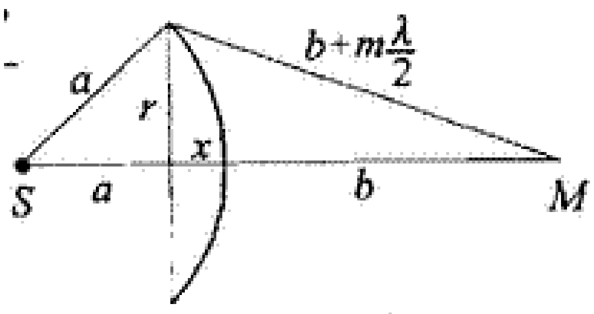
Дифракция света

Задача 1. Точечный источник S света (λ=0,5мкм), плоская диафрагма с круглым отверстием радиусом r=1 мм и экран расположены последовательно друг за другом, источник S лежит на прямой, проходящей через центр диафрагмы (a=1 м). Определить расстояние b от экрана до диафрагмы, при котором отверстие открывало бы для точки P три зоны Френеля. Как изменится интенсивность в центре экрана, если убрать диафрагму?



Расстояние от внешнего края m-ой зоны Френеля до точки наблюдения P составляет

$$b_m = b + m\frac{\lambda}{2}.$$

b – расстояние от фронта плоской волны до точки P, λ – длина световой волны.

Как следует из рисунка:

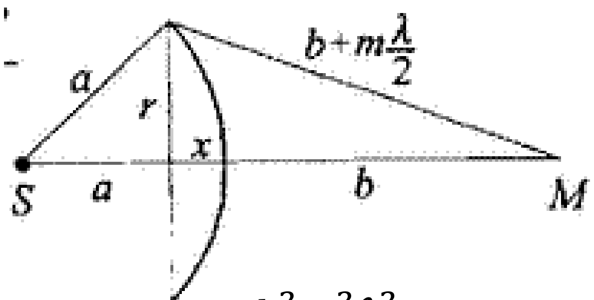
$$r^2 = a^2 - (a-x)^2 = (b + m\frac{\lambda}{2})^2 - (b+x)^2$$

$$a^2 - a^2 + 2ax - x^2 = b^2 + bm\lambda + m^2\frac{\lambda^2}{4} - b^2 - 2xb - x^2$$

Поскольку $\lambda \ll a$, $\lambda \ll b$, следовательно можем пренебречь слагаемым $m^2\lambda^2/4$. Тогда получим:

$$2x(a+b) = bm\lambda$$

Задача 1. Точечный источник S света (λ=0,5мкм), плоская диафрагма с круглым отверстием радиусом r=1 мм и экран расположены последовательно друг за другом, источник S лежит на прямой, проходящей через центр диафрагмы (a=1 м). Определить расстояние b от экрана до диафрагмы, при котором отверстие открывало бы для точки P три зоны Френеля. Как изменится интенсивность в центре экрана, если убрать диафрагму?



Получаем, что $x = \frac{bm\lambda}{2(a+b)}$

Тогда

$$r^2 = 2ax - x^2 = \frac{2abm\lambda}{2(a+b)} - \frac{b^2m^2\lambda^2}{4(a+b)^2}$$

Слагаемым $\frac{b^2m^2\lambda^2}{4(a+b)^2}$ можно пренебречь, поскольку оно мало.

Получаем:

$$r^2 = \frac{abm\lambda}{(a+b)}$$

Выразим b:

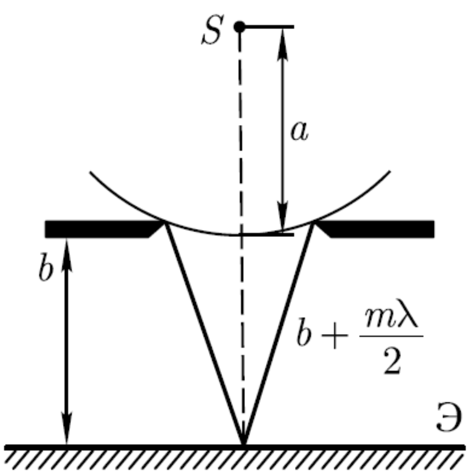
$$b = \frac{r^2a}{(am\lambda - r^2)}, b = \frac{1 \cdot 10^{-6} \cdot 1}{1 \cdot 3 \cdot 0.5 \cdot 10^{-6} - 1 \cdot 10^{-6}} = 2 \text{ м.}$$

Без диафрагмы: $A_0 = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 \dots \pm A_m = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2}\right) + \cdots = \frac{A_1}{2}$

С диафрагмой: $A'_0 = A_1 - A_2 + A_3 \approx A_1$.

Следовательно, если убрать экран, то интенсивность уменьшится в 4 раза.

Задача 2. Дифракция наблюдается на расстоянии 1.2 м от точечного источника монохроматического света. Посередине между источником света и экраном находится диафрагма с круглым отверстием. Определите длину волны падающего света, если диаметр отверстия, при котором центр дифракционных колец на экране является наиболее темным, равен 1.2 мм.



Если отверстие диафрагмы открывает m зон Френеля, то радиус m-ой зоны Френеля есть не что иное, как радиус отверстия:

$$r^2 = \frac{abm\lambda}{(a+b)} \quad \Rightarrow r = \sqrt{\frac{abm\lambda}{(a+b)}}$$

где m - номер зоны Френеля; λ - длина волны; a и b - соответственно расстояния от диафрагмы с круглым отверстием до точечного источника и до экрана, на котором наблюдается дифракционная картина.

Центр дифракционных колец, наблюдаемых на экране, будет наиболее темным, если отверстие открывает две зоны Френеля, т.е. m=2.

Следовательно, радиус отверстия:

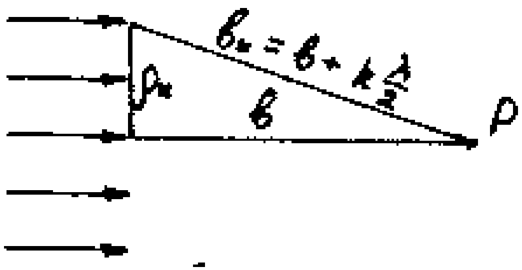
$$r = \sqrt{\frac{2ab\lambda}{(a+b)}}$$

Учитывая, что $r = d/2$, искомая длина волны:

$$\lambda = \frac{r^2(a+b)}{ab} = \frac{d^2(a+b)}{4abm}$$

- λ = 600 нм.

Задача 3. Радиус ρ_4 четвертой зоны Френеля для плоского волнового фронта равен 3 мм. Определить радиус ρ_6 шестой зоны Френеля.



- Расстояние от внешнего края k-ой зоны Френеля до точки наблюдения P составляет

$$b_k = b + k\frac{\lambda}{2}.$$

b – расстояние от фронта плоской волны до точки P, λ – длина световой волны.

Как следует из рисунка: $\rho_k^2 + b^2 = (b + k\frac{\lambda}{2})^2$

Раскрывая скобки и приводя подобные получаем:

$$\rho_k^2 + b^2 = b^2 + bk\lambda + k^2\frac{\lambda^2}{4}$$

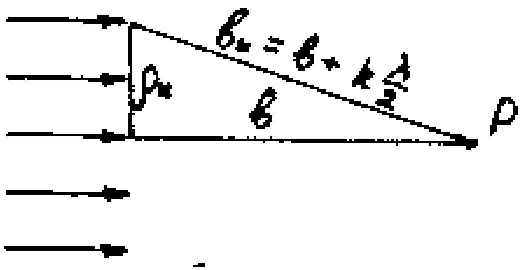
$$\rho_k^2 = bk\lambda + k^2\frac{\lambda^2}{4}$$

Слагаемым $k^2\frac{\lambda^2}{4}$ можно пренебречь. Поэтому $\rho_k^2 = bk\lambda$.

Отсюда определяем радиус k-ой зоны Френеля для плоского волнового фронта:

$$\rho_k = \sqrt{bk\lambda}$$

Задача 3. Радиус ρ_4 четвертой зоны Френеля для плоского волнового фронта равен 3 мм. Определить радиус ρ_6 шестой зоны Френеля.



При k=4 получаем радиус четвертой зоны Френеля:

$$\rho_4 = \sqrt{4b\lambda}$$

При k=6 получаем радиус шестой зоны Френеля:

$$\rho_6 = \sqrt{6b\lambda}$$

Поделив почленно два последних равенства, получаем:

$$\frac{\rho_6}{\rho_4} = \sqrt{\frac{6b\lambda}{4b\lambda}} = \sqrt{\frac{6}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Отсюда: $\rho_6 = \sqrt{\frac{3}{2}}\rho_4$

Проведем вычисления:

$$\rho_6 = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot 3\text{мм} = 3.67 \text{ мм}.$$

Задача 4. На диафрагму с круглым отверстием диаметром d=4 мм падает нормально параллельный пучок лучей монохроматического света (λ=0,5 мкм). Точка наблюдения находится на оси отверстия на расстоянии b=1 м от него. Сколько зон Френеля укладывается в отверстии? Темное или светлое пятно получится в центре дифракционной картины, если в месте наблюдений поместить экран?

Радиус k-ой зоны Френеля для плоского волнового фронта:

$$\rho_k = \sqrt{bk\lambda} = \frac{d}{2}$$

Тогда найдем число зон, укладывающихся в отверстии:

$$d^2 = 4bk\lambda$$

$$k = \frac{d^2}{4b\lambda}$$

Посчитаем:

$$k = \frac{4^2 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 1 \cdot 0.5 \cdot 10^{-6}} = 8$$

Т.к. число k=8 – четное, то пятно в центре дифракционной картины будет темное.

Задача 4. На диафрагму с круглым отверстием диаметром d=4 мм падает нормально параллельный пучок лучей монохроматического света (λ=0,5 мкм). Точка наблюдения находится на оси отверстия на расстоянии b=1 м от него. Сколько зон Френеля укладывается в отверстии? Темное или светлое пятно получится в центре дифракционной картины, если в месте наблюдений поместить экран?

Будет ли в центре дифракционной картины наблюдаться темное или светлое пятно, определяется числом зон Френеля, открываемых отверстием. Пусть отверстие открывает k зон Френеля. Радиус k-ой зоны Френеля:

$$\rho_k = \sqrt{\frac{ab}{(a+b)}k\lambda} = \sqrt{\frac{b}{(1+b/a)}k\lambda}$$

По условию задачи пучок падающего на диафрагму света параллельный, следовательно, $a = \infty$.

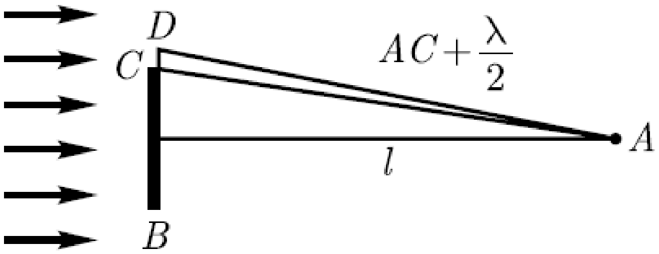
Тогда: $\rho_k = \sqrt{bk\lambda} = d/2$

Число зон, укладывающихся в отверстии: $k = \dfrac{d^2}{4b\lambda}$

$$k = \frac{4^2 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 1 \cdot 0.5 \cdot 10^{-6}} = 8$$

Т.к. число k=8 – четное, то пятно в центре дифракционной картины будет темное.

Задача 5. На пути параллельного пучка монохроматического света (λ=500 нм) находится круглый диск диаметром 3 мм. Наблюдение производится в точке, лежащей на линии, соединяющей точку с центром диска, и отстоящей от экрана на расстоянии 1 м. Определите ширину зоны Френеля, непосредственно прилегающей к экрану.



Диск *BC* закрывает часть плоского фронта волны. *CD* = *x* – ширина первой открытой зоны Френеля.

Дифрагирующие лучи *AD* и *AC* имеют разность хода $\lambda/2$. Из рисунка видим, что:

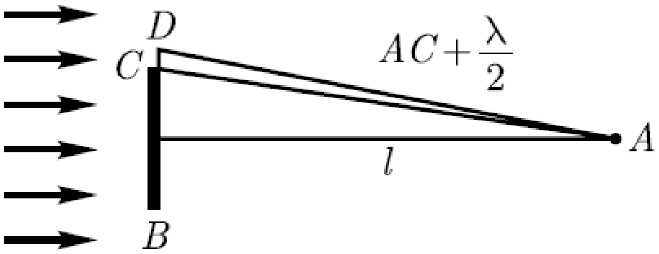
$$\left(\frac{d}{2}+x\right)^2+l^2=\left(AC+\frac{\lambda}{2}\right)^2 \qquad AC=\sqrt{l^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

Тогда: $$\left(\frac{d}{2}+x\right)^2+l^2=\left(\sqrt{l^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2}+\frac{\lambda}{2}\right)^2$$

$$x^2+xd+\frac{d^2}{4}+l^2=l^2+\frac{d^2}{4}+\lambda\sqrt{l^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2}+\frac{\lambda^2}{4} \qquad x^2+xd=\lambda\sqrt{l^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2}+\frac{\lambda^2}{4}$$

Слагаемыми $d^2/4$ и $\lambda^2/4$ можно пренебречь. $$x^2+xd-l\lambda=0$$

Задача 5. На пути параллельного пучка монохроматического света (λ=500 нм) находится круглый диск диаметром 3 мм. Наблюдение производится в точке, лежащей на линии, соединяющей точку с центром диска, и отстоящей от экрана на расстоянии 1 м. Определите ширину зоны Френеля, непосредственно прилегающей к экрану.



$$x^2 + xd - l\lambda = 0$$

Решив это уравнение, получим искомую ширину зоны Френеля, непосредственно прилегающей к экрану:

$$x = -\frac{d}{2} + \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + l\lambda}$$

Учитываем только положительное решение, имеющее физическое значение.

x = 0.173 мм.

Задача 6. Плоская монохроматическая световая волна падает нормально на круглое отверстие. На расстоянии b = 9,0 м от него находится экран, где наблюдают некоторую дифракционную картину. Диаметр отверстия уменьшили в η = 3,0 раза. Найти новое расстояние b', на котором надо поместить экран, чтобы получить на нем дифракционную картину, подобную той, что в предыдущем случае, но уменьшенную в η раз.

Радиус k-ой зоны Френеля для плоского волнового фронта:

$$r_k = \sqrt{bk\lambda}$$

$$\frac{d}{d'} = \frac{r_k}{r'_k} = \frac{\sqrt{bk\lambda}}{\sqrt{b'k\lambda}} = \sqrt{\frac{b}{b'}} = \eta \qquad \Rightarrow \frac{b}{b'} = \eta^2$$

$$b' = \frac{b}{\eta^2}$$

b' = 1 м.

Задача 7. Между точечным источником света и экраном поместили диафрагму с круглым отверстием, радиус которого r можно менять в процессе опыта. Расстояния от диафрагмы до источника и экрана равны a=100 см и b=125 см. Определить длину волны света, если максимум освещенности в центре дифракционной картины на экране наблюдается при $r_1 = 1{,}00$ мм и следующий максимум при $r_2 = 1{,}29$ мм.

Будет ли в центре дифракционной картины наблюдаться темное или светлое пятно, определяется числом зон Френеля, открываемых отверстием. Пусть отверстие открывает k зон Френеля. Радиус k-ой зоны Френеля:

$$r_k = \sqrt{\frac{ab}{(a+b)}k\lambda}$$

Максимумы наблюдаются лишь тогда, когда k – нечётное.

$$r_1 = \sqrt{\frac{ab}{(a+b)}k\lambda} \qquad \Rightarrow \frac{k}{k+2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \qquad \lambda = \frac{(a+b)r_1^2}{kab}$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{ab}{(a+b)}(k+2)\lambda} \qquad \frac{k}{k+2} = 0.6 = \frac{3}{5} \qquad \lambda = 0.6\ \text{мкм}.$$

$$k = 3$$