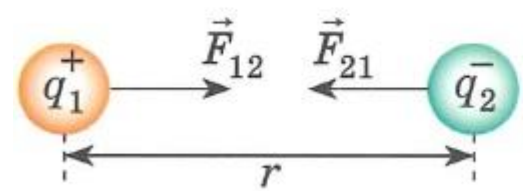
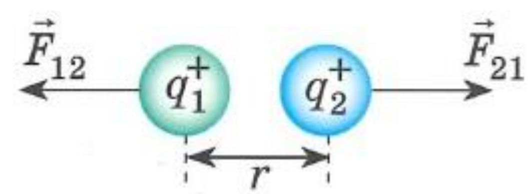
Закон Кулона.
Поле распределенного заряда.

- Закон Кулона – закон, описывающий силы взаимодействия между неподвижными точечными электрическими зарядами.
- Сила взаимодействия двух точечных зарядов в вакууме направлена вдоль прямой, соединяющей эти заряды, пропорциональна их величине и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Она является силой притяжения, если знаки зарядов разные, и силой отталкивания, если эти знаки одинаковы.

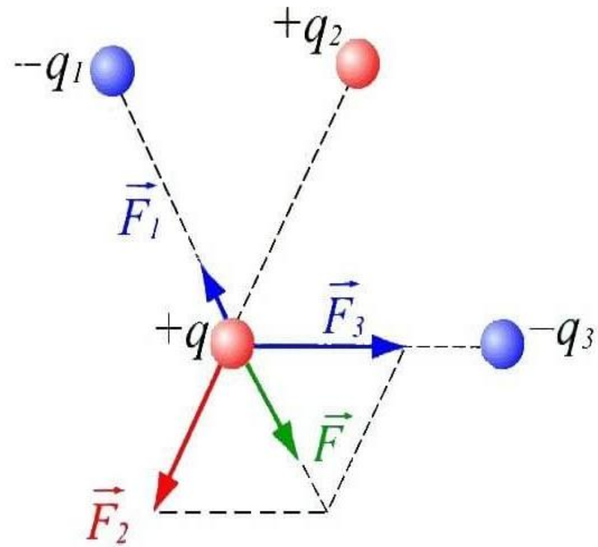
$$\vec{F}_{12} = -k\,\frac{q_1 q_2}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$$



$$\left|\vec{F}_{12}\right| = \left|\vec{F}_{12}\right| = F = k\,\frac{q_1 q_2}{r^2}$$



- <u>Принцип суперпозиции</u>
- Результирующая сила $\vec{F}$, с которой действует на заряд q все N зарядов q_i, определяется выражением:



$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i ,$$

где $\vec{F}_i$ - сила, с которой действует на заряд q заряд q_i в отсутствии остальных (N-1) зарядов.

Следовательно, можно вычислить силу взаимодействия между зарядами, сосредоточенными на телах конечных размеров. Для этого нужно разбить каждый из зарядов на столь малые заряды dq, чтобы их можно было считать точечными, вычислить силу взаимодействия между зарядами dq, взятыми попарно, и затем произвести векторное сложение этих сил.

Закон Кулона верен, если выполняется:

- Точечность зарядов, т.е. расстояние между заряженными телами должно быть много больше их размеров;
- Неподвижность зарядов (иначе вступают в силу дополнительные эффекты: сила Лоренца, магнитное поле);
- Расположение зарядов в вакууме (с некоторыми корректировками закон справедлив также для взаимодействующих зарядов в среде).

Закон Кулона справедлив для расстояний от 10^{-15} м до нескольких км.

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

Единица измерения заряда $[q]$ = Кл.

k=8,98755·10^9 Н·м^2/Кл^2

В однородном изотропном веществе в знаменатель формулы добавляется диэлектрическая проницаемость среды ε:

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}$$

- Электрическое поле – векторное поле, существующее вокруг тел или частиц, обладающих электрическим зарядом (а также возникающее при изменении магнитного поля).
- Оно может быть обнаружено благодаря его силовому воздействию на заряженные тела.
- Неподвижный заряд q создает электрическое поле, обнаружить его можем точечным “пробным” зарядом $q_{\text{р}}$.
- На пробный заряд действует сила:

$$\vec{F} = q_p \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e}_r \right)$$

Она зависит от величин, определяющих поле (q и r) и от величины пробного заряда $q_{\text{р}}$.

- Введем величину $\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q_p}$ - напряженность электрического поля в данной точке.

Она зависит лишь от величин q и r, определяющих поле в данной точке.

- Напряженность электрического поля – векторная физическая величина, характеризующая электрическое поле в данной точке и численно равная отношению силы, действующей на неподвижный точечный заряд, помещенный в данную точку поля, к величине этого заряда.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{e}_r$$

Единица измерения напряженности [E] = В/м

- Принцип суперпозиции:

$$\vec{E} = \sum \vec{E}_i$$

Напряженность поля системы зарядов равна векторной сумме напряженностей полей, которые создавал бы каждый из зарядов системы в отдельности.

Линии напряженности могут начинаться или заканчиваться лишь на зарядах либо уходить в бесконечность.

- Закон сохранения заряда:

$$\sum q_i = const$$

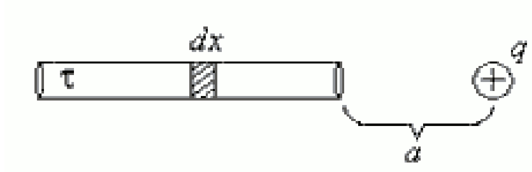
Алгебраическая сумма зарядов, входящих в изолированную систему, остается постоянной.

Поток вектора напряженности электрического поля через произвольную поверхность S, помещенную в однородное поле:

$$\Phi_E = \int_S E\cos\alpha dS = \int_S E_n dS$$

Задача 1. Тонкий длинный стержень равномерно заряжен с линейной плотностью τ заряда, равной 10 мкКл/м. На продолжении оси стержня на расстоянии a=20 см от его конца находится точечный заряд q=10 нКл. Определить силу взаимодействия заряженного стержня и точечного заряда

- <u>Решение:</u>



$$dF = k\frac{qdq}{x^2} \qquad dq = \tau dx \qquad dF = k\frac{q\tau dx}{x^2}$$

Считаем, что стержень бесконечно длинный.

$$F = \int dF$$

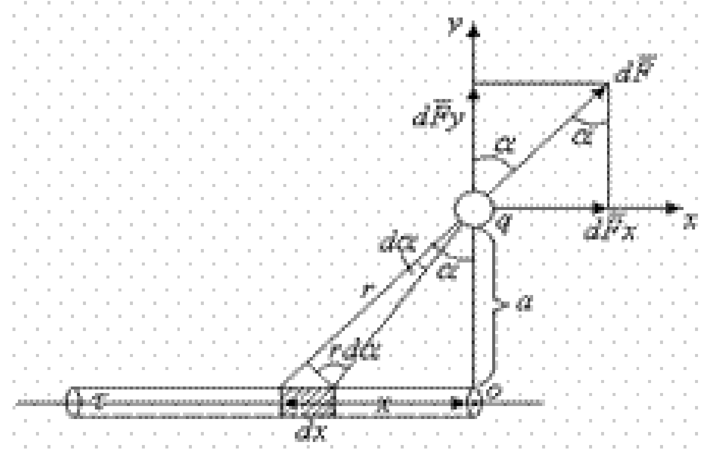
(алгебраическая сумма, т.к. все вектора $\overrightarrow{dF}$ направлены одинаково)

$$F = \int_a^\infty k\frac{q\tau dx}{x^2} = kq\tau\int_a^\infty \frac{dx}{x^2} = kq\tau\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_a^\infty = \frac{kq\tau}{a}$$

$$F = \frac{9\cdot10^9\cdot10\cdot10^{-6}\cdot10\cdot10^{-9}}{0.2} = 4.5\cdot10^{-3}\text{Н} = 4.5\ \text{мН}$$

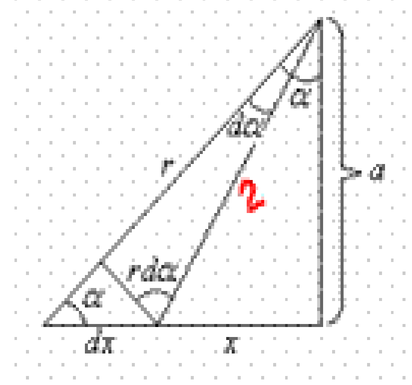
Задача 2. Тонкий очень длинный стержень равномерно заряжен с линейной плотностью τ заряда, равной 10 мкКл/м. На перпендикуляре к оси стержня, восстановленном из его конца, находится точечный заряд q=10 нКл. Расстояние a от заряда до конца стержня равно 0,2 м. Найти силу взаимодействия заряженного стержня и точечного заряда.

- <u>Решение:</u>



Выделим на стержне элементарный участок длиной dx. При взаимодействии с зарядом q этот элемент можно рассматривать как точечный заряд, величина которого $dq = \tau\, dx$.

$$dF = \frac{qdq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q\tau dx}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



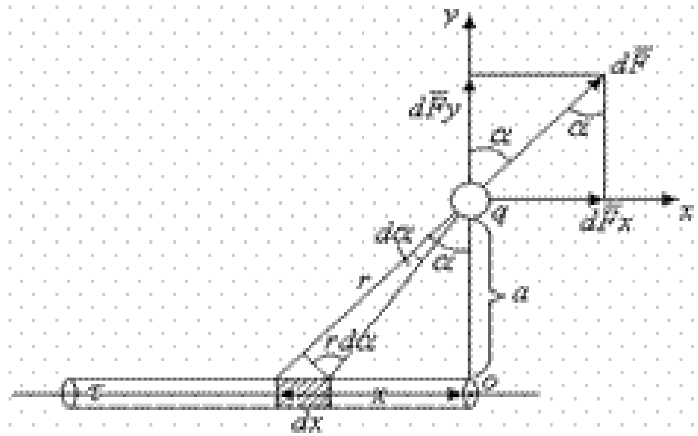
Из рисунка видно, что:

$$cos\alpha = \frac{a}{r} \Rightarrow r = \frac{a}{cos\alpha}$$

$$cos\alpha = \frac{rd\alpha}{dx} \Rightarrow dx = \frac{rd\alpha}{cos\alpha} = \frac{ad\alpha}{cos^2\alpha}$$

$$dF = \frac{q\tau a cos^2\alpha d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 cos^2\alpha\, a^2} = \frac{q\tau d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

Задача 2. Тонкий очень длинный стержень равномерно заряжен с линейной плотностью τ заряда, равной 10 мкКл/м. На перпендикуляре к оси стержня, восстановленном из его конца, находится точечный заряд q=10 нКл. Расстояние a от заряда до конца стержня равно 0,2 м. Найти силу взаимодействия заряженного стержня и точечного заряда.



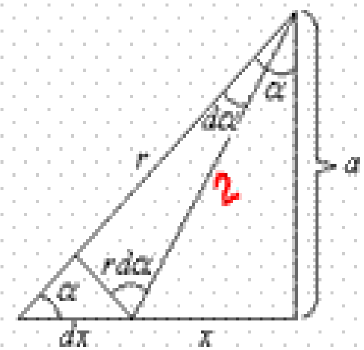
- <u>Решение:</u>

Разложим вектор $\overrightarrow{dF}$ на две составляющие: параллельную оси стержня $\overrightarrow{dF_x}$ и перпендикулярную оси стержня $\overrightarrow{dF_y}$.

Результирующий вектор силы взаимодействия заряда qсо стержнем определяется выражением:

$$\vec{F} = \int \overrightarrow{dF_x} + \int \overrightarrow{dF_y} = \overrightarrow{F_x} + \overrightarrow{F_y}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$



$$dF_x = dF sin\alpha$$
$$dF_y = dF cos\alpha$$

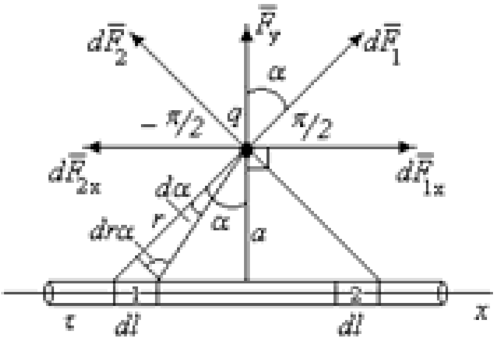
$$F_x = \int dF sin\alpha = \frac{q\tau}{4\pi\varepsilon_0 a}\int_0^{\pi/2} sin\alpha d\alpha = \frac{q\tau}{4\pi\varepsilon_0 a}(-cos\alpha)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{q\tau}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

$$F_y = \int dF cos\alpha = \frac{q\tau}{4\pi\varepsilon_0 a}\int_0^{\pi/2} cos\alpha d\alpha = \frac{q\tau}{4\pi\varepsilon_0 a}(sin\alpha)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{q\tau}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

$$\boxed{F = \sqrt{2}\frac{q\tau}{4\pi\varepsilon_0 a}}$$

$$F = 6.36 \text{ мН}$$

Задача 3. Тонкий длинный стержень равномерно заряжен с линейной плотностью τ=10 мкКл/м. Какова сила, действующая на точечный заряд q=10 нКл, находящийся на расстоянии a=20 см от стержня, вблизи его середины.



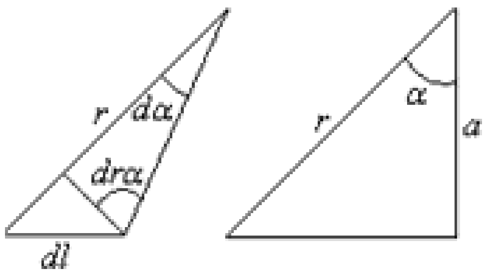
Решение:

$$dF = k\frac{qdq}{r^2} \qquad dq = \tau dl \qquad \Rightarrow dF = k\frac{q\tau dl}{r^2}$$

$$dl = \frac{rd\alpha}{cos\alpha} \qquad r = \frac{a}{cos\alpha} \qquad \Rightarrow dl = \frac{ad\alpha}{cos^2\alpha}$$

dF_{1x} и dF_{2x} взаимоуничтожаются.

$|dF_{1y}| = |dF_{2y}|$.



$$dF_y = dFcos\alpha = k\frac{q\tau dl}{r^2}cos\alpha = k\frac{q\tau cos\alpha d\alpha}{a}$$

$$F_y = \int dF_y = \int_0^\beta k\frac{q\tau cos\alpha d\alpha}{a} = k\frac{q\tau}{a}sin\beta$$

Т.к. стержень бесконечно длинный, то $\beta\rightarrow\infty$.

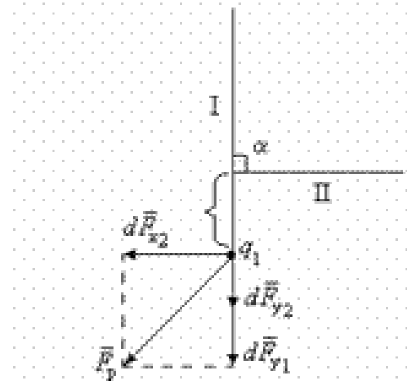
$$F_y = k\frac{q\tau}{a} \qquad \boxed{F = 2F_y = 2k\frac{q\tau}{a}} \qquad F = 9\cdot10^{-3}\ \text{Н}$$

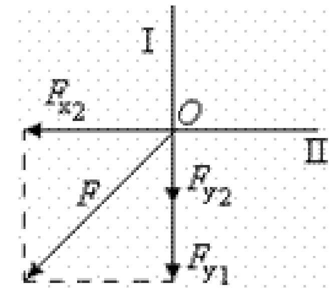
Задача 4. Тонкая бесконечная нить согнута под углом 90°. Нить несет заряд, равномерно распределенный с линейной плотностью τ=1мкКл/м. Определить силу, действующую на точечный заряд q_1=0,1 мкКл, расположенный на продолжении одной из сторон и удаленный от вершины угла на a=50 см.

- <u>Решение:</u>

F_1 – сила, действующая со стороны части I.

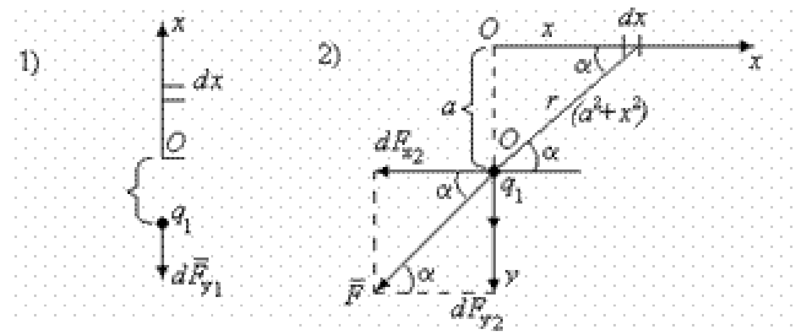
F_2 – сила, действующая со стороны части II.





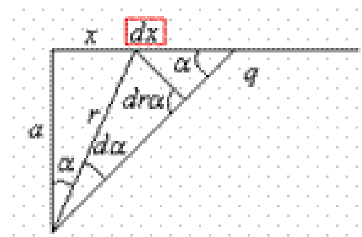
См. задачу 1: в ней мы нашли модуль силы

$$F_1 = F_{1x} = \frac{kq_1\tau}{a}$$



См. задачу 2: в ней мы нашли модуль силы

$$F_2 = \frac{\sqrt{2}kq_1\tau}{a} \qquad F_{2x} = \frac{kq_1\tau}{a},\ F_{2y} = \frac{kq_1\tau}{a}$$



$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

$$F_x = F_{1x} + F_{2x} = 2\frac{kq_1\tau}{a}$$

$$F_y = F_{2y} = \frac{kq_1\tau}{a}$$

$$\boxed{F = \sqrt{5}\frac{kq_1\tau}{a}}$$

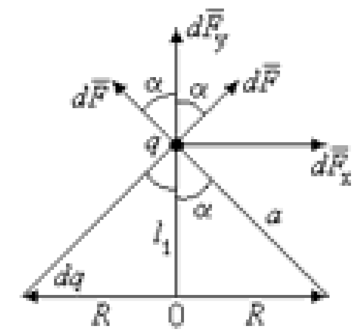
$$F = 4.02 \text{ мН}$$

Задача 5. Тонкое кольцо радиусом R=10 см несет равномерно распределенный заряд q_1=0,1 мкКл. На перпендикуляре к плоскости кольца, восстановленном из его середины, находится точечный заряд q=10 нКл. Определить силу, действующую на точечный заряд q со стороны заряженного кольца, если он удален от центра кольца на 1) l_1=20 см. 2) l_2=2 м.

- Решение:

$$dF = k\frac{qdq}{a^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{l_1}{a}$$



Сумма всех dF_{x1} и dF_{x2} равна нулю.

$dF_{y1} = dF_{y2} = dF_y$.

$$dq = \tau dl$$

$$l = 2\pi R$$

$$dF_y = dF\cos\alpha \Rightarrow F_y = \int_0^l dF\cos\alpha$$

$$a = \sqrt{R^2 + l_1^2}$$

$$\tau l = 2\pi R\tau = q_1$$

$$F_y = \int_0^{2\pi R} \frac{kq\tau l_1 dl}{a^3} = \frac{kq\tau l_1}{a^3}\int_0^{2\pi R} dl = \frac{kq\tau l_1 2\pi R}{a^3}$$

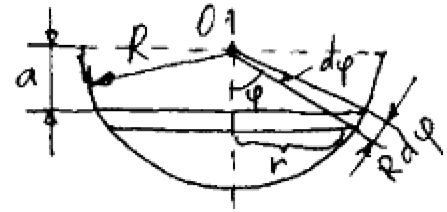
$$F = F_y = \frac{kql_1 \cdot 2\pi R\tau}{(R^2 + l_1^2)^{3/2}} = \frac{kqq_1}{(R^2 + l_1^2)^{3/2}}$$

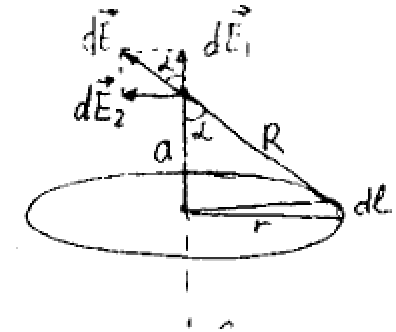
1) $F = 0.16$ мН
2) $F = 2.25$ мкН

Задача 6. Полусфера несет заряд, равномерно распределенный с поверхностной плотностью σ=1 нКл/м2. Найти напряженность электрического поля в геометрическом центре полусферы.

- <u>Решение:</u>

Определим напряженность поля, создаваемого кольцом в точке, удаленной от всех точек кольца на расстоянии *R* (в геометрическом центре полусферы) и от плоскости кольца на расстоянии a.





Выделим элемент кольца *dl* с зарядом $dq = \dfrac{qdl}{2\pi r}$

Напряженность поля в данной точке: $dE = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \dfrac{qdl}{8\pi^2\varepsilon_0 R^2 r}$

Из рисунка видно, что: $r = \sqrt{R^2 - a^2} = R sin\varphi \quad \Rightarrow dE = \dfrac{qdl}{8\pi^2\varepsilon_0 R^2\sqrt{R^2 - a^2}}$

Разложим вектор $\overrightarrow{dE}$ накомпоненты dE_xи dE_y.

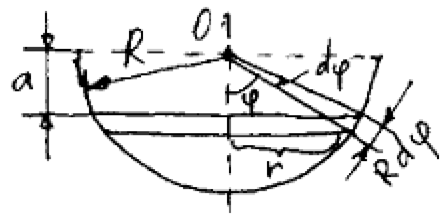
$$E = \int dE_x + \int dE_y \qquad \int dE_x = 0 \qquad \Rightarrow E = \int dE_y$$

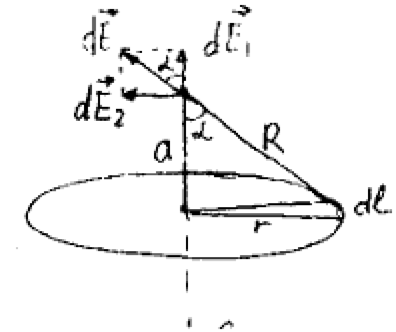
$$cos\varphi = \frac{a}{R} \qquad dE_y = dE cos\varphi = \frac{a}{R} dE$$

Задача 6. Полусфера несет заряд, равномерно распределенный с поверхностной плотностью σ=1 нКл/м2. Найти напряженность электрического поля в геометрическом центре полусферы.

- <u>Решение:</u>

$$E = \int_0^{2\pi r} \frac{a}{R} \cdot \frac{q dl}{8\pi^2 \varepsilon_0 R^2 \sqrt{R^2 - a^2}}$$
$$= \frac{2\pi r a q}{8\pi^2 \varepsilon_0 R^3 \sqrt{R^2 - a^2}} = \frac{aq}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$





- напряженность поля от кольца с зарядом *q*.

Разобьем полусферу на тонкие кольца с зарядом $q=\sigma dS=2\pi r\, \sigma\, R d\varphi$.

Тогда напряженность, создаваемая тонким кольцом в центре полусферы:

$$\Rightarrow dE = \frac{aq}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

Здесь *q* – заряд кольца.

$$r = R\sin\varphi$$
$$a = R\cos\varphi$$

$$dE = \frac{qR\cos\varphi}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \frac{2\pi r \sigma R \cos\varphi d\varphi}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{2\pi\sigma R^2 \sin\varphi\cos\varphi d\varphi}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\sigma \sin\varphi\cos\varphi d\varphi}{2\varepsilon_0}$$

$$E = \int_0^{\pi/2} \frac{\sigma\sin\varphi\cos\varphi d\varphi}{2\varepsilon_0} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\sin 2\varphi d\varphi = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$$

$$E = 28.25 \text{ В/м}$$

Задача 7. Очень длинная тонкая прямая проволока несет заряд, равномерно распределенный по всей ее длине. Вычислить линейную плотность τ заряда, если напряженность E поля на расстоянии a=0,5 м от проволоки против ее середины равна 200 В/м.

- Решение:

$$\mathrm{d}E = k\frac{dq}{r^2} = k\frac{\tau dx}{r^2}$$

$$cos\alpha = \frac{a}{r} \Rightarrow r = \frac{a}{cos\alpha}$$

$$cos\alpha = \frac{rd\alpha}{dx} \Rightarrow dx = \frac{rd\alpha}{cos\alpha} = \frac{ad\alpha}{cos^2\alpha}$$

$$\mathrm{d}E = k\frac{\tau a d\alpha}{r^2 cos^2\alpha} = k\frac{\tau a cos^2\alpha d\alpha}{a^2 cos^2\alpha} = k\frac{\tau d\alpha}{a}$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$$

$$E_x = \int dE_x = \int dE \sin\alpha = 0$$

$$E_y = \int dE_y = \int dE \cos\alpha$$

$$E = E_y = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{k\tau\cos\alpha d\alpha}{a} = \frac{k\tau\sin\alpha}{a}\bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2k\tau}{a}$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{Ea}{2k} \qquad \tau = 5.56\ \text{нКл/м}$$

Задача 8. Бесконечно длинная тонкостенная металлическая труба радиусом R = 2 см равномерно заряжена с поверхностной плотностью заряда σ = 1 нКл/м^2. Определить напряженность поля в точках, отстоящих от оси трубы на расстояниях: 1) r_1 = 1 см; 2) r_2 = 3 см.

- <u>Решение:</u> Воспользуемся **теоремой Гаусса**: поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность пропорционален заряду, заключенному в ней:

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

В качестве замкнутых поверхностей через которые следует вычислять поток поля следует возьмём соосный цилиндр высотой L. Для оснований цилиндра – $E = 0$, для боковой поверхности зависит от расстояния r. Из соображения симметрии следует, что E в любой точке будет направлена вдоль радиуса, перпендикулярно оси цилиндра. В этом случае площадь цилиндрического контура на расстоянии x от центра $S = 2\pi xL$

$$\Rightarrow E \cdot 2\pi xL = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 xL} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 x}$$

Заряд q для двух случаев:

1. $0 < x < R$, т.е внутри трубки, заряд внутри равен нулю, т.е. $E_1 = 0$.
2. $x \geq R$, т.е. вне трубки, заряд внутри равен заряду на трубке $E_2 = \dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0 r_2}$

$$E_2 = 75.3\ \text{В/м}$$