Потенциал и работа электростатического поля.

$$\boxed{W_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r}}$$

Потенциальная энергия

$$\boxed{\varphi = \frac{W_P}{q_{np}}}$$

Потенциал

- **Потенциал** в точке электростатического поля – физическая величина, численно равная потенциальной энергии единичного положительного заряда, помещенного в эту точку. В системе СИ [В = Дж/Кл].

$$\boxed{\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}}$$

- Потенциал поля, создаваемого системой зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых каждым из зарядов в отдельности.
- Работа, совершаемая над зарядом силами поля, равна произведению заряда на разность потенциалов в начальной и конечной точках.

$$A_{12} = W_{p_1} - W_{p_2} = q(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Потенциал численно равен работе, которую совершают силы поля над единичным положительным зарядом при удалении его из данной точки поля в бесконечность

или

работе, которую надо совершить против сил электрического поля для того, чтобы переместить единичный положительный заряд из бесконечности в данную точку поля.

$$\varphi = \frac{A_\infty}{q}$$

связь потенциала с напряженностью

$$\boxed{\begin{gathered} \vec{E} = -\overline{grad}\,\varphi \\ \vec{E} = -\nabla\,\varphi \end{gathered}}$$

$$\overrightarrow{grad}\varphi = \vec{i}\,\frac{d\varphi}{dx} + \vec{j}\,\frac{d\varphi}{dy} + \vec{k}\,\frac{d\varphi}{dz}$$

Геометрическое место точек постоянного потенциала называется поверхностью равного потенциала или **эквипотенциальной поверхностью**.

Уравнение Пуассона:

$$\boxed{div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0},} \quad \boxed{\vec{E} = -\overline{grad}\,\varphi} \longrightarrow \boxed{div(\overline{grad}\,\varphi) = \Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$ оператор Лапласа.

Задача 1. Определить потенциал как функцию расстояния для поля равномерно заряженной сферической поверхности радиуса R с поверхностной плотностью заряда σ.

- Решение:

Напряженность поля равномерно заряженной сферической поверхности

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$d\varphi = -Edr$$

$$(\varphi_1 - \varphi_2) = \int_{r_2}^{r_1} d\varphi = -\int_{r_2}^{r_1} Edr$$

$$(\varphi_1 - \varphi_2) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{qdr}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_1}^{r_2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Если принять $r_1=r$, $r_2=\infty$, то потенциал вне сферической поверхности

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Внутри сферической поверхности потенциал всегда одинаков (т.к. E=0)

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2} \qquad \varphi = \begin{cases} \dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0} = const, r \le R \\ \dfrac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r}, r > R \end{cases}$$

Задача 2. Определить потенциал как функцию расстояния для поля равномерно заряженного шара с объемной плотностью заряда ρ радиуса *R*.

- <u>Решение:</u>

Напряженность поля объемно заряженного шара (при $r > R$): $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

Разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях r_1 и r_2 от центра шара ($r_1 > R$, $r_2 > R$, $r_2 > r_1$):

$$(\varphi_1 - \varphi_2) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q\,dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_1}^{r_2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Если принять $r_1 = r$, $r_2 = \infty$, то потенциал вне сферической поверхности

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\rho = \frac{q}{V} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow q = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$$

$$\varphi = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}$$

Напряженность поля объемно заряженного шара (при $r < R$): $E = \dfrac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$

Разность потенциалов между двумя точками, лежащими внутри шара:

$$(\varphi_1 - \varphi_2) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{qr\,dr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}(r_1^2 - r_2^2) = \frac{\sigma}{6\varepsilon_0}(r_1^2 - r_2^2)$$

Задача 2. Определить потенциал как функцию расстояния для поля равномерно заряженного шара с объемной плотностью заряда ρ радиуса *R*.

- Решение:

С учетом выбора нулевого уровня потенциала в точке $r_2 = \infty$ потенциал любой точки внутри заряженного шара можно найти следующим образом:

$$\varphi = \varphi(R) - \int_r^R E dr$$

$$\varphi(R) = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0} \qquad \int_R^r E dr = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}(R^2 - r^2)$$

$$\varphi = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0} + \frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0} - \frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}(3R^2 - r^2)$$

$$\varphi = \begin{cases} \frac{\rho}{6\varepsilon_0}(3R^2 - r^2), r < R \\ \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}, r = R \\ \frac{\rho r^2}{3\varepsilon_0}, r > R \end{cases}$$

Задача 3. Четыре одинаковых заряда q=10 нКл каждый расположены в вершинах квадрата со стороной 10 см. Заряды в вершинах 1 и 2 - положительные, а в вершинах 3 и 4 – отрицательные. Определить потенциал электрического поля в центре квадрата.

- Решение:

Потенциал электрического поля, созданного зарядом q_1 в центре квадрата:

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{2}a}{2}$$

Потенциал электрического поля, созданного зарядом q_2 в центре квадрата:

$$\varphi_2 = \varphi_1$$

Потенциал электрического поля, созданного зарядом q_3:

$$\varphi_3 = -\frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 r} = \varphi_4$$

По принципу суперпозиции:

$$\varphi = 2\varphi_1 + 2\varphi_3 = \frac{2q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{2q_3}{4\pi\varepsilon_0 r} = 0$$

Задача 4. 562 одинаковых шарообразных капелек ртути диаметром 0,25 мм заряжены до одного и того же потенциала 65 В. Каков будет потенциал и заряд большой капли, полученной в результате слияния этих капель.

- Решение:

Потенциал одной капли: $\varphi_0 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

По закону сохранения заряда: $Q = Nq$

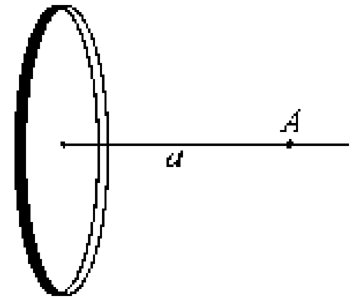
Потенциал большой капли: $\varphi = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \dfrac{Nq}{4\pi\varepsilon_0 R}$

$$q = 4\pi\varepsilon_0 r\varphi_0 \qquad Q = 4\pi\varepsilon_0 r\varphi_0 N$$

$$V = NV_0 \qquad \frac{4}{3}\pi R^3 = N\frac{4}{3}\pi r^3 \qquad \Rightarrow R = r\sqrt[3]{N}$$

$$\varphi = \frac{4\pi\varepsilon_0 r\varphi_0 N}{4\pi\varepsilon_0 r\sqrt[3]{N}} = \varphi_0 N^{2/3}$$

Задача 5. Тонкое кольцо радиуса *R* равномерно заряжено с линейной плотностью заряда τ. Найти потенциал в центре кольца и на расстоянии *a* от центра.



- Решение:

Разделим кольцо бесконечно малые элементы. Т.к. кольцо очень тонкое, то все точки каждого элемента будут находиться от центра кольца на одном и том же расстоянии *R*. Заряд *dq*, находящийся на бесконечно малом элементе длиной *dl* можно считать точечным. Потенциал *dφ*, создаваемый точечным зарядом *dq* в центре кольца:

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

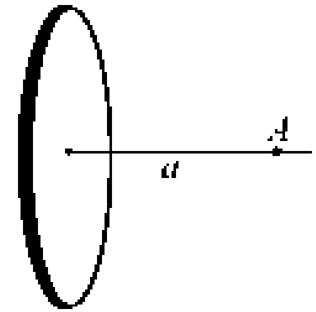
По принципу суперпозиции потенциал в центре от всего кольца:

$$\varphi = \int d\varphi = \int_0^{2\pi R} \frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{2\pi R\tau}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\tau}{2\varepsilon_0}$$

Потенциал *dφ*, создаваемый точечным зарядом *dq* в точке *A*: $d\varphi = \frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_0 r}$

$$\varphi = \int d\varphi = \int_0^{2\pi R} \frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{2\pi R\tau}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\tau R}{2\varepsilon_0 r} = \frac{\tau R}{2\varepsilon_0\sqrt{R^2 + a^2}}$$

Задача 6. Тонкий диск радиуса *R* равномерно заряжен с поверхностной плотностью σ. Найти потенциал в точке *A*, лежащей на оси диска на расстоянии *a* от него. Ось диска перпендикулярна плоскости диска и проходит через центр диска.



- Решение:

Разобьем диск на концентрические бесконечно тонкие кольца шириной *dx*. Площадь бесконечно тонкого кольца: $dS = 2\pi x dx$

$$dq = \sigma dS = 2\pi\sigma x dx$$

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{2\pi\sigma x dx}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\sigma x dx}{2\varepsilon_0\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$\varphi = \int d\varphi = \int_0^R \frac{\sigma x dx}{2\varepsilon_0\sqrt{x^2 + a^2}} \qquad \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sqrt{x^2 + a^2} - a$$

$$\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{x^2 + a^2} - a\right]_0^R = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2 + a^2} - a - \sqrt{a^2} + a\right]$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2 + a^2} - a\right]$$

Задача 7. Электрическое поле создано бесконечной равномерно заряженной плоскостью с поверхностной плотностью заряда σ=2 мкКл/м^2. В этом поле вдоль прямой, составляющей угол α=60° с плоскостью, из точки 1 в точку 2, расстояние l между которыми равно 20 см, перемещается точечный электрический заряд Q=10 нКл. Определить работу A сил поля по перемещению заряда.

- Решение:

Напряженность поля, создаваемого бесконечной равномерно заряженной плоскостью: $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

$$dA = Q\left(\vec{E}, d\vec{l}\right) = QE_l dl$$

Т.к. поле однородное, то $A = EQl\cos\beta$

$$A = EQl\cos(\pi/2 - \alpha) = EQl\sin\alpha = \frac{Q\sigma l\sin\alpha}{2\varepsilon_0}$$

Задача 8. Тонкий стержень с линейной плотностью заряда 100 нКл/м образует половину кольца. Найти работу переноса точечного заряда 8 нКл из центра полукольца в бесконечность. Среда – воздух.

- Решение:

Отметим, что бесконечностью здесь называют область пространства, где потенциал поля полукольца равен нулю.

Работа перемещения заряда из центра полукольца в бесконечность:

$$A_{0\infty} = q(\varphi_0 - \varphi_\infty) = q\varphi_0$$

Чтобы найти потенциал поля полукольца в его центре разделим полукольцо на малые элементы *dl*, несущие точечный заряд *dq*.

$$d\varphi_0 = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$\varphi_0 = \int d\varphi = \int_0^{\pi R} \frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\pi R\tau}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\tau}{4\varepsilon_0}$$

$$A_{0\infty} = \frac{q\tau}{4\varepsilon_0}$$

Задача 9. Определить разность потенциалов между точками, лежащими на расстояниях r_1 и r_2 от оси бесконечно длинного равномерно заряженного цилиндра с линейной плотностью заряда τ.

- Решение:

Напряженность поля, создаваемого заряженным цилиндром:

$$E = \begin{cases} 0 - \text{внутри цилиндра, тт.ктта нет зарядов} \\ \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 R} \text{ или } \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 Rl} \text{ на поверхности цилиндра} \\ \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r} \text{ или } \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 rl} \text{ вне цилиндра.} \end{cases}$$

$$E = -grad\varphi \qquad \Rightarrow E = -\frac{d\varphi}{dr}$$

Вне цилиндра:

$$(\varphi_2 - \varphi_1) = \int_1^2 \mathrm{d}\varphi = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathrm{d}r}{r} = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}(\ln r_2 - \ln r_1) = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

Задача 9. Определить разность потенциалов между точками, лежащими на расстояниях r_1 и r_2 от оси бесконечно длинного равномерно заряженного цилиндра с линейной плотностью заряда τ.

- Решение:

Внутри цилиндра: $$(\varphi_2-\varphi_1)=\int_1^2 \mathrm{d}\varphi=\int_0^R 0=const=\varphi(R)=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1}{R}$$

$$\varphi=\begin{cases}\dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{1}{R}=\text{const}-\text{внутри и} \\ \qquad\qquad\text{на поверхности цилиндра} \\ \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{r}{R}\ -\text{вне цилиндра.}\end{cases}$$