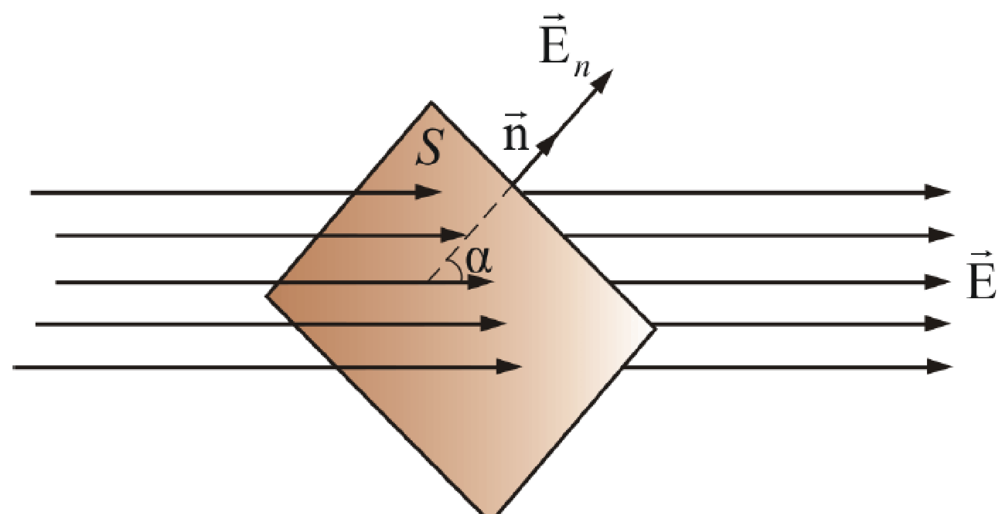
Теорема Гаусса.

- **Силовые линии напряженности электрического поля** – линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с вектором **E**.
- Линии напряженности начинаются на положительном заряде и заканчиваются на отрицательном.
- Густота линий выбирается так, чтобы количество линий, пронизывающих единицу поверхности, было равно модулю вектора **E**.
- Полное число силовых линий, проходящих через поверхность *S*, называется потоком вектора напряженности Φ_E через эту поверхность.

$$\Phi_E = ES_\perp = ES\cos\alpha = E_n S$$

$$d\Phi_E = EdS\cos\alpha$$

$$d\Phi_E = (\vec{E}\, d\vec{S})$$



- Поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность в вакууме равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленной на ε_0.

$$\boxed{\Phi_E = \oint_s (\vec{E} d\vec{S}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i}$$

- Если поверхность не охватывает какой-либо заряд, то число силовых линий, входящих в поверхность, равно числу силовых линий выходящих из неё. Суммарный поток Φ_E этого заряда равен нулю.
- Если произвольная поверхность окружает k– зарядов, то согласно принципу суперпозиции: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_k$

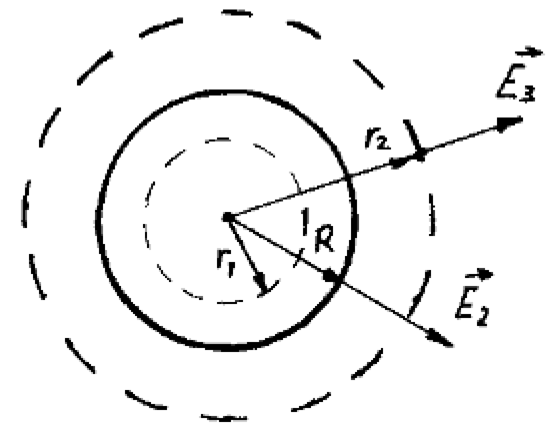
$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \oint_S (\sum_{i=1}^{k} E_{ni}) \cdot dS = \sum_{i=1}^{k} \oint_S E_{ni} dS = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$$

- Если внутри поверхности имеется каким-то образом распределенный заряд с объемной плотностью ρ, то суммарный заряд, заключенный внутри поверхности площадью S, охватывающий объем V:

$$\sum_i q_i = \int_V \rho dV \quad \Rightarrow \quad \Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV$$

Задача 1. На металлической сфере радиусом R=10 см находится заряд Q=l нКл. Определить напряженность E электрического поля в следующих точках: 1) на расстоянии r_1=8 см от центра сферы; 2) на ее поверхности; 3) на расстоянии r_2=15 см от центра сферы. Построить график зависимости E от r.

- Решение:



Согласно теореме Гаусса поток вектора напряженности сквозь замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, заключенных внутри этой поверхности, деленной на электрическую постоянную ε_0.

$$\oint_S E_n dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

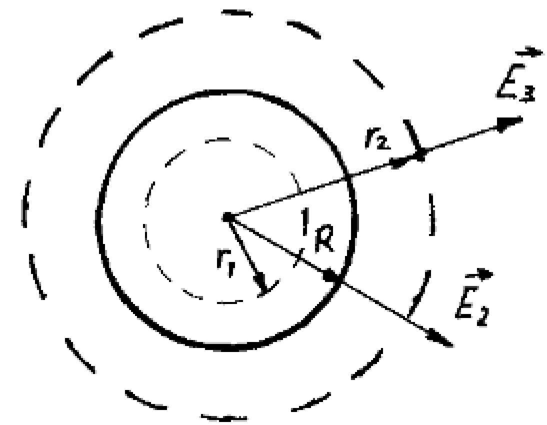
Для определения напряженности E_1 на расстоянии r_1 от центра проведем сферическую поверхность S_1 радиусом r_1 (r_1<R). Внутри этой поверхности зарядов нет. Тогда согласно теореме Гаусса

$$\oint E_n dS = 0$$

E_n – нормальная составляющая напряженности электрического поля.

Задача 1. На металлической сфере радиусом R=10 см находится заряд Q=l нКл. Определить напряженность E электрического поля в следующих точках: 1) на расстоянии r_1=8 см от центра сферы; 2) на ее поверхности; 3) на расстоянии r_2=15 см от центра сферы. Построить график зависимости E от r.

- Решение:



Из соображений симметрии нормальная составляющая E_n должна быть равна самой напряженности и постоянна для всех точек сферы, т.е. $E_n = E_1 = \text{const}$. Поэтому ее можно вынести за знак интеграла.

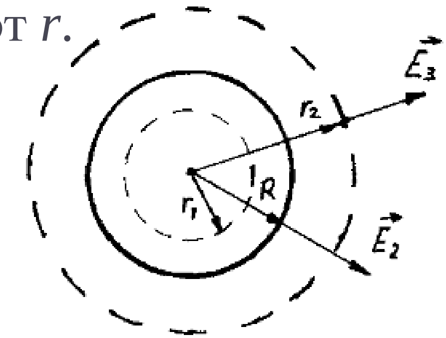
$$E_1 \oint_{S_1} dS = 0$$

Т.к. площадь сферы не равна нулю, то $E_1 = 0$, т.е. напряженность поля в точках, для которых $r_1 < R$ равна нулю.

Найдем напряженность E_2 на поверхности сферы. Эта поверхность содержит заряд Q. Тогда, согласно теореме Гаусса

$$\oint_{S_2} E_n dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

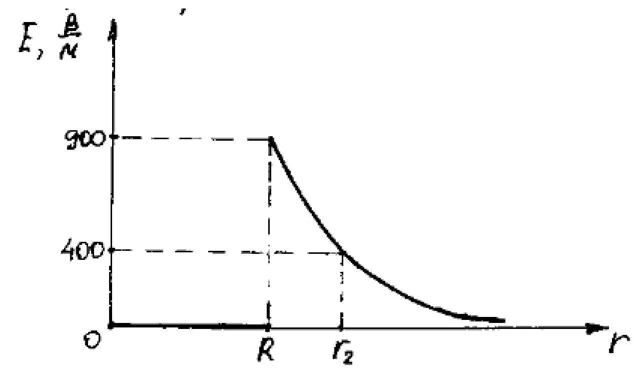
Задача 1. На металлической сфере радиусом R=10 см находится заряд Q=l нКл. Определить напряженность E электрического поля в следующих точках: 1) на расстоянии r_1=8 см от центра сферы; 2) на ее поверхности; 3) на расстоянии r_2=15 см от центра сферы. Построить график зависимости E от r.



- Решение:

Т.к. $E_n = E_2 = \text{const}$, то из условий симметрии следует

$$E_2 \oint_{S_2} dS = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad E_2 S_2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_2 = \frac{Q}{\varepsilon_0 S_2}$$



Подставив сюда выражение для площади сферы $S_2 = 4\pi R^2$ получим:

$$E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

Проведем сферическую поверхность радиусом r_2. Эта поверхность охватывает заряд Q. Тогда, по теореме Гаусса

$$\oint_{S_2} E_n dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

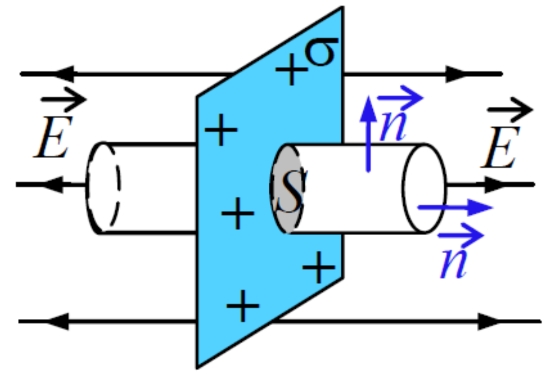
Учитывая, что $E_n = E_3 = \text{const}$, $S_3 = 4\pi r_2^{\,2}$, получим:

$$E_3 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}$$

- $E_1 = 0$, $E_2 = 900$ В/м, $E_3 = 400$ В/м.

Задача 2. Электрическое поле создано двумя бесконечными параллельными пластинами, несущими равномерно распределенный по площади заряд с поверхностными плотностями σ_1=l нКл/м^2 и σ_2=3 нКл/м^2. Определить напряженность E поля: 1) между пластинами; 2) вне пластин. Построить график изменения напряженности вдоль линии, перпендикулярной пластинам.

- <u>Решение:</u>



Сначала посчитаем напряженность поля, создаваемого одной пластиной, используя теорему Гаусса.

$$\sigma = \frac{dq}{dS} \qquad \oint_s E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i$$

$$\oint_S E_n dS = \int_{S_{бок}} E_n dS_{бок} + 2\int_{S_{осн}} E_n dS_{осн} =$$

$$\int EdS_{бок}\cos 90^0 + 2\int EdS_{осн}\cos 0^0 = 2ES_{осн}$$

$$dq = \sigma dS, \quad \sum_{i=1}^{N} q_i = \int \sigma dS = \sigma S_{осн}.$$

$$2ES_{осн} = \frac{\sigma S_{осн}}{\varepsilon_0} \qquad \boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

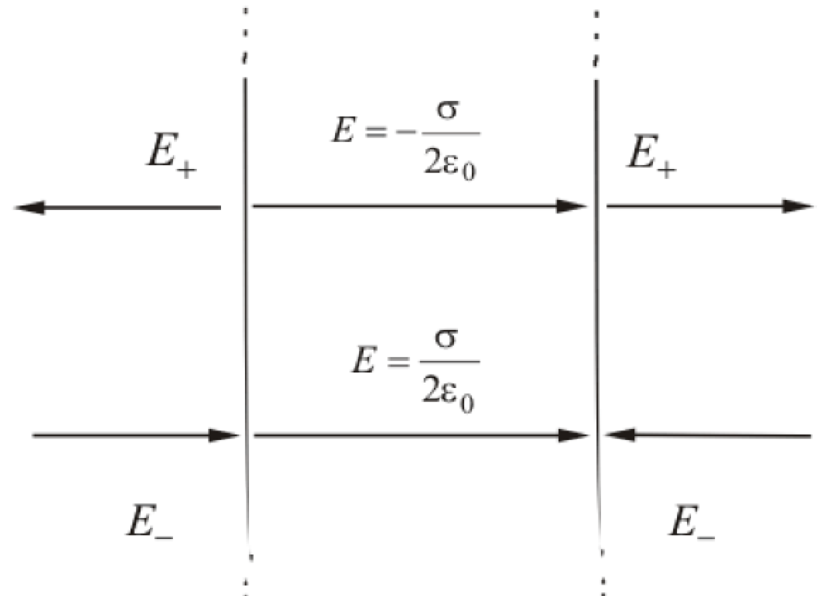
- напряженность поля, создаваемого заряженной пластиной.

Задача 2. Электрическое поле создано двумя бесконечными параллельными пластинами, несущими равномерно распределенный по площади заряд с поверхностными плотностями σ_1=l нКл/м^2 и σ_2=3 нКл/м^2. Определить напряженность E поля: 1) между пластинами; 2) вне пластин. Построить график изменения напряженности вдоль линии, перпендикулярной пластинам.

- <u>Решение:</u>

Для двух плоскостей:

$$E'_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} \qquad E'_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}$$

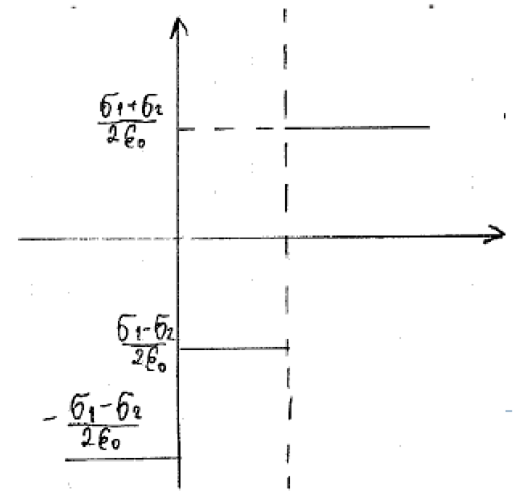


Между пластинами:

$$E_1 = E'_2 - E'_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2\varepsilon_0}$$

Вне пластин:

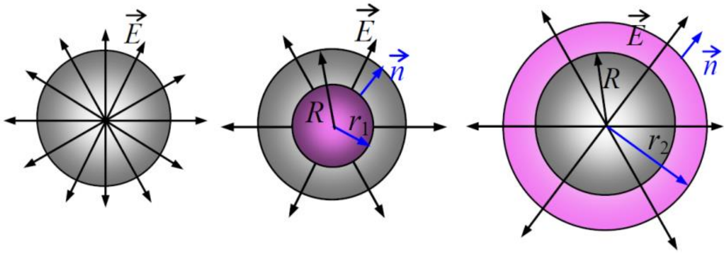
$$E_2 = E'_2 + E'_1 = \frac{\sigma_2 + \sigma_1}{2\varepsilon_0}$$



E_1 = 113 В/м.

E_2 = 226 В/м.

Задача 3. Эбонитовый сплошной шар радиусом R=5 см несет заряд, равномерно распределенный с объемной плотностью ρ=10 нКл/м^3. Определить напряженность E электрического поля в точках: 1) на расстоянии r_1=3 см от центра сферы; 2) на поверхности сферы; 3) на расстоянии r_2=10 см от центра сферы. Построить график зависимости $E(r)$.



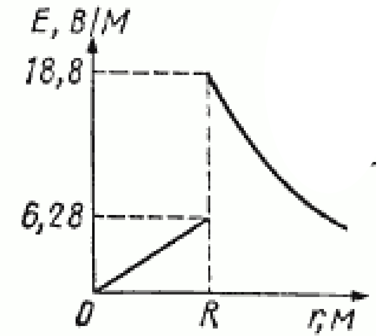
- Решение: $\oint_S E_n dS = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$

$$E\oint_S dS = ES = 4\pi r^2 E = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

1) $R > r$: $E_1 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1^2}$ $\quad q = \dfrac{4}{3}\pi\rho r_1^3$ $\quad E_1 = \dfrac{\rho r_1^3}{3\varepsilon\varepsilon_0 r_1^2} = \dfrac{\rho r_1}{3\varepsilon\varepsilon_0}$

2) $R = r$: $E_2 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2}$ $\quad q = \dfrac{4}{3}\pi\rho R^3$ $\quad E_2 = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon\varepsilon_0 R^2} = \dfrac{\rho R}{3\varepsilon\varepsilon_0}$

3) $R < r$: $E_3 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_2^2}$ $\quad q = \dfrac{4}{3}\pi\rho R^3$ $\quad E_3 = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon\varepsilon_0 r_2^2}$

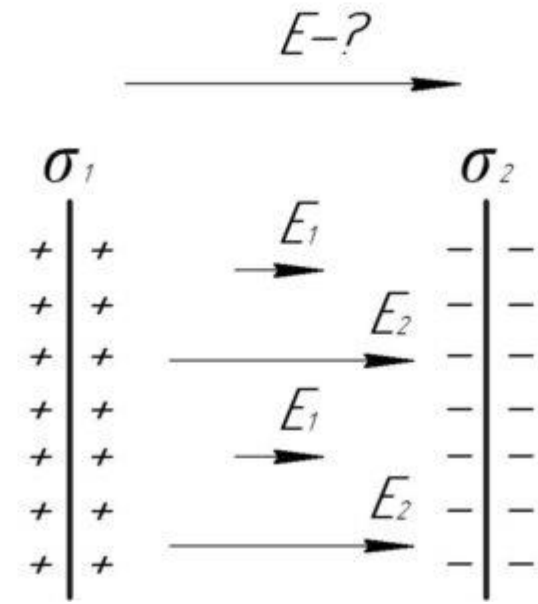


E_1 =3.77 В/м, E_2 = 6.28 В/м, E_3 = 4.72 В/м.

Задача 4. Две бесконечные параллельные пластины равномерно заряжены с поверхностной плотностью σ_1=10 нКл/м^2 и σ_2= –30 нКл/м^2. Определить силу взаимодействия между пластинами, приходящуюся на площадь S, равную 1 м^2.

- Решение:

Напряженность, создаваемая одной пластиной:

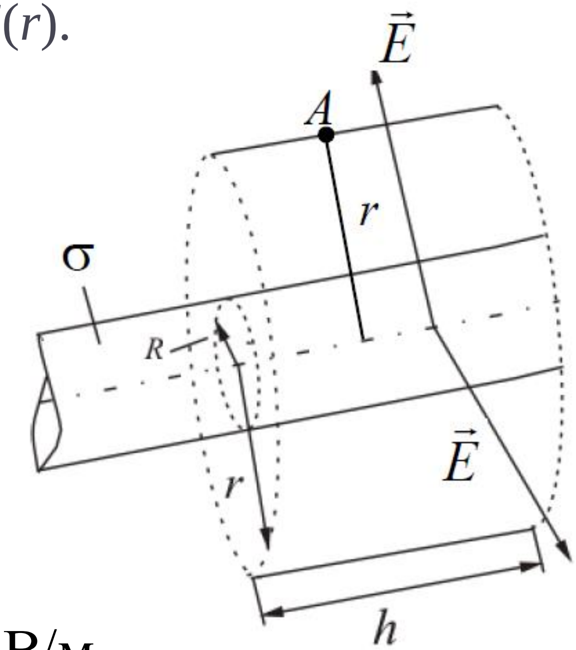


$$E = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} \qquad Q = |\sigma_2|S$$

Сила взаимодействия $\quad F = EQ = \dfrac{|\sigma_1||\sigma_2|S}{2\varepsilon_0}$

$$F = 17 \cdot 10^{-6}\ \text{Н}$$

Задача 5. Длинный парафиновый цилиндр радиусом R=2 см несет заряд, равномерно распределенный по объему с объемной плотностью ρ=10 нКл/м^3. Определить напряженность E электрического поля в точках, находящихся от оси цилиндра на расстоянии: 1) r_1=1 см; 2) r_2=3 см. Обе точки равноудалены от концов цилиндра. Построить график зависимости $E(r)$.



- Решение:

Используем теорему Гаусса: $\oint\limits_S EdS = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$

$E_1 S_1 = \dfrac{Q_1}{\varepsilon\varepsilon_0}$ $\quad Q_1 = \rho V_1 = \rho\pi r_1^2 l$ - заряд на выбранной гауссовой поверхности.

$S_1 = 2\pi r_1 (r_1 + l)$ - площадь поверхности.

Т.к. цилиндр бесконечно длинный, то $S_1 \approx 2\pi r_1 l$

$$E_1 = \frac{Q_1}{S_1\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\rho\pi r_1^2 l}{\varepsilon\varepsilon_0 2\pi r_1 l} = \frac{\rho r_1}{2\varepsilon\varepsilon_0} \qquad E_1 = 2.83\,\text{В/м}$$

Рассмотрим поверхность радиуса r_2:

$$E_2 S_2 = \frac{Q_2}{\varepsilon_0} \qquad Q_2 = \rho V = \rho\pi R^2 l \qquad S_2 = 2\pi r_2 (r_2 + l) \approx 2\pi r_2 l$$

$$E_2 = \frac{\rho\pi R^2 l}{\varepsilon_0 2\pi r_2 l} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r_2} \qquad E_2 = 7.55\,\text{В/м}$$

Задача 6. Две концентрические металлические заряженные сферы радиусами R_1=6 см и R_2=10 см несут соответственно заряды Q_1=1 нКл и Q_2=-0,5 нКл. Найти напряженности E поля в точках, отстоящих от центра сфер на расстояниях r_1=5 см, r_2=9 см, r_3=15 см. Построить график зависимости $E(r)$.

- Решение:

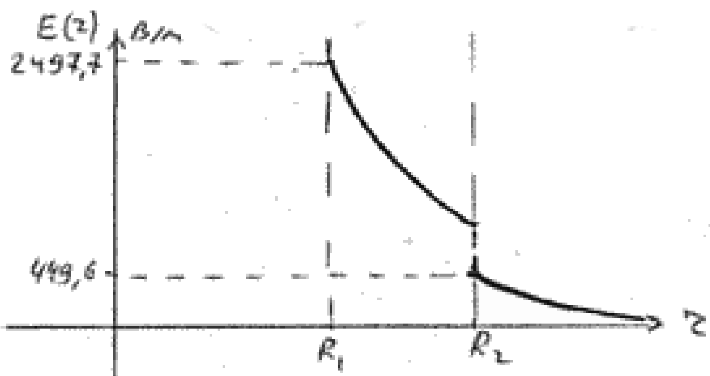
По теореме Гаусса: $$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum Q_i$$

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = ES = E\cdot 4\pi r^2 \qquad E = \frac{\sum Q_i}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Внутри сферы радиуса $r_1<R_1$ заряда нет. $\Rightarrow E_1 = 0$

Для сферы радиуса $R_1<r_2<R_2$ заряд равен Q_1. $\Rightarrow E_2 = \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}$

Для сферы радиуса $r_3>R_2$ заряд равен Q_1+Q_2. $\Rightarrow E_3 = \dfrac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_3^2}$



$$E_2(r_2 = R_1) \approx 2500\,\text{В/м}$$
$$E_2(r_2 = R_2) \approx 900\,\text{В/м}$$
$$E_3(r_3 = R_2) \approx 450\,\text{В/м}$$

Задача 7. Большая плоская пластина толщиной d=1 см несет заряд, равномерно распределенный по объему с объемной плотностью ρ=100 нКл/м^3. Найти напряженность E электрического поля: вблизи центральной части пластины вне ее, на малом расстоянии от поверхности.

- Решение:

Напряженность поля заряженной пластины: $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

$$\sigma = \rho d \quad \Rightarrow E = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0}$$

E=56.5 В/м.

Задача 8. Бесконечно длинная тонкостенная металлическая трубка радиусом R=2 см несет равномерно распределенный по поверхности заряд (σ=1 нКл/м^2). Определить напряженность E поля в точках, отстоящих от оси трубки на расстояниях r_1=1 см, r_2=3 см. Построить график зависимости $E(r)$.

- Решение:

$r = r_1$ $$\oint_{S_1} \vec{E}d\vec{S} = ES_1 = E \cdot 2\pi r_1 l = \frac{q}{\varepsilon_0} = 0 \qquad \Rightarrow E_1 = 0$$

$r = r_2$ $$\oint_{S_2} \vec{E}d\vec{S} = ES_2 = E \cdot 2\pi r_2 l = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma \cdot 2\pi R l}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E_2 = \frac{\sigma \cdot 2\pi R l}{2\pi \varepsilon_0 r_2 l} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r_2} \qquad E_2 = 75.33\,\text{В/м}$$

Задача 9. Очень длинная тонкая прямая проволока несет заряд, равномерно распределенный по всей ее длине. Вычислить линейную плотность τ заряда, если напряженность *E* поля на расстоянии *a*=0,5 м от проволоки против ее середины равна 200 В/м.

- Решение:

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = ES = E \cdot 2\pi al = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\tau l}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\tau l}{2\pi\varepsilon_0 al} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 a} = 2k\frac{\tau}{a}$$

$$\tau = 2\pi\varepsilon_0 aE$$

$$\tau = 5.56\text{нКл/м}$$