аналитическое выражение для расчета полной энергии электрона в водородоподобном атоме; зарисовать энергетическую схему; рассчитать постоянную Ридберга.

- <u>Решение:</u>

$$h\nu = E_n - E_m = -\frac{m_e e^4}{8h^2\varepsilon_0^2}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$$

$$\nu = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\Rightarrow R = \frac{m_e e^4}{8h^3\varepsilon_0^2}$$



Задача 3. Определить максимальную и минимальную энергии фотона в ультрафиолетовой серии спектра атома водорода (серии Лаймана).

- Решение:

$$\nu = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

m=1 – серия Лаймана.

Минимальная энергия будет при n=2, максимальная энергия будет при $n\to\infty$.

$$\nu_{\min} = R\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}R \qquad E_{\min} = \frac{3}{4}Rh \qquad E_{\min} = 10.2 \text{ эВ}$$

$$\nu_{\max} = R(1 - 0) = R \qquad E_{\max} = Rh \qquad E_{\max} = 13.6 \text{ эВ}$$

Задача 4. Определить длину волны, соответствующей границе серии Бальмера.

- Решение:

$$\nu = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

m=2 – серия Бальмера.

Граница серии – при $n \to \infty$.

$$\nu = R\left(\frac{1}{4} - 0\right) = \frac{1}{4}R$$

$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{4c}{R}$$

$$\lambda = 365\,нм$$

Задача 5. Используя теорию Бора, определить орбитальный магнитный момент электрона, движущегося по второй орбите атома водорода.

- Решение:

Магнитный момент контура с током: $p_m = I \cdot S$ $\quad S = \pi r_n^2$

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{e}{T} = e\nu$$

$$T = \frac{2\pi r_n}{v} \Rightarrow \nu = \frac{v}{2\pi r_n}$$

$$p_m = \frac{e \cdot v}{2\pi r_n} \cdot 2\pi r_n^2 = \frac{e \cdot v \cdot r_n}{2}$$

$$r_n = \frac{4\pi\varepsilon_0 n^2 \hbar^2}{m_e Z e^2}$$

$$m_e v r_n = n\hbar \quad \Rightarrow v r_n = \frac{n\hbar}{m_e}$$

$$p_m = \frac{e \cdot n \cdot \hbar}{2m_e}$$

$$p_m = \frac{e}{2m_e} L_e$$

Задача 6. Используя теорию Бора, определить изменение орбитального механического момента электрона при переходе его из возбужденного состояния в основное с испусканием фотона с длиной волны $1.212 \cdot 10^{7}$ м.

- Решение:

$$L = m_e v r_n = n\hbar$$

$$\Delta L = (n - m)\hbar$$

$$\nu = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) \qquad \lambda = \frac{c}{\nu}$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{R}{c}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) = R'\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\frac{1}{\lambda R'} = \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) \Rightarrow \frac{1}{n^2} = \frac{1}{m^2} - \frac{1}{\lambda R'}$$

$$n = \sqrt{\frac{m^2 \lambda R'}{\lambda R' - m^2}}$$

$$\Delta L = \left(\sqrt{\frac{m^2 \lambda R'}{\lambda R' - m^2}} - m\right)\hbar = m\hbar\left(\sqrt{\frac{\lambda R'}{\lambda R' - m^2}} - 1\right)$$

Т.к. электрон переходит из основного состояния, то m=1.

$$\Delta L = 1.05 \cdot 10^{-34}\ Дж \cdot c$$

Задача 7. Определить потенциал ионизации и первый потенциал возбуждения атома водорода.

- Решение:

Ионизация – переход из n-го состояния в свободное ($E_{max}=E_\infty=0$).

$$\Delta E = E_{max} - E_1 = -E_1$$

$$E_n = -\frac{Z^2 m_e e^4}{8h^2\varepsilon_0^2 n^2}$$

Для атома водорода $E_1 = -\dfrac{m_e e^4}{8h^2\varepsilon_0^2}$

$$R = \frac{m_e e^4}{8h^3\varepsilon_0^2}$$

$$E_1 = -Rh \qquad \Rightarrow \Delta E = Rh$$

$$\varphi_0 = \frac{\Delta E}{e} = \frac{Rh}{e} = \frac{m_e e^3}{8h^2\varepsilon_o^2}$$

$$\varphi_0 = 13.6 эВ$$

Первый потенциал возбуждения:

$$\varphi_1 = \frac{\Delta E_B}{e} \qquad \Delta E_B = E_2 - E_1$$

$$E_n = -\frac{Rh}{n^2} \quad \Rightarrow \Delta E_B = -Rh\left(\frac{1}{2^2} - 1\right) = \frac{3}{4}Rh$$

$$\varphi_1 = \frac{3}{4}\frac{Rh}{e} = \frac{3}{4}\varphi_0$$

$$\varphi_1 = 10.2 эВ$$

Задача 8. В спектре иона гелия есть линия, длина волны которой совпадает с длиной волны головной линии серии Бальмера в спектре водорода. Какому переходу электрона в ионе гелия соответствует эта линия?

- Решение:

$$\frac{1}{\lambda} = Z^2 R' \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

Головная линия серии Бальмера - наиболее длинноволновая => m=2, n=3.

$$\frac{1}{\lambda_1} = 2^2 R' \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) = R' \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) = \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{36} \right)$$

$$\Rightarrow m = 4, m = 6$$

Задача 9. На дифракционную решетку нормально падает пучок света от разрядной трубки, наполненной атомарным водородом. Постоянная решетки d=5 мкм. Какому переходу электрона соответствует спектральная линия, наблюдаемая при помощи этой решетки в спектре пятого порядка под углом 41°?

- <u>Решение:</u> Определим длину волны наблюдаемой линии.

$$\lambda = \frac{d\sin\varphi}{m}$$

$$\lambda = 6.561\cdot 10^{-7}\,м$$

Полученная длина волны лежит в видимой области спектра, следовательно, относится к серии Бальмера, m=2.

$$\frac{1}{\lambda} = R'\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\Rightarrow n = \sqrt{\frac{m^2 R'\lambda}{R'\lambda - m^2}}$$

$$n = 3$$

Задача 10. Вычислить постоянную Ридберга, если известно, что для ионов гелия разность длин волн между головными линиями серий Бальмера и Лаймана Δλ=133,7 нм.

- Решение: Напишем соотношения, определяющие длины волн головных линий для ионов He II:

серии Бальмера
$$\frac{1}{\lambda_1} = 4R'\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right)$$

серии Лаймана
$$\frac{1}{\lambda_2} = 4R'\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)$$

$$\frac{1}{\lambda_1} = \frac{5}{9}R'$$

$$\frac{1}{\lambda_2} = 3R'$$

$$\Rightarrow \Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 = \frac{9}{5}R' - \frac{1}{3}R' = \frac{22}{15}R'$$

$$R' = \frac{22}{15 \cdot \Delta\lambda}$$

$$R' = 1.097 \cdot 10^7 \, м^{-1}$$

$$R = R' \cdot c$$