

Законы постоянного тока.

- ▶ Электрический ток – упорядоченное (направленное) движение электрических зарядов.

За **направление** тока условно принято направление движения положительных зарядов.

Сила тока – количественная мера (характеристика) электрического тока.

$$I = \frac{dq}{dt} \text{ – сила тока численно равна заряду, проходящему через поперечное сечение проводника за единицу времени.}$$

В СИ: $[1\text{А} = 1\text{Кл} / 1\text{с}]$.

Для постоянного тока:

$$I = \frac{q}{t}$$

- ▶ Вектор **плотности тока** вводится для характеристики распределения заряда по сечению проводника.

$$j = \frac{dq}{dS_n dt} = \frac{dI}{dS_n}$$

Плотность тока численно равна заряду, проходящему через единичную площадку dS_n , расположенную перпендикулярно направлению тока, за единицу времени.

▶ Связь между силой тока и плотностью тока: $I = \oint_S (\vec{j} d\vec{S})$

▶ Уравнение непрерывности в интегральной форме:

$$I = -\frac{dq}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

Знак минус в уравнении означает то, что заряды уходят из объема V .

Дифференциальная форма записи уравнения непрерывности (закон сохранения заряда).

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Знак минус в уравнении означает, что в точках, которые являются источниками тока (j), происходит убывание заряда.

Уравнение непрерывности в случае постоянного тока (стационарный ток):

$$\oint_S \vec{j} d\vec{S} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0$$

► **Закон Ома для однородного участка цепи:**

Однородным называется участок цепи, не содержащий источника Э.Д.С.

$$I = \frac{U}{R}.$$

Закон Ома в интегральной форме: сила тока прямо пропорциональна падению напряжения на однородном участке цепи и обратно пропорциональна сопротивлению этого участка.

Величина R зависит от формы и размеров проводника, а также от свойств материала, из которого он сделан. Для цилиндрического проводника:

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

ρ – удельное электрическое сопротивление [Ом·м], для металлов его величина порядка 10^{-8} Ом·м.

- Последовательное соединение

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n.$$

- Параллельное соединение

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$$



► **Закон Ома для неоднородного участка цепи:**

Неоднородный – участок цепи, содержащий источник э.д.с.

Работа, совершаемая кулоновскими и сторонними силами по перемещению единичного положительного заряда – падение напряжения (напряжение).

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 \pm \mathcal{E}}{R}.$$

Закон Ома для замкнутой цепи

$$R_{\text{полн}} = r_{\text{внутр.ист.т.}} + R_{\text{внеш.цепи}}.$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{\text{полн}}};$$

Работа и мощность электрического тока. Закон Джоуля-Ленца

Проводник нагревается. Выделившееся тепло Q равно работе тока A .

$$Q = I^2 R t$$

К.п.д. источника тока: $\eta = \frac{I^2 R}{I \mathcal{E}} = \frac{U}{\mathcal{E}}.$



► Законы Кирхгофа

Используются для расчета разветвленных цепей постоянного тока.

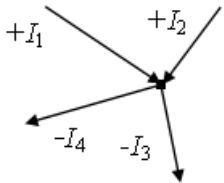
Неразветвленная электрическая цепь – цепь, в которой все элементы цепи соединены последовательно.

Элемент электрической цепи – любое устройство, включенное в электрическую цепь.

Узел электрической цепи – точка разветвленной цепи, в которой сходится более двух проводников.

Ветвь разветвленной электрической цепи – участок цепи между двумя узлами.

Первый закон Кирхгофа (следствие закона сохранения заряда): алгебраическая сумма сил токов, сходящихся в узле, равна нулю.



$$\sum_{i=1}^n I_i = 0$$

Ток, подходящий к узлу – положительный.
Ток, отходящий от узла – отрицательный.

Второй закон Кирхгофа (обобщенный закон Ома): в любом замкнутом контуре, произвольно выбранном в разветвленной электрической цепи, алгебраическая сумма произведений сил токов I_i на сопротивление соответствующих участков R_i этого контура равна алгебраической сумме э.д.с. в контуре.

$$\sum_{i=1}^n I_i R_i = \sum_{i=1}^k \mathcal{E}_i.$$

Задача 1. Сила тока в проводнике равномерно нарастает от $I_0=0$ до $I=3$ А в течение времени $t=10$ с. Определить заряд Q , прошедший в проводнике.

► Решение:

$I_0=0$	$I = \frac{dq}{dt} \Rightarrow dq = I dt$	$Q = \int_0^{t_1} I dt$
$I_1=3A$		
$t_1=10c$		
$Q=?$	$I = I_0 + \alpha t$	$I(t=0) = I_0 = 0$
		$I(t=t_1) = \alpha t_1 = I_1$
		$\Rightarrow \alpha = \frac{I_1}{t_1}$

$$I = \frac{I_1 t}{t_1} \Rightarrow Q = \int_0^{t_1} \frac{I_1 t}{t_1} dt = \frac{I_1 t_1^2}{2 t_1} = \frac{I_1 t_1}{2}$$

$$Q = \frac{I_1 t_1}{2}$$

$$Q = \frac{3 \cdot 10}{2} = \underline{\underline{15 \text{ Кл}}}$$

Задача 2. Определить заряд Q , прошедший по проводу с сопротивлением $R=3 \text{ Ом}$ при равномерном нарастании напряжения на концах провода от $U_0=2 \text{ В}$ до $U=4 \text{ В}$ в течение $t=20 \text{ с}$.

► Решение:

$$\begin{array}{l} R=3 \text{ Ом} \\ U_0=2 \text{ В} \\ U_1=4 \text{ В} \\ t_1=20 \text{ с} \end{array}$$

$$I = \frac{dq}{dt} \Rightarrow dq = I dt$$

$$Q = \int_0^{t_1} I dt$$

$$I = \frac{U}{R} \Rightarrow Q = \int_0^{t_1} \frac{U dt}{R}$$

$Q=?$

$$U = U_0 + dt$$

$$U(t=0) = U_0$$

$$U(t=t_1) = U_0 + dt_1 = U_1 \Rightarrow d = \frac{U_1 - U_0}{t_1}$$

$$Q = \int_0^{t_1} \frac{U_0 + dt}{R} dt = \int_0^{t_1} \frac{U_0}{R} dt + \int_0^{t_1} \frac{d t dt}{R} = \frac{U_0 t_1}{R} + \frac{d t_1^2}{2R} =$$

$$= \frac{U_0 t_1}{R} + \frac{(U_1 - U_0) t_1^2}{2R t_1} = \frac{t_1}{2R} (2U_0 + U_1 - U_0) = \frac{(U_0 + U_1) t_1}{2R}$$

$$Q = \frac{(2+4) \cdot 20}{2 \cdot 3} = \underline{\underline{20 \text{ Кл}}}$$

Задача 3. Обмотка электрического кипятильника имеет две секции. Если включена только первая секция, то вода закипает через $t_1=15$ мин, если только вторая, то через $t_2=30$ мин. Через сколько минут закипит вода, если обе секции включить последовательно? параллельно?

► Решение:

$$\begin{array}{l} t_1 = 15 \text{ мин.} \\ t_2 = 30 \text{ мин.} \\ \hline t = ? \end{array}$$

$$Q = I^2 R t = \frac{U^2 t}{R} \Rightarrow R = \frac{U^2 t}{Q}$$

$$R_1 = \frac{U^2 t_1}{Q} \quad R_2 = \frac{U^2 t_2}{Q}$$

1) $R = R_1 + R_2$

$$R = \frac{U^2 (t_1 + t_2)}{Q} = \frac{U^2 t}{R} \Rightarrow \underline{t = t_1 + t_2}$$

$$t = 45 \text{ мин.}$$

2) $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

$$\Rightarrow R = \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)} = \frac{U^2 t_1 \cdot U^2 t_2 \cdot Q}{Q \cdot Q \cdot U^2 (t_1 + t_2)} = \frac{U^2 t}{R}$$

$$\Rightarrow \underline{t = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2}}$$

$$t = \frac{15 \cdot 30}{45} = 10 \text{ мин.}$$

Задача 4. Сколько витков нихромовой проволоки диаметром $d = 1$ мм надо намотать на фарфоровый цилиндр радиусом $a = 2,5$ см, чтобы получить печь сопротивлением $R = 40$ Ом? $\rho_{\text{Нихрома}} = 1 \cdot 10^{-6}$ Ом·м.

► Решение:

$$\begin{array}{l} d = 1 \text{ мм} \\ a = 2,5 \text{ см} \\ R = 40 \text{ Ом} \\ \rho = 10^{-6} \text{ Ом} \cdot \text{м} \\ \hline N - ? \end{array}$$

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S}$$

$$l = N \cdot l_{\text{витка}} = N \cdot 2\pi a$$

$$S = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$R = \rho \cdot \frac{N \cdot 2\pi a \cdot 4}{\pi d^2} \Rightarrow N = \frac{R \cdot d^2}{8\rho \cdot a}$$

$$N = \frac{40 \cdot 10^{-6}}{8 \cdot 10^{-6} \cdot 2,5 \cdot 10^{-2}} = \underline{\underline{200}}$$

Задача 5. Катушка из медной проволоки имеет сопротивление $R = 10,8 \text{ Ом}$. Масса медной проволоки $m = 3,41 \text{ кг}$. Какой длины l и какого диаметра d проволока намотана на катушке?

► Решение:

$$R = 10,8 \text{ Ом}$$

$$m = 3,41 \text{ кг}$$

$$l - ?$$

$$d - ?$$

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S}$$

$$R = \rho \cdot \frac{l \cdot \rho_{\text{Cu}} \cdot l}{m} = \rho \cdot \rho_{\text{Cu}} \cdot \frac{l^2}{m} \Rightarrow l = \sqrt{\frac{Rm}{\rho \rho_{\text{Cu}}}}$$

$$\rho = 17 \cdot 10^{-9} \text{ Ом} \cdot \text{м}$$

$$\rho_{\text{Cu}} = 8,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$$

$$m = \rho_{\text{Cu}} \cdot V = \rho_{\text{Cu}} \cdot l \cdot S \Rightarrow S = \frac{m}{\rho_{\text{Cu}} \cdot l}$$

$$l = \sqrt{\frac{10,8 \cdot 3,41}{17 \cdot 10^{-9} \cdot 8,6 \cdot 10^3}} = \underline{\underline{501,9 \text{ м}}}$$

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{m}{\rho_{\text{Cu}} \cdot l} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{4m}{\pi \rho_{\text{Cu}} \cdot l}}$$

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot 3,41}{3,14 \cdot 8,6 \cdot 10^3 \cdot 501,9}} = \underline{\underline{0,001 \text{ м}}}$$

Задача 6. На рисунке 1 представлена схема. $\mathcal{E}=2$ В, $R_1=60$ Ом, $R_2=40$ Ом, $R_3=R_4=20$ Ом, $R_G=100$ Ом. Определить силу тока, протекающего через гальванометр.

► Решение:

$$\mathcal{E} = 2 \text{ В}$$

$$R_1 = 60 \text{ Ом}$$

$$R_2 = 40 \text{ Ом}$$

$$R_3 = R_4 = 20 \text{ Ом}$$

$$R_G = 100 \text{ Ом}$$

$$\bar{I}_G = ?$$

$$\textcircled{1} \bar{I}_1 = \bar{I}_2 + \bar{I}_G$$

$$\textcircled{2} \bar{I}_3 + \bar{I}_G = \bar{I}_4$$

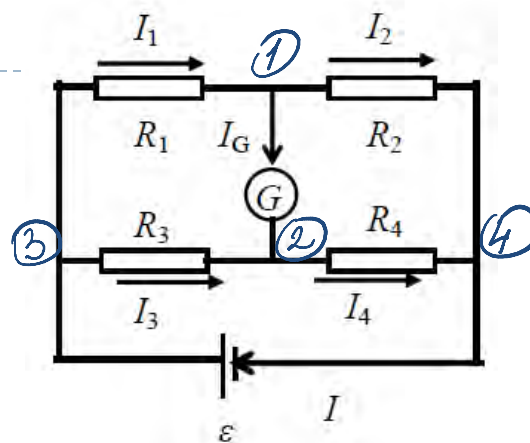
$$\textcircled{3} \bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_3$$

$$\textcircled{4} \bar{I} = \bar{I}_2 + \bar{I}_4$$

$$\bar{I}_1 R_1 + \bar{I}_2 R_2 = \mathcal{E}$$

$$\bar{I}_3 R_3 + \bar{I}_4 R_4 = \mathcal{E}$$

$$\bar{I}_1 R_1 + \bar{I}_G R_G + \bar{I}_4 R_4 = \mathcal{E}$$



$$6\bar{I}_1 + 4\bar{I}_2 = 0,2 \quad (1)$$

$$2\bar{I}_3 + 2\bar{I}_4 = 0,2 \quad (2)$$

$$6\bar{I}_1 + 10\bar{I}_G + 2\bar{I}_4 = 0,2 \quad (3)$$

$$\bar{I}_2 = \bar{I}_1 - \bar{I}_G \quad (4)$$

$$\bar{I}_3 = \bar{I}_4 - \bar{I}_G \quad (5)$$

$$(4) \rightarrow (1) \quad 6\bar{I}_1 + 4\bar{I}_1 - 4\bar{I}_G = 0,2$$

$$10\bar{I}_1 - 4\bar{I}_G = 0,2 \Rightarrow$$

$$\bar{I}_1 = 0,02 + 0,4\bar{I}_G$$

$$(5) \rightarrow (2) \quad 2\bar{I}_4 - 2\bar{I}_G + 2\bar{I}_4 = 0,2$$

$$4\bar{I}_4 - 2\bar{I}_G = 0,2 \Rightarrow$$

$$\bar{I}_4 = 0,05 + 0,5\bar{I}_G$$

$$(3): 0,12 + 2,4\bar{I}_G + 0,1 + \bar{I}_G + 10\bar{I}_G = 0,2$$

$$13,4\bar{I}_G = -0,02 \Rightarrow \bar{I}_G = -1,49 \cdot 10^{-3} \text{ А}$$

Знак «-» говорит, что ток течёт в направлении, противоположном выбранному.

Задача 7. К источнику тока с ЭДС $\varepsilon=1,5$ В присоединили катушку с сопротивлением $R=0,1$ Ом. Амперметр показал силу тока, равную $I_1=0,5$ А. Когда к источнику тока присоединили последовательно еще один источник тока с такой же ЭДС, то сила тока I в той же катушке оказалась равной $0,4$ А. Определить внутренние сопротивления r_1 и r_2 первого и второго источников тока.

► Решение:

$$\varepsilon = 1,5 \text{ В}$$

$$R = 0,1 \text{ Ом}$$

$$I_1 = 0,5 \text{ А}$$

$$I_2 = 0,4 \text{ А}$$

$$r_1 = ?$$

$$r_2 = ?$$

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R + r_1}$$

$$R + r_1 = \frac{\varepsilon}{I_1} \Rightarrow r_1 = \frac{\varepsilon}{I_1} - R$$

$$r_1 = \frac{1,5}{0,5} - 0,1 = \underline{2,9 \text{ Ом}}$$

$$I_2 = \frac{2\varepsilon}{R + r_1 + r_2} \Rightarrow R + r_1 + r_2 = \frac{2\varepsilon}{I_2} ; r_2 = \frac{2\varepsilon}{I_2} - r_1 - R$$

$$r_2 = \frac{2\varepsilon}{I_2} - \frac{\varepsilon}{I_1}$$

$$r_2 = \frac{3}{0,4} - \frac{1,5}{0,5} = \underline{4,5 \text{ Ом}}$$

Задача 8. Определить силу тока I_3 в резисторе сопротивлением R_3 (рисунок 2) и напряжение U_3 на концах резистора, если $\varepsilon_1=4$ В, $\varepsilon_2=3$ В, $R_1=2$ Ом, $R_2=6$ Ом, $R_3=1$ Ом. Внутренними сопротивлениями источников тока пренебречь.

► Решение:

$$\varepsilon_1 = 4 \text{ В}$$

$$\varepsilon_2 = 3 \text{ В}$$

$$R_1 = 2 \text{ Ом}$$

$$R_2 = 6 \text{ Ом}$$

$$R_3 = 1 \text{ Ом}$$

$$I_3 = ? \quad U_3 = ?$$

$$I_1 + I_3 = I_2$$

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 = \varepsilon_1$$

$$-I_2 R_2 - I_3 R_3 = -\varepsilon_2$$

\Rightarrow

$$\begin{cases} I_1 + I_3 = I_2 & (1) \\ 2I_1 + 6I_2 = 4 & (2) \\ 6I_2 + I_3 = 3 & (3) \end{cases}$$

$$(2) - (3): 2I_1 - I_3 = 1 \Rightarrow I_3 = 2I_1 - 1$$

$$(1): I_1 + 2I_1 - 1 = I_2$$

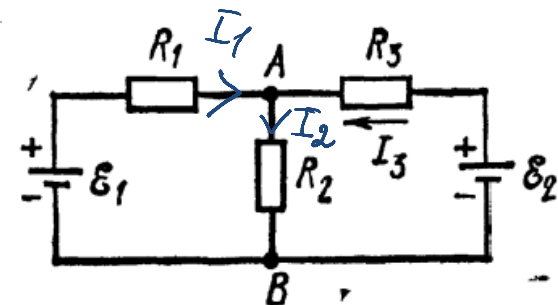
$$3I_1 - 1 = I_2$$

$$(2): 2I_1 + 18I_1 - 6 = 4$$

$$20I_1 = 10 \Rightarrow I_1 = 0,5 \text{ А}$$

$$I_3 = 2I_1 - 1 = \underline{0 \text{ А}}$$

$$U_3 = I_3 R_3 = \underline{0 \text{ В}}$$



Задача 9. Три источника тока с ЭДС $\varepsilon_1=11$ В, $\varepsilon_2=4$ В и $\varepsilon_3=6$ В и три реостата с сопротивлениями $R_1=5$ Ом, $R_2=10$ Ом и $R_3=2$ Ом соединены, как показано на рисунке 3. Определить силы токов I в реостатах. Внутреннее сопротивление источника тока пренебрежимо мало.

► Решение:

$$\varepsilon_1 = 11 \text{ В}$$

$$\varepsilon_2 = 4 \text{ В}$$

$$\varepsilon_3 = 6 \text{ В}$$

$$R_1 = 5 \text{ Ом}$$

$$R_2 = 10 \text{ Ом}$$

$$R_3 = 2 \text{ Ом}$$

$$I_1, I_2, I_3 - ?$$

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I_3 \\ I_1 R_1 - I_2 R_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ I_2 R_2 + I_3 R_3 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \end{cases}$$

$$(3): 10 I_2 = -2 I_3 - 2$$

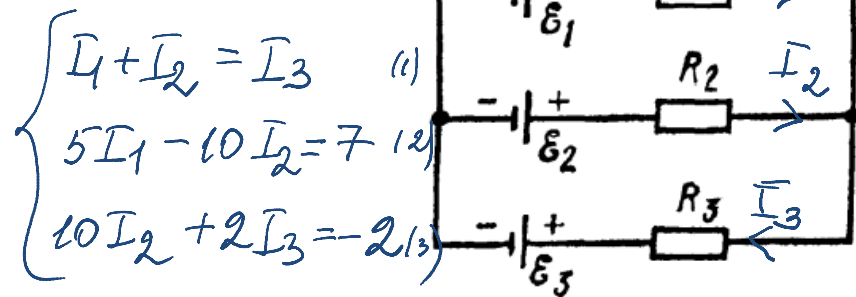
$$(2): 5 I_1 + 2 I_3 = 5 \Rightarrow I_1 = 1 - 0,4 I_3$$

$$(2): 5 - 2 I_3 - 10 I_2 = 7 \Rightarrow 10 I_2 = -2 - 2 I_3$$

$$(1): 1 - 0,4 I_3 - 0,2 - 0,2 I_3 = I_3 \Rightarrow I_3 = 0,5 \text{ А}$$

$$I_1 = 0,8 \text{ А}$$

$$I_2 = -0,3 \text{ А}$$



$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I_3 & (1) \\ 5 I_1 - 10 I_2 = 7 & (2) \\ 10 I_2 + 2 I_3 = -2 & (3) \end{cases}$$

Задача 10. ЭДС батареи аккумуляторов $\mathcal{E} = 12 \text{ В}$, сила тока I короткого замыкания равна 5 А . Какую наибольшую мощность P_{\max} можно получить во внешней цепи, соединенной с такой батареей?

► Решение:

$$\begin{array}{l} \mathcal{E} = 12 \text{ В} \\ I_{\text{к.з.}} = 5 \text{ А} \\ \hline P_{\max} = ? \end{array}$$

$$\bar{I} = \frac{\mathcal{E}}{r + R}$$

Тогда коротком замыкании

$$R = 0 \Rightarrow I_{\text{к.з.}} = \frac{\mathcal{E}}{r} \Rightarrow r = \frac{\mathcal{E}}{I_{\text{к.з.}}}$$

$$P = I^2 R = \frac{\mathcal{E}^2 \cdot R}{(r + R)^2}$$

Чтобы найти P_{\max} нужно найти максимум функции.

$$\frac{dP}{dR} = 0$$

$$\frac{dP}{dR} = \frac{\mathcal{E}^2}{(r + R)^2} - \frac{2\mathcal{E}^2 R}{(r + R)^3} = \frac{\mathcal{E}^2}{(r + R)^3} \{r + R - 2R\} = \frac{\mathcal{E}^2 (r - R)}{(r + R)^3} = 0$$

$$\Rightarrow R = r$$

$$P_{\max} = \frac{\mathcal{E}^2 \cdot r}{(r + r)^2} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r} = \frac{\mathcal{E} \cdot I_{\text{к.з.}}}{4}$$

$$P_{\max} = \frac{12 \cdot 5}{4} = \underline{15 \text{ Вт}}$$

Задача 11. ЭДС \mathcal{E} батареи равна 20 В. Сопротивление R внешней цепи равно 2 Ом, сила тока $I=4$ А. Найти КПД батареи. При каком значении внешнего сопротивления R КПД будет равен 99%?

► Решение:

$$\mathcal{E} = 20 \text{ В}$$

$$R = 2 \text{ Ом}$$

$$I = 4 \text{ А}$$

$$\eta_1 = 0,99 = 99\%$$

$$\eta - ? \quad R_1 - ?$$

$$\eta = \frac{U}{\mathcal{E}} \cdot 100\% = \frac{I \cdot R}{\mathcal{E}} \cdot 100\%$$

$$\eta = \frac{4 \cdot 2}{20} \cdot 100\% = \underline{40\%}$$

$$\eta_1 = \frac{U_1}{\mathcal{E}} \Rightarrow U_1 = \eta_1 \cdot \mathcal{E} = I_1 R_1 \Rightarrow R_1 = \frac{\eta_1 \mathcal{E}}{I_1}$$

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{(r + R_1)} \Rightarrow (r + R_1) = \frac{\mathcal{E}}{I_1}$$

$$R_1 = \eta_1 (r + R_1) \Rightarrow$$

$$R_1 = \frac{\eta_1 r}{(1 - \eta_1)}$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} \Rightarrow R + r = \frac{\mathcal{E}}{I}, \quad r = \frac{\mathcal{E}}{I} - R \Rightarrow \underline{R_1 = \frac{\eta_1}{(1 - \eta_1)} \left(\frac{\mathcal{E}}{I} - R \right)}$$

$$R_1 = \frac{0,99}{0,01} \cdot \left(\frac{20}{4} - 2 \right) = \underline{297 \text{ Ом}}$$

Задача 12. Сила тока в проводнике сопротивлением $R=12$ Ом равномерно убывает от $I_0=5$ А до $I=0$ в течение времени $\tau=10$ с. Какое количество теплоты Q выделяется в этом проводнике за указанный промежуток времени?

► Решение:

$$R=12 \text{ Ом}$$

$$I_0=5 \text{ А}$$

$$I=0$$

$$\tau=10 \text{ с}$$

$$Q=?$$

$$I = I_0 - \alpha t \Rightarrow I_0 = \alpha \tau \quad \alpha = \frac{I_0}{\tau}$$

$$I = I_0 - \frac{I_0 t}{\tau}$$

$$Q = \int_0^{\tau} I^2 R dt = \int_0^{\tau} \left(I_0 - \frac{I_0 t}{\tau} \right)^2 R dt = \frac{I_0^2 R}{\tau^2} \int_0^{\tau} (\tau - t)^2 dt =$$
$$= -\frac{I_0^2 R}{\tau^2} \frac{(\tau - t)^3}{3} \Big|_0^{\tau} = \frac{I_0^2 R \tau^3}{3\tau^2} = \underline{\underline{\frac{I_0^2 R \tau}{3}}}$$

$$Q = \frac{25 \cdot 12 \cdot 10}{3} = \underline{\underline{1 \text{ кДж}}}$$

Задача 13. Имеется N одинаковых гальванических элементов с ЭДС ε_i и внутренним сопротивлением r_i каждый. Из этих элементов требуется собрать батарею, состоящую из нескольких параллельно соединенных групп, содержащих по n последовательно соединенных элементов. При таком значении n сила тока I во внешней цепи, имеющей сопротивление R , будет максимальной? Чему будет равно внутреннее сопротивление R_i батареи при этом значении n ?

► Решение:

N, ε_i, r_i

n

R

$I = ? (I = I_{\max})$

$R_i = ?$

N — общее число элементов,

n — число элементов в группе,

$\frac{N}{n}$ — число групп.

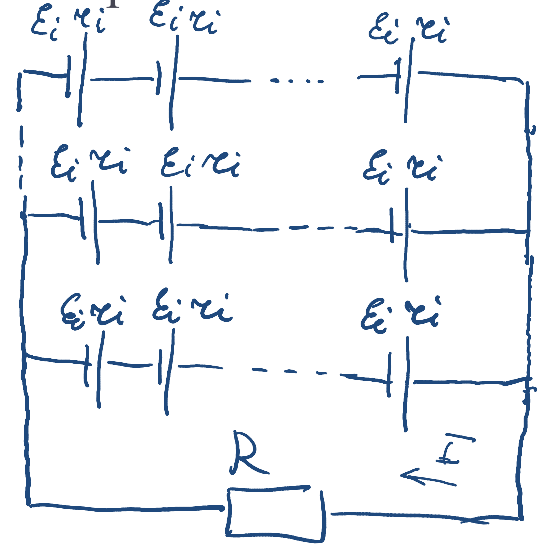
Сопротивление одной группы:

$$r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_n = n r_i$$

Внутреннее сопротивление всей батареи:

$$R_i = \underbrace{\left(\frac{1}{n r_i} + \frac{1}{n r_i} + \dots + \frac{1}{n r_i} \right)^{-1}}_{N/n} = \left(\frac{N/n}{n r_i} \right)^{-1} = \frac{n^2 r_i}{N}$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R + R_i}, \quad \varepsilon = n \varepsilon_i \Rightarrow I = \frac{n \varepsilon_i}{R + \frac{n^2 r_i}{N}}$$



Чтобы найти I_{\max} , нужно найти максимум функции:

$$\frac{dI}{dn} = 0$$

$$\frac{dI}{dn} = \frac{\varepsilon_i \left(R + \frac{n^2 r_i}{N} \right) - n \varepsilon_i \cdot \frac{2n r_i}{N}}{\left(R + \frac{n^2 r_i}{N} \right)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon_i R + \frac{\varepsilon_i n^2 r_i}{N} - \frac{2n^2 \varepsilon_i r_i}{N} = \varepsilon_i \left(R - \frac{n^2 r_i}{N} \right) = 0 \Rightarrow R = \frac{n^2 r_i}{N}$$

$n = \sqrt{\frac{NR}{r_i}}$ — при таком значении n сила тока будет максимальной.

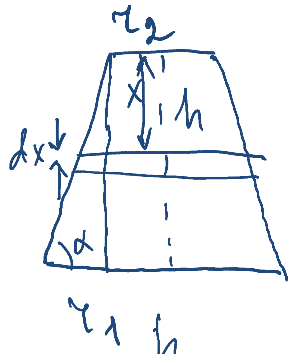
$$R_i = \frac{n^2 r_i}{N} = \frac{NR r_i}{r_i N} = R$$

$$\boxed{R = R_i}$$

Задача 14. Вычислить сопротивление R графитового проводника, изготовленного в виде прямого кругового усеченного конуса высотой $h=20$ см и радиусами оснований $r_1=12$ мм и $r_2=8$ мм. Температура t проводника равна 20°C .

► Решение:

$$\begin{array}{l} h = 0,2 \text{ м} \\ r_1 = 12 \text{ мм} \\ r_2 = 8 \text{ мм} \\ \hline R = ? \end{array}$$



Площадь поперечного сечения
меняется \Rightarrow возьмем слой толщиной
 dx , радиус этого слоя:

$$r = r_2 + \frac{x}{\operatorname{tg} \alpha} ; \operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{r - r_2} = \frac{h}{r_1 - r_2}$$

$$\rho = 3,9 \cdot 10^{-6} \text{ Ом} \cdot \text{м}$$

$$R = \int_0^h \frac{\rho dx}{S} = \int_0^h \frac{\rho dx}{\pi \left(r_2 + \frac{x}{\operatorname{tg} \alpha} \right)^2} = \rho \int_0^h \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha dx}{\pi \left(r_2 \operatorname{tg} \alpha + x \right)^2} = \left. -\frac{\rho \operatorname{tg}^2 \alpha}{\pi \left(r_2 \operatorname{tg} \alpha + x \right)} \right|_0^h$$

$$= \frac{\rho \operatorname{tg}^2 \alpha}{\pi} \left(\frac{1}{r_2 \operatorname{tg} \alpha} - \frac{1}{r_2 \operatorname{tg} \alpha + h} \right) = \frac{\rho \operatorname{tg}^2 \alpha}{\pi} \frac{(r_2 \operatorname{tg} \alpha + h) - r_2 \operatorname{tg} \alpha}{r_2 \operatorname{tg} \alpha (r_2 \operatorname{tg} \alpha + h)} = \frac{\rho \operatorname{tg} \alpha \cdot h}{\pi r_2 (r_2 \operatorname{tg} \alpha + h)}$$

$$= \frac{\rho \cdot h}{\pi r_2 \left(r_2 + h / \operatorname{tg} \alpha \right)} = \frac{\rho h}{\pi r_2 \left(r_2 + h (r_1 - r_2) / h \right)} = \frac{\rho h}{\pi r_2 (r_2 + r_1 - r_2)} = \frac{\rho \cdot h}{\pi r_1 r_2} = R$$

$$R = \frac{3,9 \cdot 10^{-6} \cdot 0,2}{3,14 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 10^{-6}} = 2,59 \cdot 10^{-3} \text{ Ом} = \underline{\underline{2,59 \text{ мОм}}}$$

