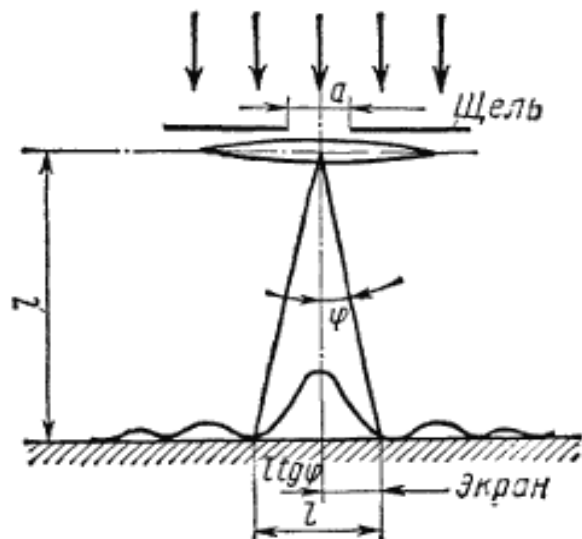


Дифракция света

Задача 8. На щель шириной $a=0,1$ мм нормально падает параллельный пучок света от монохроматического источника ($\lambda=0,6$ мкм). Определить ширину l центрального максимума в дифракционной картине, проецируемой с помощью линзы, находящейся непосредственно за щелью, на экран, отстоящий от линзы на расстоянии $L=1$ м.



Центральный максимум интенсивности света занимает область между ближайшими от него справа и слева минимумами интенсивности. Поэтому ширину центрального максимума интенсивности примем равной расстоянию между этими двумя минимумами интенсивности.

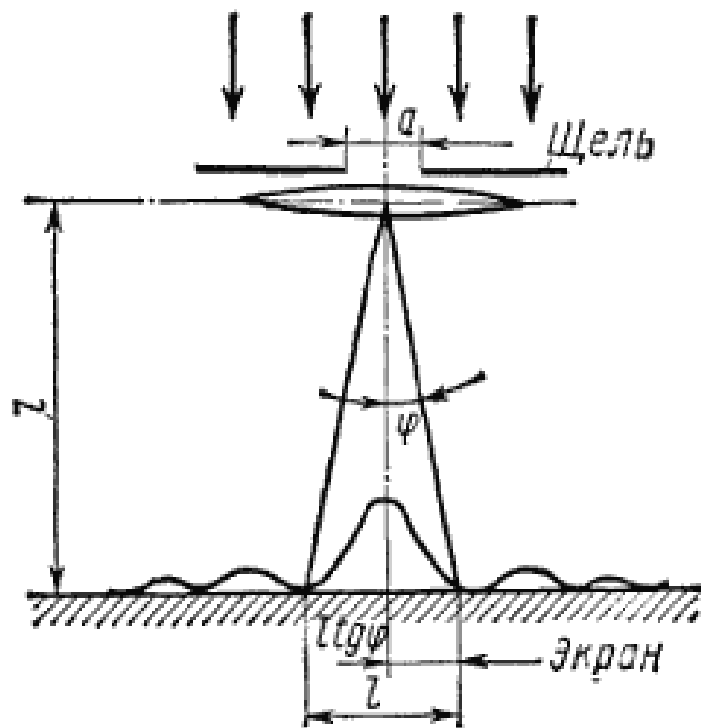
Минимумы интенсивности света при дифракции от одной щели наблюдаются под

$$a \sin \varphi = \pm k\lambda,$$

где k — порядок минимума; в нашем случае равен единице.



Задача 8. На щель шириной $a=0,1$ мм нормально падает параллельный пучок света от монохроматического источника ($\lambda=0,6$ мкм). Определить ширину l центрального максимума в дифракционной картине, проецируемой с помощью линзы, находящейся непосредственно за щелью, на экран, отстоящий от линзы на расстоянии $L=1$ м.



Расстояние между двумя минимумами на экране определим непосредственно по чертежу: $l=2L \operatorname{tg} \varphi$.

Заметив, что при малых углах $\operatorname{tg} \varphi \approx \sin \varphi$, перепишем эту формулу в виде:

$$l=2L \sin \varphi.$$

Выразим $\sin \varphi$ из условия минимума интерференции и подставим его сюда, получим:

$$l=2Lk\lambda/a.$$

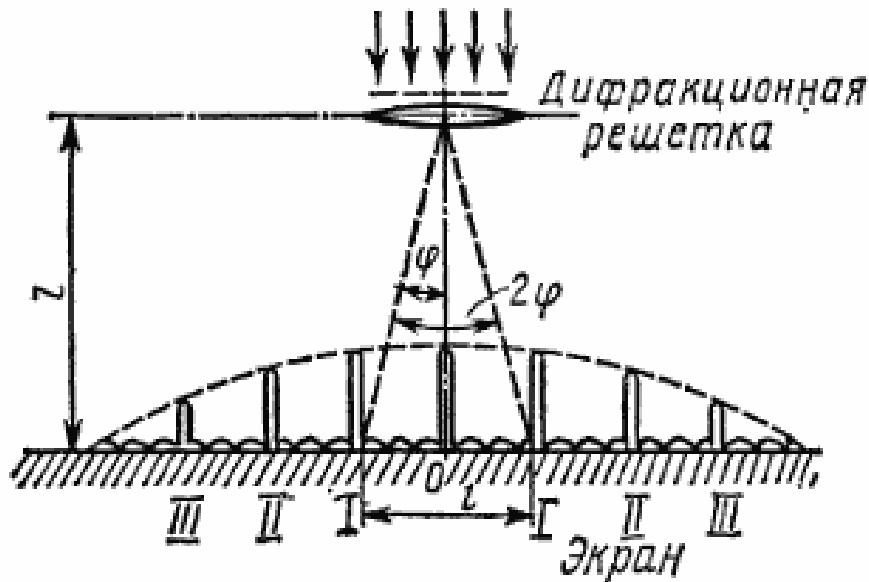
Произведя вычисления, получим:

$$l=1,2 \text{ см.}$$

Задача 9. На дифракционную решетку нормально к ее поверхности падает параллельный пучок света с длиной волны $\lambda=0,5$ мкм. Помещенная вблизи решетки линза проецирует дифракционную картину на плоский экран, удаленный от линзы на $L=1$ м. Расстояние l между двумя максимумами интенсивности первого порядка, наблюдаемыми на экране, равно 20,2 см.

Определить:

- 1) постоянную d дифракционной решетки;
- 2) число n штрихов на 1 см;
- 3) число максимумов, которое при этом дает дифракционная решетка;
- 4) максимальный угол φ_{\max} отклонения лучей, соответствующих последнему дифракционному максимуму.



Постоянная в дифракционной решетке, длина волны λ и угол φ отклонения лучей, соответствующий k -му дифракционному максимуму, связаны соотношением

$$d \sin \varphi = k \lambda,$$

где k – порядок спектра, или в случае монохроматического света порядок максимума.

В данном случае $k=1$, $\sin\varphi=\text{tg}\varphi$ (ввиду того, что $l/2\ll L$), $\text{tg}\varphi=l/2L$. С учетом последних трех равенств, получаем:

$$d \frac{l}{2L} = \lambda,$$

откуда постоянная решетки: $d = \frac{2L\lambda}{l}$.

Подставляя данные, получим: $d = 4.95$ мкм.

Число штрихов на 1 см найдем из формулы $n = \frac{1\text{см}}{d} = 2.02 \cdot 10^3$

Для определения числа максимумов, даваемых дифракционной решеткой, вычислим сначала максимальное значение k_{max} , исходя из того, что максимальный угол отклонения лучей решеткой не может превышать 90° .

$$k_{\text{max}} = \frac{d}{\lambda} \sin \varphi$$

Подставляя сюда значения величин, получим $k_{\text{max}} = 9.9$.

Число k обязательно должно быть целым. В то же время, оно не может принять значение, равное 10, так как при этом значение $\sin\varphi$ должен быть больше 1, что невозможно. Следовательно, $k_{\text{max}} = 9$.



Определим общее число максимумов дифракционной картины, полученной посредством дифракционной решетки. Влево и вправо от центрального максимума будет наблюдаться по одинаковому числу максимумов, равному k_{\max} , т.е. всего $2k_{\max}$. Если учесть также центральный нулевой максимум, получим общее число максимумов

$$N=2k_{\max}+1.$$

Подставляя значение k_{\max} , найдем $N=19$.

Для определения максимального угла отклонения лучей, соответствующего последнему дифракционному максимуму, выразим синус этого угла:

$$\sin\varphi_{\max} = k_{\max}\lambda/d.$$

Отсюда

$$\varphi_{\max} = \arcsin(k_{\max}\lambda/d).$$

Подставив сюда значения величин λ , d , k_{\max} и произведя вычисления, получим

$$\varphi_{\max} = 65.4^\circ.$$



Задача 10. Дифракционная картина получена с помощью дифракционной решетки длиной $l=1,5$ см и периодом $d=5$ мкм. Определить, в спектре какого наименьшего порядка этой картины получатся отдельные изображения двух спектральных линий с разностью длин волн $\Delta\lambda=0,1$ нм, если линии лежат в крайней красной части спектра ($\lambda\approx 760$ нм).

Разрешающая способность дифракционной решетки

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = kN = k \frac{l}{d}$$

Тогда

$$k = \frac{\lambda d}{\Delta\lambda l}$$

$$k = \frac{760 \cdot 10^{-9} \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{0,1 \cdot 10^{-9} \cdot 1,5 \cdot 10^{-2}} \approx 3$$



Задача 11. Угловая дисперсия D_φ дифракционной решетки для излучения некоторой длины волны (при малых углах дифракции) составляет 5 мин/нм. Определить разрешающую силу R этой решетки для излучения той же длины волны, если длина l решетки равна 2 см.

Угловая дисперсия

$$D_\varphi = \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{k}{d \cos \varphi}.$$

Выразим $k = D_\varphi d \cos \varphi$.

Разрешающая сила дифракционной решетки

$$R = \frac{\lambda}{d\lambda} = kN = k \frac{l}{d} = D_\varphi l \cos \varphi.$$

Поскольку угол дифракции φ мал, то $\cos \varphi \approx 1$. Тогда

$$R = D_\varphi l.$$

Посчитаем:

$$R = \frac{5 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 2\pi}{60 \cdot 10^{-9} \cdot 360} = 2.9 \cdot 10^5.$$



Задача 12. Изобразить примерную дифракционную картину, возникающую при дифракции Фраунгофера от решетки из трех одинаковых щелей, если отношение периода решетки к ширине щели равно трем.

Главные максимумы наблюдаются под углами дифракции:

$$d \sin \varphi = k\lambda$$

Главные минимумы наблюдаются под углами дифракции:

$$b \sin \varphi = k\lambda$$

Дополнительные минимумы наблюдаются под углами:

$$d \sin \varphi = k' \frac{\lambda}{N}$$

Между главными максимумами расположены $(N-1)$ минимумов.

В данном случае $(N-1) = 2$ дополнительных минимума.

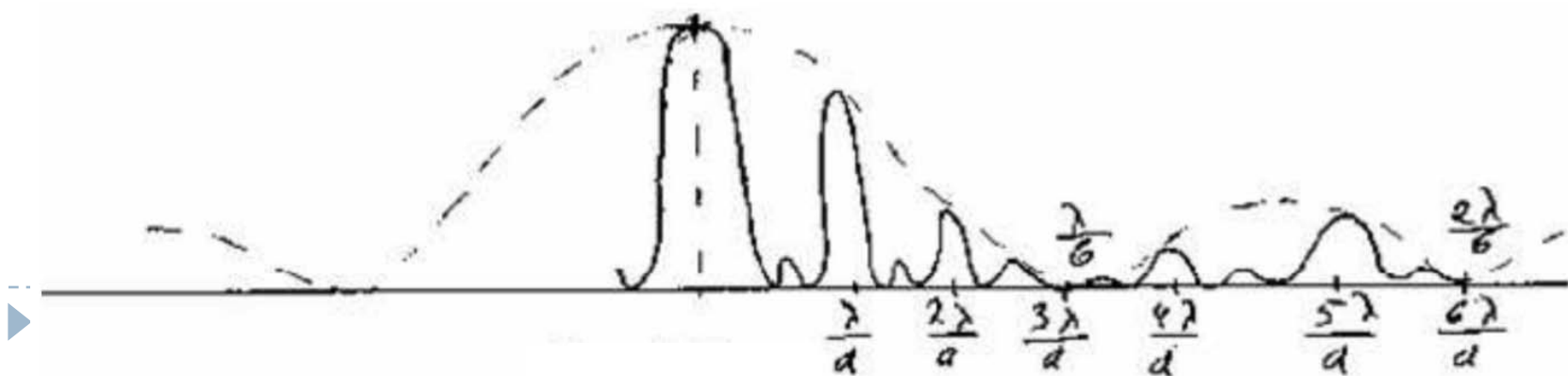
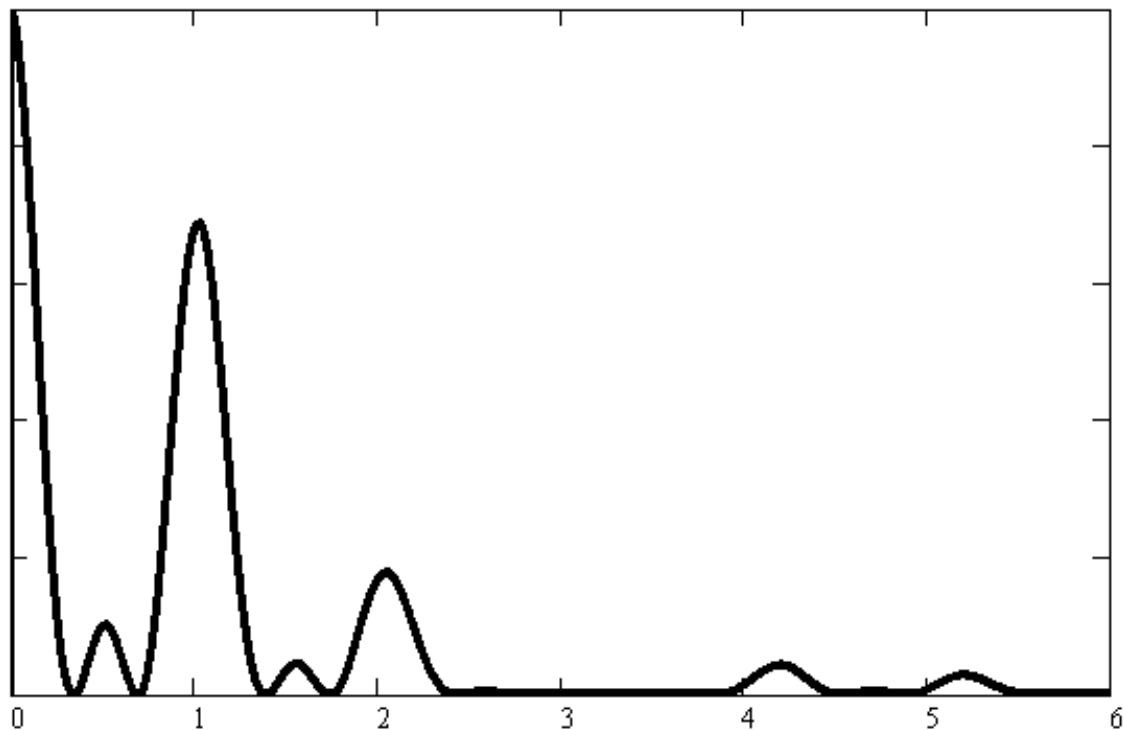
Т.к. $d/b = 3$, следовательно: $3b \sin \varphi = k\lambda$

$$b \sin \varphi = \frac{k}{3} \lambda$$

Когда k кратно трем, соответствующий максимум совпадает с условием минимума и наблюдаться не будет. Т.е. пропадет 3-ий, 6-ой, 9-ый и т.д.

▶ максимумы.

Задача 12. Изобразить примерную дифракционную картину, возникающую при дифракции Фраунгофера от решетки из трех одинаковых щелей, если отношение периода решетки к ширине щели равно трем.



Задача 13. Свет с $\lambda = 600$ нм падает нормально на дифракционную решетку с периодом $d = 0,3$ мкм, содержащую $N = 20000$ штрихов. Найти угловую ширину максимума второго порядка.

Запишем условие двух минимумов, ближайших к максимуму m -го порядка:

$$d \sin \varphi_1 = m\lambda - \frac{\lambda}{N}, \quad d \sin \varphi_2 = m\lambda + \frac{\lambda}{N}.$$

Из этих соотношений получим:

$$d(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) = \frac{2\lambda}{N}; \quad 2 \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} = \frac{2\lambda}{Nd}.$$

При большом N величина $\delta\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1)$ мала, и $\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \varphi$

($\delta\varphi$ есть угловая ширина максимума m -го порядка; φ - угол дифракции, под которым наблюдается максимум m -го порядка);

$\delta\varphi \cos \varphi_1 = \frac{2\lambda}{dN}$, откуда, учитывая $d \sin \varphi = m\lambda$, получим:

$$\delta\varphi = \frac{2\lambda}{dN \sqrt{1 - \frac{4\lambda^2}{d^2}}} = \frac{1}{N \sqrt{\left(\frac{d}{2\lambda}\right)^2 - 1}} = 1,1 \times 10^{-5}$$

Задача 14. Свет падает нормально на дифракционную решетку ширины $l=5.6\text{см}$, имеющую 200 штрихов на миллиметр. Исследуемый спектр содержит спектральную линию с $\lambda = 670.8\text{ нм}$, которая состоит из двух компонент, отличающихся на $\delta\lambda = 0.015\text{ нм}$. Найти: а) в каком порядке спектра эти компоненты будут разрешены; б) наименьшую разность длин волн, которую может разрешить эта решетка в области $\lambda = 670.8\text{ нм}$.

Разрешающая способность решетки: $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN$.

Число щелей $N = l \cdot n$, где n - число щелей на единицу длины. Подставив числа, получим:

$$m = \frac{\lambda}{n\delta\lambda} = \frac{670,8}{0,015 \cdot 65 \cdot 200} = 3,44.$$

Компоненты будут разрешены, начиная с четвертого порядка: $m = 4$.



Задача 14. Свет падает нормально на дифракционную решетку ширины $l=5.6\text{см}$, имеющую 200 штрихов на миллиметр. Исследуемый спектр содержит спектральную линию с $\lambda = 670.8\text{ нм}$, которая состоит из двух компонент, отличающихся на $\delta\lambda = 0.015\text{ нм}$. Найти: а) в каком порядке спектра эти компоненты будут разрешены; б) наименьшую разность длин волн, которую может разрешить эта решетка в области $\lambda = 670.8\text{ нм}$.

Чтобы найти наименьшую $\delta\lambda_{\min}$, разрешаемую решеткой, нужно знать максимальный порядок спектра, даваемый решеткой для указанной λ . Найдем m_{\max} из условия, что максимальный угол дифракции не может быть больше, чем $\pi/2$.

$$d = m\lambda, \quad m = \frac{d}{\lambda} = \frac{10^4}{200 \cdot 6,70} = 7,46$$

(Здесь учтено, что $d = 1/n$).

Восьмой порядок для данной λ наблюдаться не будет, $m_{\max} = 7$;

$$\delta\lambda_{\min} = \frac{\lambda}{m_{\max} N} = \frac{\lambda}{m_{\max} nl} = 7,37 \cdot 10^{-3} \text{ нм}$$