

Движение заряженных частиц в
электростатическом поле.

- ▶ Электрическое поле – векторное поле, существующее вокруг тел или частиц, обладающих электрическим зарядом (а также возникающее при изменении магнитного поля).
- ▶ Оно может быть обнаружено благодаря его силовому воздействию на заряженные тела.
- ▶ Неподвижный заряд q создает электрическое поле, обнаружить его можем точечным “пробным” зарядом q_p .
- ▶ На пробный заряд действует сила:

$$\vec{F} = q_p \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e}_r \right)$$

Она зависит от величин, определяющих поле (q и r) и от величины пробного заряда q_p .



- ▶ Величина $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_p}$ - напряженность электрического

поля в данной точке.

Она зависит лишь от величин q и r , определяющих поле в данной точке.

- ▶ Напряженность электрического поля – векторная физическая величина, характеризующая электрическое поле в данной точке и численно равная отношению силы, действующей на неподвижный точечный заряд, помещенный в данную точку поля, к величине этого заряда.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e}_r$$

Единица измерения
напряженности $[E] = \text{В/м}$

Задача 1. В плоском горизонтально расположенном конденсаторе заряженная капля ртути находится в равновесии при напряженности электрического поля $E = 60$ кВ/м. Заряд капли $q = 8 \cdot 10^{-19}$ Кл. Найти радиус R капли.

▶ Решение:

На капельку ртути, находящуюся в электрическом поле действует две силы:

$$m\vec{g} + \vec{F}_k = 0$$

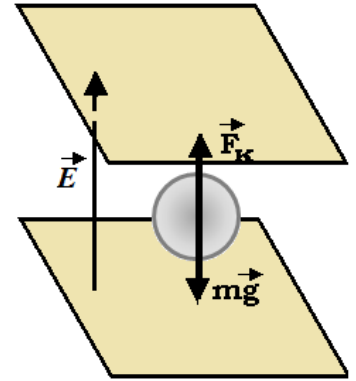
$$mg - F_k = 0 \Rightarrow mg = F_k$$

$$mg = \rho Vg = \rho \frac{4}{3} \pi R^3 g$$

$$F_k = qE = mg = \rho \frac{4}{3} \pi R^3 g$$

$$R^3 = \frac{3qE}{4\rho g} \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{3qE}{4\rho g}}$$

$$R = 4.4 \cdot 10^{-6} \text{ м}$$



Задача 2. Электрон находится в однородном электрическом поле напряженностью $E=200$ кВ/м. Какой путь пройдет электрон за время $t=1$ нс, если его начальная скорость была равна нулю? Какой скоростью будет обладать электрон в конце этого интервала времени?

► Решение:

На электрон действует сила: $\vec{F} = q\vec{E}$

По второму закону Ньютона: $F = ma = qE \Rightarrow a = \frac{qE}{m}$

Уравнение движения в общем виде: $S = v_0t + \frac{at^2}{2}$

$$v_0 = 0 \Rightarrow S = \frac{at^2}{2} = \frac{qEt^2}{2m} \qquad S = 17.56 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$v = v_0 + at \Rightarrow v = at = \frac{qEt}{m} \qquad v = 35.13 \cdot 10^6 \text{ м/с}$$



Задача 3. Какая ускоряющая разность потенциалов U требуется для того, чтобы сообщить скорость $v=30$ Мм/с: 1) электрону; 2) протону?

▶ Решение:

По закону сохранения энергии: $Ue = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow U = \frac{mv^2}{2e}$

1) Для электрона:

$$m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$$

$$\Rightarrow U = 2562.2 \text{ В}$$

2) Для протона:

$$m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$$

$$\Rightarrow U = 4.7 \text{ В}$$



Задача 4. Разность потенциалов U между катодом и анодом электронной лампы равна 90 В, расстояние $r=1$ мм. С каким ускорением a движется электрон от катода к аноду? Какова скорость v электрона в момент удара об анод? За какое время t электрон пролетает расстояние от катода до анода? Поле считать однородным.

► Решение:

Поскольку поле лампы однородно, то напряженность равна: $E = \frac{U}{r}$

$$F = qE \Rightarrow F = \frac{qU}{r}$$

По второму закону Ньютона, электрон будет двигаться с ускорением:

$$F = ma \Rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{qU}{mr}$$

$$a = 15.8 \cdot 10^{15} \text{ м/с}^2$$

По закону сохранения энергии: $Uq = \frac{mv^2}{2}$ $v^2 = \frac{2Uq}{m} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2Uq}{m}}$

$$v = 5.6 \cdot 10^6 \text{ м/с}$$

$$v = at \Rightarrow t = \frac{v}{a} = \frac{mr}{qU} \sqrt{\frac{2Uq}{m}} = r \sqrt{\frac{2m}{qU}}$$

$$t = 0.35 \cdot 10^{-9} \text{ с}$$

Задача 5. Пылинка массой 1 пг, несущая на себе пять электронов, прошла в вакууме ускоряющую разность потенциалов $U=3$ МВ. Какова кинетическая энергия пылинки? Какую скорость приобрела пылинка?

▶ Решение:

Суммарный заряд пылинки: $Q = Ne$

Кинетическая энергия пылинки равна работе ускоряющего поля:

$$T = QU = NeU$$

$$T = 2.4 \text{ пДж}$$

$$T = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2T}{m}} \qquad v = \sqrt{\frac{2NeU}{m}}$$

$$v = 2.29 \cdot 10^9 \text{ м/с}$$



Задача 6. Электрон влетел в плоский конденсатор, имея скорость $v=10$ Мм/с, направленную параллельно пластинам. В момент вылета из конденсатора направление скорости электрона составляло угол $\alpha=35^\circ$ с первоначальным направлением скорости. Определить разность потенциалов U между пластинами (поле считать однородным), если длина l пластин равна 10 см и расстояние d между ними равно 2 см.

► Решение:

В конденсаторе однородное электрическое поле напряженностью E , оно заставляет электрон двигаться с ускорением.

По второму закону Ньютона: $F = ma = eE \Rightarrow a = \frac{eE}{m}$

Результирующий вектор скорости можно разложить на составляющие v_x и v_y .

$$v_x = v = \text{const}$$

$$v_y = v_{0y} + at$$

$$v_y = at = \frac{eE}{m} t$$

$t = \frac{l}{v}$ - время, которое электрон находится в конденсаторе.

Угол на вылете: $\text{tg}\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{eE}{m} \frac{l}{v^2} \Rightarrow E = \frac{mv^2 \text{tg}\alpha}{el}$

Разность потенциалов: $U = Ed = \frac{mv^2 dt \text{tg}\alpha}{el} \qquad U = 79.7 \text{ В}$



Задача 7. Электрон влетел в пространство между пластинами плоского конденсатора со скоростью $v=10$ Мм/с, направленной параллельно пластинам. На сколько приблизится электрон к положительно заряженной пластине за время движения внутри конденсатора (поле считать однородным), если расстояние d между пластинами равно 16 мм, разность потенциалов $U=30$ В и длина l пластин равна 6 см?

► Решение:

На электрон действует сила Кулона $F_k = eE = ma$, $U=Ed \Rightarrow a = \frac{eE}{m} = \frac{eU}{md}$

h – расстояние, на которое приблизится электрон к положительно заряженной пластине.

$$h = \frac{at^2}{2} + v_0 t$$

$$v_0 = v_{0y} = 0$$
$$v_{0x} = v = \text{const}$$

$$t = \frac{l}{v}$$

$$h = \frac{eUl^2}{2mdv^2}$$

$$h = 5.9 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$



Задача 8. Протон, начальная скорость v которого равна 100 км/с, влетел в однородное электрическое поле ($E=300$ В/см) так, что вектор скорости совпал с направлением линий напряженности. Какой путь l должен пройти протон в направлении линий поля, чтобы его скорость удвоилась?-----

▶ Решение:

По закону сохранения энергии:

$$Fl = qEl = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

$$qEl = \frac{m}{2} (v^2 - v_0^2) = \frac{m}{2} (4v_0^2 - v_0^2) = \frac{3mv_0^2}{2}$$

$$\Rightarrow l = \frac{3mv_0^2}{2qE}$$

$$l = 5.2 \text{ мм}$$



Задача 9. Заряженная частица, пройдя ускоряющую разность потенциалов $U=600$ кВ, приобрела скорость $v=5,4$ Мм/с. Определить удельный заряд частицы (отношение заряда к массе).

▶ Решение:

По закону сохранения энергии:

$$qU = \frac{mv^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{q}{m} = \frac{v^2}{2U}$$

$$\Rightarrow \frac{q}{m} = 24.3 \cdot 10^6 \frac{\text{Кл}}{\text{кг}}$$



Задача 10. Протон, ускоренный разностью потенциалов U , попадает в однородное электрическое поле плоского конденсатора, длина пластин которого в направлении движения равна l . Напряженность поля меняется во времени как $E = At$, где A — постоянная. Считая протон нерелятивистским, найти угол между направлениями его движения до и после пролета конденсатора, если протон попадает в поле в момент $t = 0$. Краевыми эффектами пренебречь.

► Решение: $F = qE = qAt = ma$ $a = \frac{qAt}{m}$

$$v_0 = v_{0x} = \text{const}$$

$$v_{0y} = 0$$

Время, за которое протон пролетел расстояние l : $t = \frac{l}{v_0}$

По определению: $a = \frac{dv_y}{dt}$

$$\Rightarrow v_y = \int a dt = \int_0^t \frac{qAt}{m} dt = \frac{qAt^2}{2m} = \frac{qAl^2}{2mv_0^2}$$

$$tg\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v_y}{v_0} = \frac{qAl^2}{2mv_0^3}$$

Найдем v_0 из закона сохранения энергии:

$$F = qU = \frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$$

$$tg\alpha = \frac{qAl^2}{2m \left(\frac{2qU}{m}\right)^{3/2}} = \frac{Al^2}{4} \sqrt{\frac{m}{2qU^3}}$$



Задача 11. Частица с удельным зарядом q/m движется прямолинейно под действием электрического поля $E = E_0 - \alpha x$, где α - положительная постоянная, x - расстояние от точки, в которой частица первоначально покоилась. Найти: а) расстояние, пройденное частицей до точки, где она остановилась; б) ускорение частицы в этой точке.

► Решение: По второму закону Ньютона: $F_k = qE = ma$

$$\frac{q}{m}(E_0 - \alpha x) = \frac{dv}{dt} \frac{dx}{dx} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$$

Когда частица остановилась $v = 0$.

$$\frac{q}{m}(E_0 - \alpha x)dx = vdv$$

$$\frac{q}{m} \int_0^x (E_0 - \alpha x)dx = \int_0^v vdv \quad \Rightarrow \quad \frac{q}{m} \left(E_0 x - \frac{\alpha x^2}{2} \right) = \frac{v^2}{2} = 0$$

$$\frac{q}{m} \left(E_0 x - \frac{\alpha x^2}{2} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\alpha x}{2} = E_0 \quad \text{а) } x = \frac{2E_0}{\alpha}$$

$$\text{б) } a = \frac{dv}{dt} = \frac{q}{m}(E_0 - \alpha x) \Big|_{x=\frac{2E_0}{\alpha}} = \frac{q}{m} \left(E_0 - \frac{2E_0\alpha}{\alpha} \right) = -\frac{qE_0}{m}$$

Задача 12. Определить ускорение релятивистского электрона, движущегося вдоль однородного электрического поля напряженности E , в момент, когда его кинетическая энергия равна T .

► Решение: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{E}$ $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ $p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

$$T = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \quad \frac{T}{m_0c^2} + 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$F = qE = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = m_0 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{dv}{dt} + \frac{v \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{2v}{c^2} \right) \frac{dv}{dt}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{3/2}} \right]$$

$$= \frac{m_0 \frac{dv}{dt}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{1/2}} \left[1 + \frac{v^2/c^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)} \right] \quad \Rightarrow \frac{qE}{m_0} = a \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{3/2}} \right]$$

$$\frac{qE}{m_0} = a \left[\frac{T}{m_0c^2} + 1 \right]^3 \quad \Rightarrow a = \frac{qE}{m_0 \left(\frac{T}{m_0c^2} + 1 \right)^3}$$