Энергия электрического поля. Электроемкость.

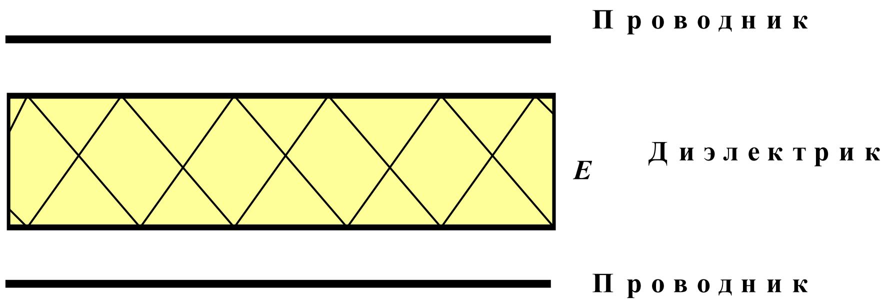
- **Электроемкость проводника**

$$\boxed{C = q/\varphi}$$

- **Электроемкость проводника** – это физическая величина, численно равная заряду, который необходимо сообщить проводнику, чтобы увеличить его потенциал на 1В.
- В СИ C измеряется в фарадах [1Ф = 1Кл / 1В].

- **Конденсатор** – система из двух проводников, разделенных слоем диэлектрика, продольные размеры которых много больше расстояния между ними.

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}$$



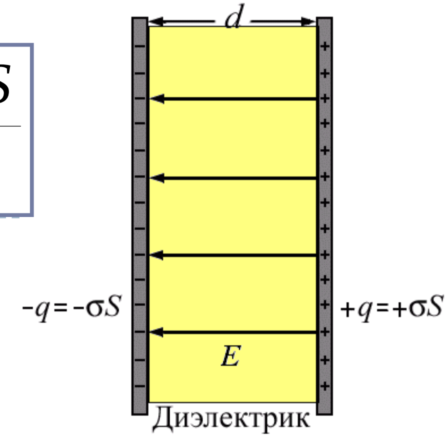
$\varphi_1 - \varphi_2$ – разность потенциалов между обкладками;

q – заряд конденсатора.

- **Плоский конденсатор**

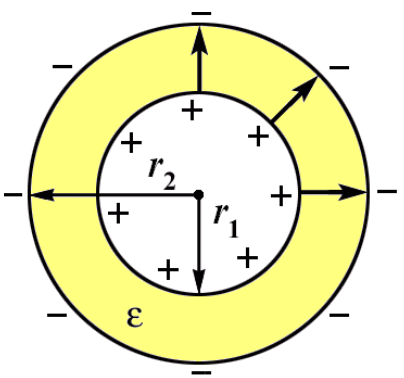
Расстояние между обкладками d много меньше линейных размеров конденсатора. Следовательно, поле конденсатора можно рассматривать как поле между двумя бесконечными пластинами.

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$$



- **Сферический конденсатор**

Состоит из двух концентрических обкладок сферической формы, разделенных слоем диэлектрика.

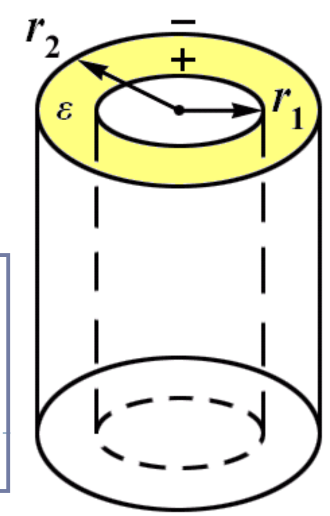


$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 \frac{r_1 \cdot r_2}{r_2 - r_1}$$

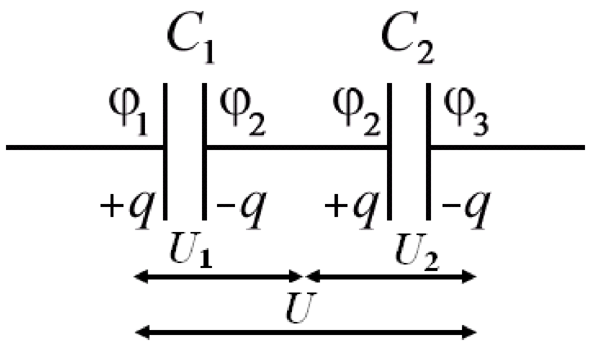
- **Цилиндрический конденсатор**

Состоит из двух полых коаксиальных цилиндров с радиусами r_1 и r_2, вставленных один в другой ($r_1 < r_2$) и разделенных слоем диэлектрика.

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l}{\ln\frac{r_2}{r_1}}$$

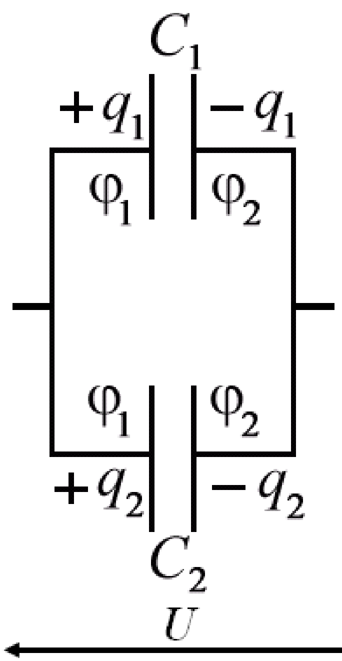


- **Соединения конденсаторов**
- Последовательное соединение конденсаторов



$$\boxed{\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}}$$

- Параллельное соединение конденсаторов



$$\boxed{C = \sum_{i=1}^{n} C_i}$$

Энергия заряженного проводника:

Энергия заряженного проводника равна работе, которую необходимо совершить, чтобы зарядить этот проводник:

$$\boxed{W = \frac{q^2}{2C} = \frac{C\varphi^2}{2}}$$

Энергия заряженного конденсатора

$$\boxed{W = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2} = \frac{qU}{2}}$$

Объемная плотность энергии электрического поля

- энергия, приходящаяся на единичный объем однородного поля.

$$\boxed{\omega = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{ED}{2}}$$

Задача 1. Вычислить энергию поля заряженного проводящего шара радиуса R, помещенного в однородный безграничный диэлектрик.

- Решение:

Напряженность поля: $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}$

Разобьем окружающее шар пространство на концентрические шаровые слои толщиной dr. Объем слоя: $V = 4\pi r^2 dr$

В нем заключена энергия $dW = \omega dV$. $\omega = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}E^2$

$$dW = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}dr$$

Тогда энергия поля

$$W = \int dW = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}$$

$W = \dfrac{q^2}{2C}$ => для шара $C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R$

Задача 2. В вершинах квадрата со стороной a находятся одинаковые по абсолютной величине заряды q. Определить энергию взаимодействия системы.

- Решение:

Взаимная потенциальная энергия двух зарядов: $$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

Если зарядов N штук, то энергия равна сумме энергий взаимодействия зарядов, взятых попарно:

$$W = \frac{1}{2}\sum W_{ik}, i \neq k \qquad W_{ik} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_k}{r_{ik}}$$

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_k}{r_{ik}} \qquad W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i\,\varphi_i$$

1-ый способ:

Пусть в вершинах квадрата находятся все положительные заряды. Каждый заряд взаимодействует попарно с другими. Тогда энергия всей системы:

$W = W_{12} + W_{13} + W_{14} + W_{23} + W_{24} + W_{34}$

Энергия взаимодействия двух точечных зарядов: $$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

$$W_{12} = W_{14} = W_{23} = W_{34} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a} \qquad W_{13} = W_{24} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{\sqrt{2}a}$$

$$\Rightarrow W = 4W_{12} + 2W_{13} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a}(4 + \sqrt{2})$$

Задача 2. В вершинах квадрата со стороной a находятся одинаковые по абсолютной величине заряды q. Определить энергию взаимодействия системы.

- Решение:

2-ой способ:

Пусть в вершинах квадрата на диагонали находятся отрицательные заряды.

Тогда энергия всей системы: $W = \frac{1}{2}\sum q_i\varphi_i$

φ_i – потенциал в точке, где находится i-ый заряд, создаваемый всеми другими зарядами (кроме i-го).

$$W = \frac{1}{2}\left(q_1\varphi(1) - q_2\varphi(2) + q_3\varphi(3) - q_4\varphi(4)\right)$$

Определим потенциал по принципу суперпозиции:

$$\varphi(1) = -k\frac{q_2}{a} + k\frac{q_3}{\sqrt{2}a} - k\frac{q_4}{a} = -2k\frac{q}{a} + k\frac{q}{\sqrt{2}a}$$

$$\varphi(2) = k\frac{q_1}{a} + k\frac{q_3}{a} - k\frac{q_4}{\sqrt{2}a} = 2k\frac{q}{a} - k\frac{q}{\sqrt{2}a}$$

$$\varphi(3) = -k\frac{q_2}{a} + k\frac{q_3}{\sqrt{2}a} - k\frac{q_4}{a} = -2k\frac{q}{a} + k\frac{q}{\sqrt{2}a}$$

$$\varphi(4) = k\frac{q_1}{a} - k\frac{q_2}{\sqrt{2}a} + k\frac{q_3}{a} = 2k\frac{q}{a} - k\frac{q}{\sqrt{2}a}$$

$$\Rightarrow \varphi(1) = -\varphi(2) = \varphi(3) = -\varphi(4)$$

$$W = 2q\varphi(1) = 2q\left(-2k\frac{q}{a} + k\frac{q}{\sqrt{2}a}\right) = k\frac{q^2}{a}\left(\sqrt{2} - 4\right)$$

- Энергия будет отрицательной, т.е. это энергия связи зарядов.

Задача 3. Уединенная металлическая сфера электроемкостью C=10 пФ заряжена до потенциала φ=3 кВ. Определить энергию W поля, заключенного в сферическом слое, ограниченном сферой и концентрической с ней сферической поверхностью, радиус которой в три раза больше радиуса сферы.

- Решение:

Электроемкость сферы: $C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R$

Т.к. сфера полая, то ε=1. $\Rightarrow R = \dfrac{C}{4\pi\varepsilon_0}$

Напряженность поля заряженной сферы: $E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

Плотность энергии: $\omega = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2}$

$$W = \int \omega dV \qquad dV = 4\pi r^2 dr$$

$$W = \int \omega dV = \int_R^{3R} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} dV = \int_R^{3R} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} 4\pi r^2 dr = \int_R^{3R} \frac{4\pi\varepsilon_0 q^2 r^2 dr}{2(4\pi\varepsilon_0)^2 r^4} = \int_R^{3R} \frac{q^2 dr}{8\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$= \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{3R}\right) = \frac{q^2}{12\pi\varepsilon_0 R} = \frac{q^2}{3C}$$

$$C = \frac{q}{\varphi} \Rightarrow q = C\varphi \qquad W = \frac{C\varphi^2}{3} \qquad W = 30 \text{ мкДж}$$

Задача 4. Найти объемную плотность энергии ω_0 электрического поля в точке, находящейся: а) на расстоянии x = 2 см от поверхности заряженного шара радиусом R = 1 см, б) вблизи бесконечно протяженной заряженной плоскости, в) на расстоянии x = 2 см от бесконечно длинной заряженной нити. Поверхностная плотность заряда на шаре и плоскости σ = 16,7 мкКл/м^2, линейная плотность заряда на нити τ = 167 нКл/м. Диэлектрическая проницаемость среды ε = 2.

- Решение:

а) Объемная плотность энергии для шара: $\omega_0 = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}$

Напряженность поля, создаваемого заряженным шаром в точке r: $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}$

В точке x: $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 (R+x)^2}$

$$q = \sigma S = 4\pi R^2 \sigma$$

$$\omega_0 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 (R+x)^2}\right)^2$$

$$\omega_0 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}\left(\frac{4\pi R^2\sigma}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 (R+x)^2}\right)^2 = \frac{\sigma^2 R^4}{2\varepsilon\varepsilon_0 (R+x)^4}$$

$$\omega_0 = 0.097 \text{ Дж/м}^3$$

Задача 4. Найти объемную плотность энергии ω_0 электрического поля в точке, находящейся: а) на расстоянии $x = 2$ см от поверхности заряженного шара радиусом $R = 1$ см, б) вблизи бесконечно протяженной заряженной плоскости, в) на расстоянии $x = 2$ см от бесконечно длинной заряженной нити. Поверхностная плотность заряда на шаре и плоскости σ = 16,7 мкКл/м^2, линейная плотность заряда на нити τ = 167 нКл/м. Диэлектрическая проницаемость среды ε = 2.

- <u>Решение:</u>

б) Объемная плотность энергии для плоскости: $\omega_0 = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}$

Напряженность поля, создаваемого заряженной плоскостью: $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$

$$\omega_0 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}\right)^2 = \frac{\sigma^2}{8\varepsilon\varepsilon_0} \qquad \omega_0 = 1.97 \text{ Дж/м}^3$$

в) Объемная плотность энергии для нити: $\omega_0 = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}$

Напряженность поля, создаваемого заряженной нитью на расстоянии x:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 x} \qquad \omega_0 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}\left(\frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 x}\right)^2 = \frac{\tau^2}{8\pi^2\varepsilon\varepsilon_0 x^2}$$

$$\omega_0 = 4.99 \cdot 10^{-2} \text{ Дж/м}^3$$

Задача 5. Плоский воздушный конденсатор состоит из двух круглых пластин радиусом r=10 см каждая. Расстояние d_1 между пластинами равно 1 см. Конденсатор зарядили до разности потенциалов U=1,2 кВ и отключили от источника тока. Какую работу A нужно совершить, чтобы, удаляя пластины друг от друга, увеличить расстояние между ними до d_2=3,5 см.

- Решение:

$$A = W_2 - W_1 \qquad W = \frac{q^2}{2C}$$

$$A = \frac{q^2}{2C_2} - \frac{q^2}{2C_1} = \frac{q^2}{2}\left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1}\right)$$

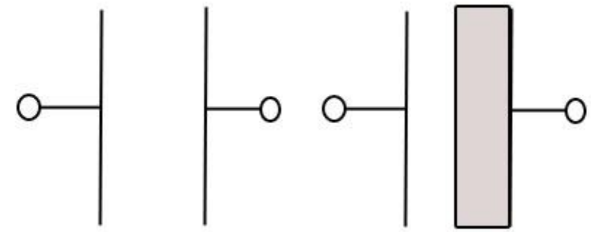
Заряд не меняется, $q = C_1 U \qquad C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1} \qquad C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_2} \qquad S = \pi r^2$

$$A = \frac{C_1^2 U^2}{2}\left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1}\right) = \frac{\varepsilon_0^2 S^2 U^2}{2d_1^2}\left(\frac{d_2}{\varepsilon_0 S} - \frac{d_1}{\varepsilon_0 S}\right) = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2d_1^2}(d_2 - d_1) = \frac{\pi r^2 \varepsilon_0 U^2}{2d_1^2}(d_2 - d_1)$$

$$A = 50 \text{ мкДж}$$

Задача 6. Как изменится ёмкость плоского воздушного конденсатора, если между его обкладками поместить стеклянную пластину (ε = 6), толщина которой равна половине расстояния между обкладками?

- Решение:



C_0 – емкость конденсатора до введения стеклянной пластины.

C – емкость конденсатора после введения стеклянной пластины.

После введения стеклянной пластины конденсатор можно рассматривать как два последовательно соединенных конденсатора.

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \qquad \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \qquad C_1 = \frac{2\varepsilon_0 S}{d}, C_2 = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$$

C_1 – воздушный конденсатор толщиной $d/2$, C_2 – конденсатор со стеклянной пластиной толщиной $d/2$.

$$C = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 S}{d(1+\varepsilon)} = \frac{2\varepsilon C_0}{d(1+\varepsilon)} \qquad C = 1.7C_0$$

Задача 7. Площадь каждой обкладки плоского конденсатора S=1 м^2, расстояние между обкладками d=5 мм. Зазор между обкладками заполнен диэлектриком, проницаемость которого изменяется в направлении, перпендикулярном к обкладкам, по линейному закону от значения ε_1=2 вблизи одной обкладки до ε_2=5,44 вблизи другой. Определить емкость C конденсатора.

- Решение:

Для нахождения емкости конденсатора разобьём диэлектрик на слои толщиной dx. Получим систему последовательно соединенных конденсаторов. Тогда емкость такой системы:

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i} = \int_0^d \frac{1}{C_i} \qquad C_i = \frac{\varepsilon(x)\varepsilon_0 S}{dx}$$

$$\varepsilon(x) = kx + b$$

$$b = \varepsilon_1$$

$$k = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{\varepsilon_0 S}\int_0^d \frac{dx}{kx+b} = \frac{1}{\varepsilon_0 Sk} ln(kx+b)\Big|_0^d = \frac{1}{\varepsilon_0 Sk} ln\left(\frac{kd+b}{b}\right) = \frac{d}{\varepsilon_0 S}\frac{ln(\varepsilon_2/\varepsilon_1)}{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{ln(\varepsilon_2/\varepsilon_1)} \qquad C = 6.1 \text{ нФ}$$

Задача 8. Конденсатор ёмкостью 3 мкФ заряжен до разности потенциалов 300 В, конденсатор ёмкостью 2 мкФ – до 200 В. Оба конденсатора соединены после зарядки параллельно одноименными полюсами. Какая разность потенциалов установится на обкладках конденсаторов после их соединения?

- Решение:

$$C = \frac{q}{U} = \frac{(q_1 + q_2)}{U}$$

С другой стороны $C = C_1 + C_2$.

$$\Rightarrow C_1 + C_2 = \frac{(q_1 + q_2)}{U} \qquad U = \frac{(q_1 + q_2)}{(C_1 + C_2)}$$

$$C_1 = \frac{q_1}{U_1} \qquad q_1 = C_1 U_1$$

$$\Rightarrow U = \frac{(C_1 U_1 + C_2 U_2)}{(C_1 + C_2)}$$

$$C_2 = \frac{q_2}{U_2} \qquad q_2 = C_2 U_2$$

$$U = 260 \text{ В}$$

Задача 9. Два конденсатора электроемкостями C_1=3 мкФ и C_2=6 мкФ соединены между собой и присоединены к батарее с ЭДС 120 В. Определить заряды Q_1 и Q_2 конденсаторов и разности потенциалов U_1 и U_2 между их обкладками, если конденсаторы соединены: 1) параллельно; 2) последовательно.

- Решение:

1) При параллельном соединении: $U_1 = U_2 = \varepsilon = 120$ В

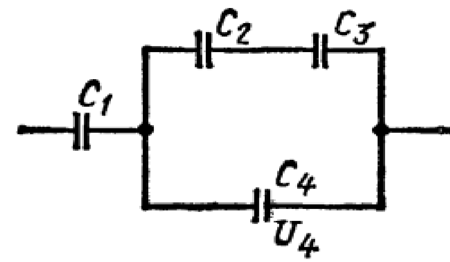
$$Q_1 = C_1 U_1 = 0.72 \text{ мКл}$$

2) При последовательном соединении: $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 2$ мкФ

$$Q_1 = Q_2 = Q = C\varepsilon = 0.24 \text{ мКл}$$

$$U_1 = \frac{Q_1}{C_1} = 80 \text{ В} \qquad U_2 = \frac{Q_2}{C_2} = 40 \text{ В}$$

Задача 10. Конденсаторы электроемкостями C_1=2 мкФ, C_2=2 мкФ, C_3=3 мкФ, C_4=1 мкФ соединены так, как указано на рисунке. Разность потенциалов на обкладках четвертого конденсатора U_4=100 В. Найти заряды и разности потенциалов на обкладках каждого конденсатора, а также общий заряд и разность потенциалов батареи конденсаторов.



- <u>Решение:</u>

$$Q_4 = C_4 U_4 = 10^{-4} \text{ Кл}$$

$$Q_2 = Q_3 = C_2 U_2 = C_3 U_3 \qquad U_3 = \frac{C_2 U_2}{C_3}$$

$$U_4 = U_2 + U_3 \Rightarrow U_4 = U_2\left(1 + \frac{C_2}{C_3}\right) \Rightarrow U_2 = \frac{U_4}{\left(1 + \frac{C_2}{C_3}\right)} = 60 \text{ В}$$

$$U_3 = U_4 - U_2 = 40 \text{ В}$$

$$Q_2 = Q_3 = C_2 U_2 = C_3 U_3 = 1.2 \cdot 10^{-4} \text{ Кл}$$

$$U_1 = \frac{Q_1}{C_1} = 110 \text{ В}$$

$$Q_1 = Q_2 + Q_4 = 2.2 \cdot 10^{-4} \text{ Кл}$$

$$U = U_1 + U_4 = 210 \text{ В}$$

$$Q = Q_1 = 2.2 \cdot 10^{-4} \text{ Кл}$$