Проводники и диэлектрики в электрическом поле.

- **Поляризованность (вектор поляризации)**
- Дипольный момент диэлектрика $$\vec{p}_V = \sum_i \vec{p}_{li}$$
- $p_{l\,i}$ – дипольный момент одной молекулы.

- **Поляризованность** диэлектрика – дипольный момент единичного объема:

$$\vec{P} = \frac{\vec{p}_V}{V} = \frac{\sum_i \vec{p}_{li}}{V}$$

- Для изотропного диэлектрика с неполярными молекулами:

$$\vec{P} = \vec{p}_l \cdot n = \alpha \varepsilon_0 n \vec{E} = \chi \varepsilon_0 \vec{E},$$

где n – концентрация молекул

$$\boxed{\chi = \alpha \cdot n}$$

диэлектрическая восприимчивость

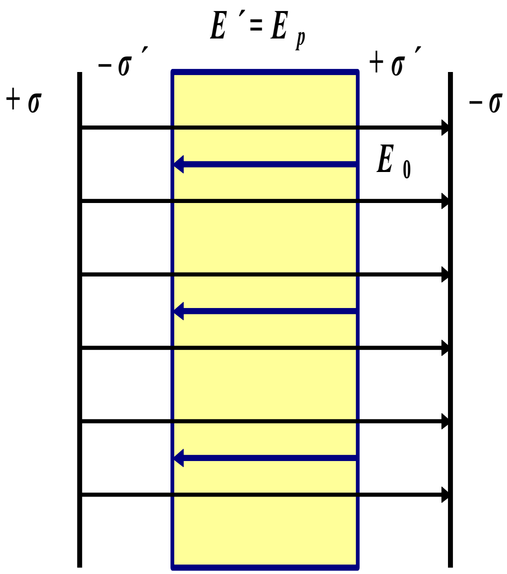
- Связь между вектором P и σ': $$\boxed{P_n = \sigma' = \chi \varepsilon_0 E}$$

P_n – проекция вектора поляризованности на внешнюю нормаль к поверхности диэлектрика.

P_n численно равна электрическому заряду, смещаемому через единичную площадку в направлении положительной нормали к ней.

Поле в среде отличается от поля в вакууме тем, что оно создается как свободными, так и **связанными** (поляризационными) зарядами.

Теорема Гаусса
$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{q_{своб} + q_{пол}}{\varepsilon_0}$$



Свободные заряды создают внешнее поляризующее поле $\boldsymbol{E}_0$, а связанные заряды – добавочное поле поляризованного диэлектрика $\boldsymbol{E}_p$.

$$\vec{E}_p \uparrow\downarrow \vec{E}_0$$

результирующее поле в диэлектрике:

$$E = E_0 - E_p < E_0$$

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}$$

вектор электростатической индукции (электрического смещения).

Закон Гаусса для вектора электростатической индукции

$$\boxed{\oint_S \vec{D}d\vec{S} = q_{своб}}$$

Поток вектора электростатической (электрической) индукции через замкнутую поверхность S равен алгебраической сумме свободных зарядов, охватываемых этой поверхностью.

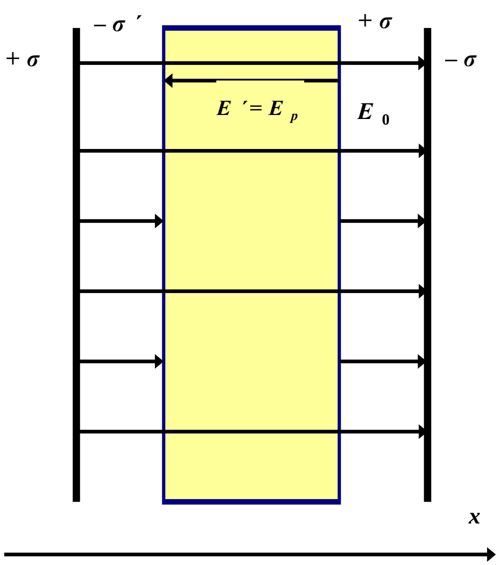
Связь между векторами *D* и *E*: $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ $\quad \vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \chi \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \vec{E}$$

$\boxed{\varepsilon = 1 + \chi}$ - относительная диэлектрическая проницаемость

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}}$$

Вектор ***D*** характеризует установившееся электрическое поле, создаваемое свободными зарядами, но при таком их распределении, какое имеет место при наличии диэлектрика.



Внешнее поле E_0 создается двумя бесконечными пластинами с поверхностной плотностью заряда $+\sigma$ и $-\sigma$.

Результирующее поле в диэлектрике $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$

В проекциях на ось *x*: $E = E_0 - E'$

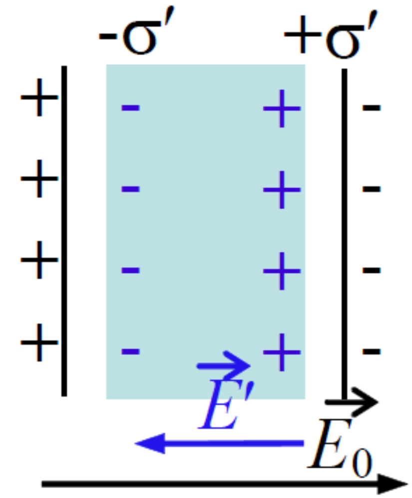
$$E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} \qquad E = E_0 - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} \qquad P = \sigma' \qquad \vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$E = E_0 - \frac{\chi \varepsilon_0 E}{\varepsilon_0} \qquad E_0 = (1 + \chi) E \qquad \varepsilon = 1 + \chi \qquad \boxed{\varepsilon = \frac{E_0}{E}}$$

Относительная диэлектрическая проницаемость среды показывает во сколько раз поле в вакууме $\boldsymbol{E_0}$ больше поля ***E*** в среде.

Задача 1. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено диэлектриком (слюдой, ε=7). Площадь пластин конденсатора равна 50 см[3]. Определить поверхностную плотность связанных зарядов на слюде, если пластины конденсатора в отсутствии диэлектрика притягивают друг друга с силой 1 мН.

- Решение:



Напряженность поля в диэлектрике найдем по принципу суперпозиции: $\vec{E} = \overrightarrow{E_0} + \overrightarrow{E'}$ $\qquad E = E_0 - E'$

E_0 – напряженность поля конденсатора без диэлектрика,

E' – напряженность поля связанных зарядов,

E – напряженность поля в диэлектрике.

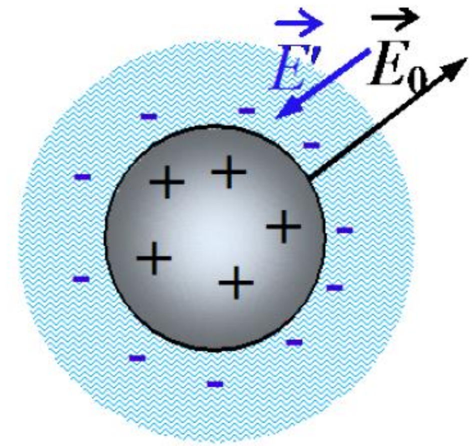
$$E = \frac{E_0}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \frac{E_0}{\varepsilon} = E_0 - E' \qquad E' = E_0 - \frac{E_0}{\varepsilon} = E_0\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} \qquad \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) \qquad \Rightarrow \sigma' = \sigma\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

Пластины конденсатора притягиваются с силой $F = qE_0$, $q=\sigma S$ – заряд пластин.

$$F = \frac{\sigma^2 S}{\varepsilon_0} \qquad \sigma = \sqrt{\frac{F\varepsilon_0}{S}} \qquad \Rightarrow \sigma' = \sqrt{\frac{F\varepsilon_0}{S}}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) \qquad \sigma' = 11.4 \text{ мкКл/м}^2$$

Задача 2. Проводящий шар с равномерно распределенным зарядом 399 мкКл помещают в однородный изотропный диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε = 10. Определить поляризованный заряд на границе диэлектрика с шаром.



- Решение:

При помещении шара в диэлектрик на его поверхности появляются отрицательные связанные заряды $-q'$, эти заряды создают поле напряженностью E'. Напряженность электрического поля шара, помещенного в диэлектрик определим по принципу суперпозиции полей: $E = E_0 - E'$,

где E_0 – напряженность поля, создаваемая шаром, имеющим заряд q, E' – напряженность поля, создаваемая связанным зарядом $-q'$.

$$E_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad E' = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

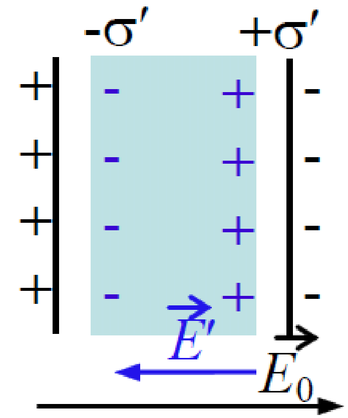
Поле в диэлектрике всегда меньше поля в вакууме в ε раз, т.е. $E = E_0/\varepsilon$, тогда получим:

$$\frac{E_0}{\varepsilon} = E_0 - E'$$

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad \frac{q}{\varepsilon} = q - q' \qquad \Rightarrow q' = q\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

$$q' = 359.1\text{мкКл}$$

Задача 3. Эбонитовая (ε = 3) плоскопараллельная пластина помещена в однородное электрическое поле напряженностью 2 МВ/м. Грани пластины перпендикулярны линиям напряженности. Определить поверхностную плотность связанных зарядов на гранях пластины.



- Решение:

При помещении пластины в электрическое поле в ней происходит перераспределение зарядов, таким образом, что на её противоположных гранях появляются отрицательные и положительные связанные заряды (см. рисунок), которые образуют электрическое поле с напряженностью E'.

Напряженность электрического поля E в пластине находится по принципу суперпозиции полей: $\vec{E} = \overrightarrow{E'} + \overrightarrow{E_0}$

где $\boldsymbol{E}'$ - вектор напряженности электрического поля, созданного связанными зарядами; $\boldsymbol{E}_0$ – вектор напряженности внешнего электрического поля.

В проекциях на горизонтальное направление получим: $E = E_0 - E'$

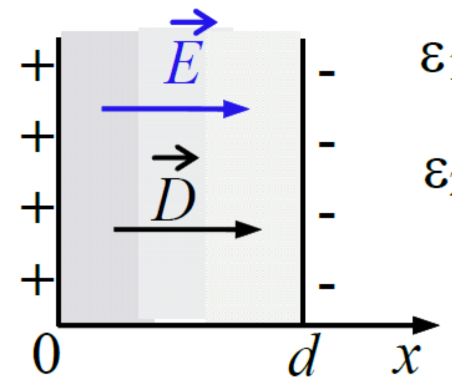
$$E' = \sigma'/\varepsilon_0$$

Поле в диэлектрике всегда меньше поля в вакууме в ε раз, т.е. напряженность поля в пластине $E = E_0/\varepsilon$, тогда:

$$\frac{E_0}{\varepsilon} = E_0 - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} \qquad \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = E_0 - \frac{E_0}{\varepsilon} \Rightarrow \sigma' = E_0\varepsilon_0\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) \qquad \sigma' = 11.8\ \text{мкКл/м}^2$$

Задача 4. Обкладки плоского конденсатора имеют разноименные заряды по 90 нКл. Между обкладками находится диэлектрик, его относительная диэлектрическая проницаемость изменяется по закону $\varepsilon=\varepsilon(x)$ от $\varepsilon_1=45$ у положительной обкладки и до $\varepsilon_2=3$ у отрицательной обкладки. Определить суммарный связанный заряд q', возникающий во всем объеме диэлектрика.

- <u>Решение:</u>



$\varepsilon_1 = \varepsilon(0)$

$\varepsilon_2 = \varepsilon(d)$

$$q' = \int \rho' dV$$

$$div\vec{P} = -\rho' \qquad \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = -\rho'$$

$$D = \varepsilon_0 E + P \qquad D = \varepsilon\varepsilon_0 E$$

$$P = D - \varepsilon_0 E = D - \varepsilon_0 \frac{D}{\varepsilon(x)\varepsilon_0} = D - \frac{D}{\varepsilon(x)}$$

$$\oint(\vec{D}, \vec{dS}) = q \qquad DS = q \Rightarrow D = \frac{q}{S}$$

$$P = \frac{q}{S}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon(x)}\right) \qquad -\rho' = \frac{d}{dx}\left(\frac{q}{S}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon(x)}\right)\right)$$

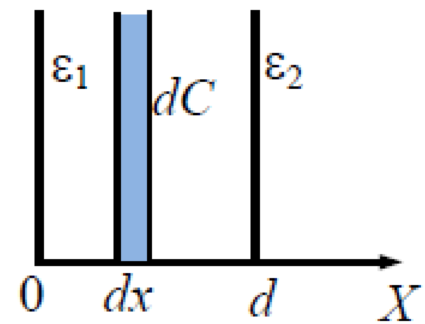
$$q' = -\int \frac{d}{dx}\left(\frac{q}{S}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon(x)}\right)\right) S dx = -\frac{q}{S} S \int \frac{d}{dx}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon(x)}\right) dx = -q \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} d\left(1 - \frac{1}{\varepsilon(x)}\right)$$

$$q' = -q\left(1 - \frac{1}{\varepsilon(x)}\right)\Bigg|_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} = -q\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 + \frac{1}{\varepsilon_1}\right) = q\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right)$$

$q' = 28$ нКл.

Задача 5. Зазор между обкладками плоского конденсатора заполнен изотропным диэлектриком, проницаемость ε которого изменяется в перпендикулярном к обкладкам направлении по линейному закону от ε_1 до ε_2 , причем $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$. Площадь каждой обкладки *S*, расстояние между ними *d*. Найти:
а) емкость конденсатора;
б) объемную плотность связанных зарядов как функцию ε, если заряд конденсатора *q* и поле *E* в нем направлено в сторону возрастания ε.

- Решение:



Выберем ось *X* по направлению возрастания диэлектрической проницаемости ε.

Величина диэлектрической проницаемости на расстоянии *x* от пластины определяется из соотношения:

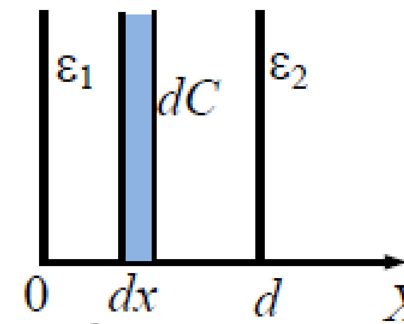
$$\varepsilon(x) = a + bx = \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d}x \qquad a = \varepsilon_1, b = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d}$$

Найдем теперь ёмкость плоского конденсатора. Для этого конденсатор представим как систему из последовательно включенных плоских конденсаторов, расстояние между пластинами которых *dx*. Ёмкость одного такого конденсатора *dC*:

$$dC = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon(x) S}{dx}$$

Задача 5. Зазор между обкладками плоского конденсатора заполнен изотропным диэлектриком, проницаемость ε которого изменяется в перпендикулярном к обкладкам направлении по линейному закону от ε_1 до ε_2, причем $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$. Площадь каждой обкладки S, расстояние между ними d. Найти:
а) емкость конденсатора;
б) объемную плотность связанных зарядов как функцию ε, если заряд конденсатора q и поле E в нем направлено в сторону возрастания ε.

- Решение:



Так как полученная система представляет собой n последовательно включенных конденсаторов, то их общая ёмкость найдется следующим образом:

$$\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{dC_i}$$

$$\frac{1}{C} = \int_0^d \frac{dx}{\varepsilon_0 \varepsilon(x) S} = \frac{1}{b\varepsilon_0 S} \int_0^d \frac{d(a+bx)}{a+bx} = \frac{1}{b\varepsilon_0 S} ln \frac{a+bd}{a} = \frac{d}{\varepsilon_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)S} ln \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

$$C = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)S}{d\ ln\varepsilon_2/\varepsilon_1}$$

Теперь найдем объёмную плотность связанных зарядов ρ′. Известно, что

$$div\vec{P} = -\rho'$$

в нашем случае, т.к. поле меняется только вдоль оси X

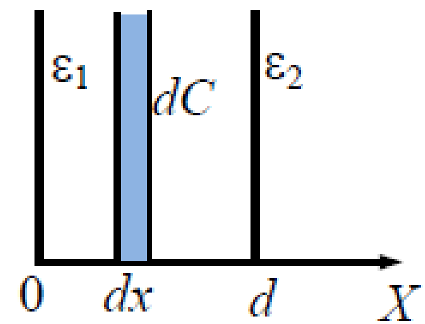
$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho'$$

где P – модуль вектора поляризованности диэлектриков, который равен

$$P(x) = \varepsilon_0(\varepsilon(x) - 1)E(x)$$

Задача 5. Зазор между обкладками плоского конденсатора заполнен изотропным диэлектриком, проницаемость ε которого изменяется в перпендикулярном к обкладкам направлении по линейному закону от ε_1 до ε_2 , причем $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$. Площадь каждой обкладки S, расстояние между ними d. Найти:
а) емкость конденсатора;
б) объемную плотность связанных зарядов как функцию ε, если заряд конденсатора q и поле E в нем направлено в сторону возрастания ε.

- Решение:



Найдем зависимость напряженности электрического поля между пластинами конденсатора, как функцию расстояния от одной из пластин. Для этого рассчитаем зависимость напряжения $U(x)$, полагая, что потенциал одной из пластин равен нулю

$$U(x) = \int_0^d dU(x)$$

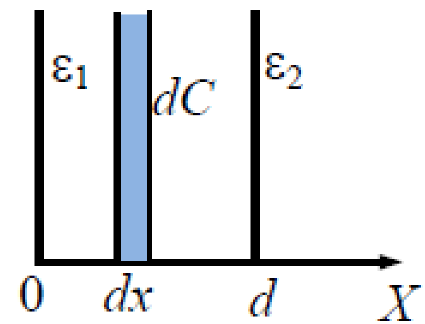
где $dU(x)$ – разность потенциалов между пластинами конденсатора ёмкостью dC

$$dU(x) = \frac{q}{dC(x)} = \frac{q dx}{\varepsilon_0 \varepsilon(x) S} = \frac{q dx}{\varepsilon_0 (a + bx) S}$$

$$U(x) = \int_0^x \frac{q}{\varepsilon_0 S} \frac{dx}{(a + bx)} = \frac{q}{\varepsilon_0 S b} ln(a + bx)$$

Задача 5. Зазор между обкладками плоского конденсатора заполнен изотропным диэлектриком, проницаемость ε которого изменяется в перпендикулярном к обкладкам направлении по линейному закону от ε_1 до ε_2, причем $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$. Площадь каждой обкладки S, расстояние между ними d. Найти:
а) емкость конденсатора;
б) объемную плотность связанных зарядов как функцию ε, если заряд конденсатора q и поле E в нем направлено в сторону возрастания ε.

- Решение:



Напряженности электрического поля между пластинами конденсатора, равна

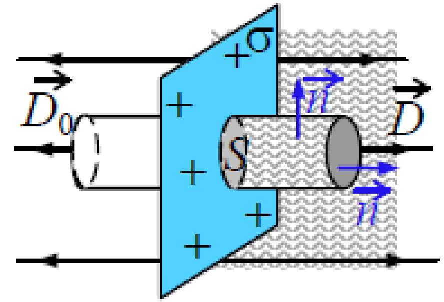
$$E(x) = -\frac{dU(x)}{dx} = -\frac{q}{\varepsilon_0 S}\frac{x}{(a+bx)}$$

$$\rho' = -\frac{dP}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(-\frac{q}{\varepsilon_0 S(a+bx)}(a+bx-1)\varepsilon_0\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{q}{S}\left(1-\frac{1}{a+bx}\right)\right) = -\frac{q}{S}\frac{b}{(a+bx)^2}$$

$$= -\frac{q}{S}\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{d}\frac{1}{(\varepsilon_1+(\varepsilon_2-\varepsilon_1)x/d)^2}$$

Задача 6. Бесконечная пластина заряжена с поверхностной плотностью $\sigma = 10$ нКл/м^2. С одной стороны пластины воздух, а с другой – масло ($\varepsilon = 2$). Определить напряженность поля в воздухе и масле.



- <u>Решение:</u>

Поскольку справа и слева среда разная, то определим сначала вектор электрического смещения ***D***, а затем, зная связь между напряженностью ***E*** и электрическим смещением ***D***, определим напряженность поля в разных средах.

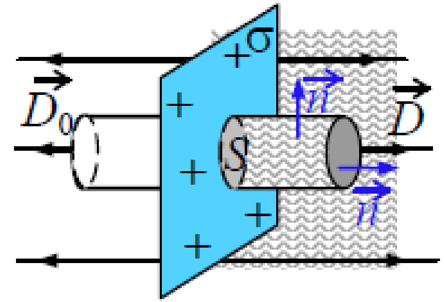
Обозначим за $\boldsymbol{D}_0$ – вектор электрического смещения в воздухе, а ***D*** – в масле, причем $\boldsymbol{D}_0 = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}_0$, $\boldsymbol{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \boldsymbol{E}_0$, где $\boldsymbol{E}_0$ - напряженность поля в воздухе. Запишем теорему Гаусса для вектора ***D***.

$$\oint \vec{D}, \overrightarrow{dS} = q_{\text{свободн.}}$$

В качестве гауссовской поверхности выберем цилиндр, расположенный как указано на рисунке, тогда поток вектора ***D*** будет определяться только потоком через торцы цилиндра, а через боковую поверхность он будет равен нулю.

$$\oint \vec{D}, \overrightarrow{dS} = D_0 S + DS = (D_0 + D)S = (\varepsilon_0 E_0 + \varepsilon\varepsilon_0 E_0)S$$

Задача 6. Бесконечная пластина заряжена с поверхностной плотностью σ = 10 нКл/м^2. С одной стороны пластины воздух, а с другой – масло (ε = 2). Определить напряженность поля в воздухе и масле.



- Решение:

Суммарный заряд определим через поверхностную плотность зарядов

$$q_{\text{свободн.}} = \int \sigma dS = \sigma S$$

$$\Rightarrow (\varepsilon_0 E_0 + \varepsilon\varepsilon_0 E_0)S = \sigma S$$

$$(1+\varepsilon)\varepsilon_0 E_0 = \sigma$$

$$\Rightarrow E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0(1+\varepsilon)}$$

Напряженность поля в воздухе $E_0 = 377\,\frac{\text{В}}{\text{м}}.$

Напряженность поля в масле

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0(1+\varepsilon)}$$

$$E = 188.5\,\frac{\text{В}}{\text{м}}.$$