

УТВЕРЖДАЮ  
Зам. директора по УР ЮТИ ТПУ

\_\_\_\_\_ В.Л. Бибик  
« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2015 г.

## **ЭЛЕКТРОТЕХНИКА**

Задания и методические указания  
к контрольной работе  
для студентов

Издательство  
Юргинского технологического института (филиала)  
Томского политехнического университета  
2015

УДК 621.3

Электротехника: Задания и методические указания к контрольной работе для студентов. – Юрга: Изд-во Юргинского технологического института (филиала) Томского политехнического университета, 2015 г. – 87 с.

УДК 621.3  
ББК 31.2

Методические указания рассмотрены и рекомендованы  
к изданию методическим семинаром кафедры  
СП ЮТИ ТПУ

«\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2015 г.

Зав. кафедрой СП  
кандидат технических наук,  
доцент

\_\_\_\_\_ *Е.А. Зернин*

Председатель  
учебно-методической комиссии

\_\_\_\_\_ *Д.П. Ильященко*

*Рецензент*

Старший преподаватель СП ЮТИ ТПУ  
*А.В. Филонов*

© ФГАОУ ВО НИ ТПУ Юргинский  
технологический институт (филиал), 2015  
© Степанов А.П., 2015

## **ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ**

Целью контрольной работы является проверка усвоения студентами курса «Электротехника и электроника». При выполнении работы нужно придерживаться следующих указаний:

- Задание следует выполнять в тетради или на листах формата А4.
- На титульном листе контрольной работы должно быть указано наименование института и кафедры, группа, фамилия, инициалы, дата и номер варианта.
- При оформлении каждой задачи следует приводить исходную схему с принятыми буквенными обозначениями и числами заданных величин.
- Все рисунки, схемы и графики должны быть выполнены аккуратно, в масштабе.
- При оформлении контрольной работы нужно указать все необходимые расчетные формулы. Результаты вычислений записывать с точностью до сотых.

### ЗАДАЧА № 1

Для электрической цепи, изображенной на рис. 1, по заданным в таблице 1 сопротивлениям и ЭДС, определить эквивалентное (входное) сопротивление цепи относительно зажимов источника питания, токи и падения напряжений во всех ветвях цепи. Составить баланс мощностей.

*Примечание: Методику расчета смотри в приложении А*

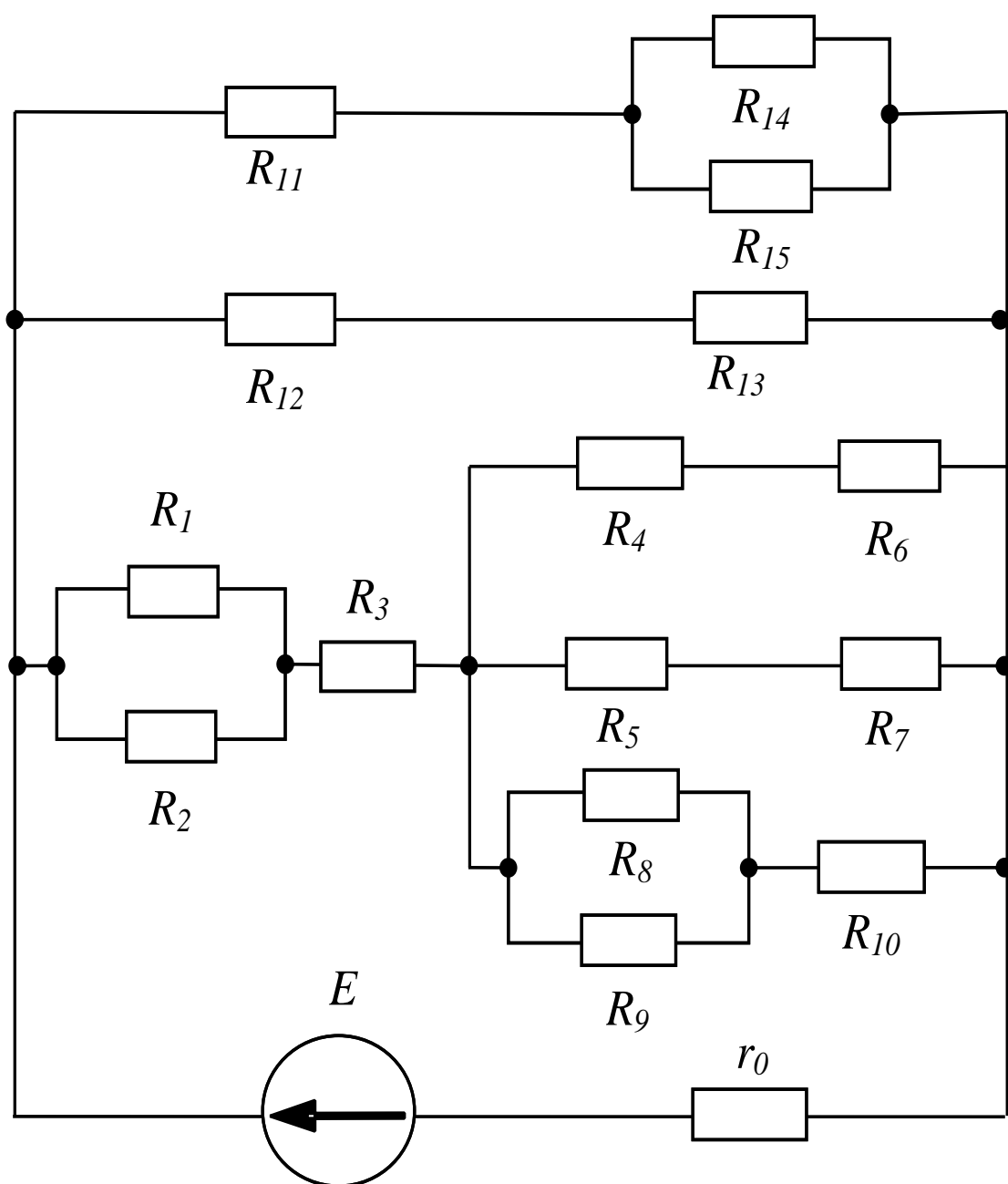


Рис. 1. Расчетная схема цепи

Таблица 1

Вариант	$E$ В	$r_0$ Ом	$R_1$ Ом	$R_2$ Ом	$R_3$ Ом	$R_4$ Ом	$R_5$ Ом	$R_6$ Ом	$R_7$ Ом	$R_8$ Ом	$R_9$ Ом	$R_{10}$ Ом	$R_{11}$ Ом	$R_{12}$ Ом	$R_{13}$ Ом	$R_{14}$ Ом	$R_{15}$ Ом
01	60	0,2	2	8	6	2	3	2	4	$\infty$	6	2	3	0	5	2	8
02	60	0,2	2	3	7	4	9	1	5	7	$\infty$	2	3	$\infty$	8	5	9
03	12	0,2	4	2	0	3	9	5	0	7	9	6	4	2	9	8	7
04	12	0,2	8	4	5	6	0	9	8	9	8	2	3	2	$\infty$	8	7
05	12	0,1	6	4	5	4	$\infty$	7	9	2	3	5	7	2	0	6	8
06	80	0,1	4	4	6	7	$\infty$	1	2	3	4	5	$\infty$	9	7	8	8
07	80	0,1	9	8	7	6	5	0	0	4	3	2	1	2	7	8	9
08	80	0,4	2	4	6	8	9	2	3	6	7	9	$\infty$	1	2	0	5
09	80	0,3	5	4	3	5	1	7	9	5	6	8	0	2	$\infty$	9	8
10	80	0,1	7	5	7	1	0	3	9	4	5	9	$\infty$	1	3	5	6
11	30	0,2	5	4	1	6	9	3	5	$\infty$	9	2	4	0	5	7	8
12	30	0,3	8	5	6	$\infty$	3	9	4	$\infty$	6	1	3	0	5	$\infty$	8
13	30	0,1	2	2	7	$\infty$	5	9	6	5	$\infty$	3	5	1	2	1	6
14	30	0,2	9	$\infty$	4	5	8	9	$\infty$	1	8	2	7	3	6	5	4
15	30	0,3	1	0	5	6	7	9	1	2	0	4	5	7	$\infty$	8	9
16	30	0,4	4	4	6	7	$\infty$	9	1	4	7	8	$\infty$	3	2	4	6
17	50	0,2	6	5	4	$\infty$	3	0	2	2	5	6	4	3	$\infty$	8	6
18	50	0,2	2	9	6	2	3	2	4	$\infty$	6	2	3	$\infty$	5	2	3
19	50	0,3	8	1	4	6	8	9	0	3	1	5	$\infty$	3	0	5	6
20	50	0,2	5	4	5	$\infty$	7	9	3	1	7	3	$\infty$	7	3	9	4
21	20	0,1	4	8	6	2	3	1	2	$\infty$	7	1	3	0	3	9	8
22	20	0,1	6	4	$\infty$	5	0	9	4	5	2	1	7	$\infty$	5	4	3
23	20	0,4	7	3	4	7	$\infty$	8	4	8	0	1	7	8	$\infty$	3	5
24	20	0,3	9	3	7	$\infty$	3	9	1	2	7	4	5	6	2	1	7
25	20	0,2	2	5	8	9	2	$\infty$	4	0	1	5	9	7	$\infty$	2	6
26	80	0,1	7	0	2	4	6	8	9	6	2	4	$\infty$	1	8	3	0
27	80	0,3	4	5	8	2	5	9	5	2	$\infty$	5	2	8	3	5	0
28	80	0,4	5	6	$\infty$	5	0	7	9	1	3	3	2	7	4	6	2
29	45	0,2	9	5	8	2	$\infty$	9	4	8	3	6	1	8	5	$\infty$	3
30	45	0,1	2	4	5	$\infty$	8	9	2	3	5	8	1	2	9	$\infty$	5
31	14	0,7	3	2	2	4	4	$\infty$	5	5	5	6	$\infty$	7	7	0	8
32	15	0,5	2	1	3	$\infty$	4	5	5	6	8	8	9	0,6	0	3	$\infty$
33	16	0,4	2	$\infty$	0	1	2	3	3	3	4	4	$\infty$	5	5	6	8
34	15	0,5	1	2	3	4	4		5	5	5	6	0	7	7	3	4
35	12	0,5	2	2	0	3	3	0	4	4	4	5	5	$\infty$	6	6	2
36	10	0,5	3	3	4	$\infty$	5	5	6	6	2	2	0	7	7	$\infty$	8
37	15	0,2	6	6	0	5	5	$\infty$	4	4	3	3	1	2	0	5	$\infty$
38	14	0,4	8	8	6	6	5	5	$\infty$	4	4	2	2	0	3	3	$\infty$
39	30	0,3	9	9	8	$\infty$	7	7	7	6	5	4	3	$\infty$	2	1	0
40	15	0,3	2	3	5	$\infty$	2	3	4	5	5	6	2	$\infty$	2	1	0
41	12	0,4	3	5	6	0	$\infty$	2	1	1	5	5	6	6	2	$\infty$	7
42	10	0,3	2	2	$\infty$	5	6	6	2	3	4	0	5	5	6	6	$\infty$
43	15	0,4	3	3	3	$\infty$	4	5	6	7	7	5	4	$\infty$	0	5	5
44	12	0,2	4	4	$\infty$	5	10	5	4	5	6	7	0	7	8	$\infty$	5
45	10	0,3	2	2	3	3	$\infty$	5	0	6	6	6	7	7	8	$\infty$	8
46	15	0,2	5	4	5	$\infty$	2	0	$\infty$	5	5	6	6	8	8	9	4
47	10	0,4	3	3	3	6	0	$\infty$	5	5	6	6	4	4	6	5	$\infty$

Продолжение таблицы 1

Вариант	$E$ В	$r_0$ Ом	$R_1$ Ом	$R_2$ Ом	$R_3$ Ом	$R_4$ Ом	$R_5$ Ом	$R_6$ Ом	$R_7$ Ом	$R_8$ Ом	$R_9$ Ом	$R_{10}$ Ом	$R_{11}$ Ом	$R_{12}$ Ом	$R_{13}$ Ом	$R_{14}$ Ом	$R_{15}$ Ом
48	12	0,2	3	2	4	$\infty$	5	6	7	$\infty$	8	9	5	0	4	3	1
49	10	0,3	5	5	4	0	$\infty$	2	2	3	4	5	6	4	$\infty$	5	4
50	15	0,3	8	6	0	6	6	$\infty$	5	5	3	3	4	5	6	3	$\infty$

**Примечание:**

1. Если  $R = 0$  Ом, то резистор закоротить (т.е. убрать резистор, но провод оставить);

2. Если  $R = \infty$  Ом, то вместо резистора в электрической цепи – разрыв (т.е. убрать резистор из схемы вместе с проводом).

## ЗАДАЧА № 2

Для электрической схемы, приведенной на рис. 2-11:

- Составить уравнения для расчета цепи по методу законов Кирхгофа не решая получившуюся систему уравнений;
- Определить методом контурных токов токи в ветвях;
- Определить напряжения на всех потребителях;
- Проверить выполнение баланса мощностей;

Расчетные данные для этой задачи находятся в таблице 2.

*Примечание: Методику расчета смотри в приложениях Б и В.*

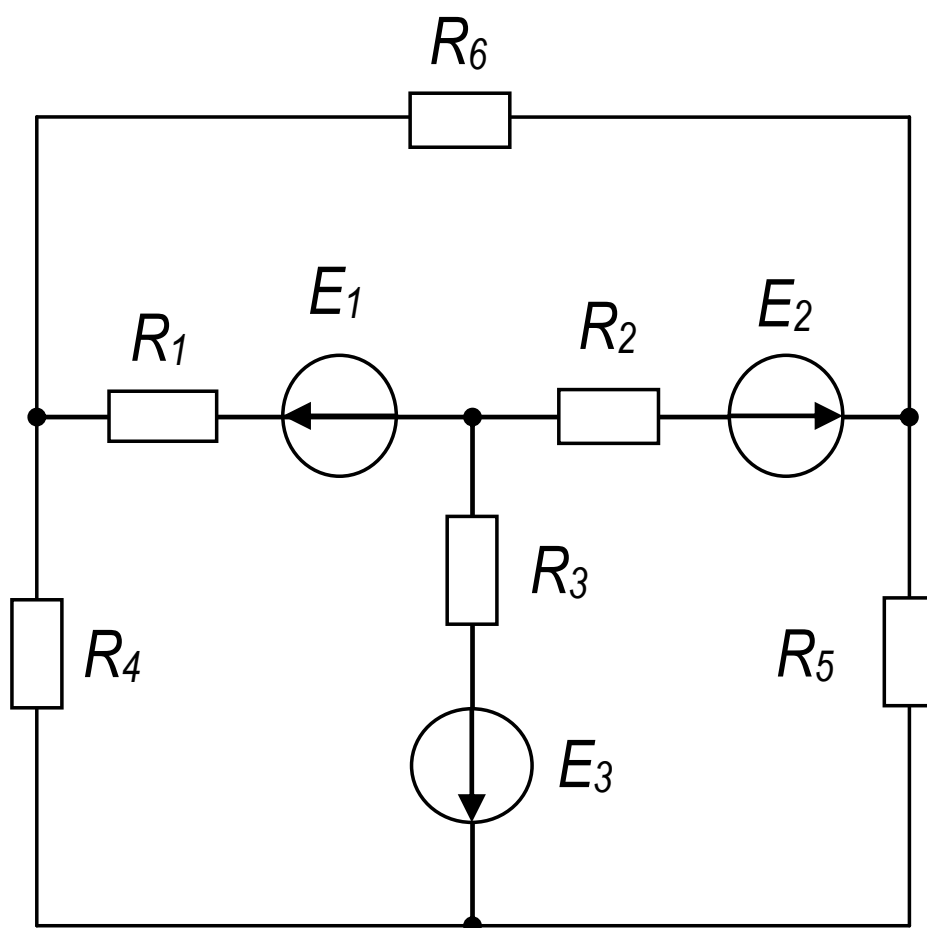
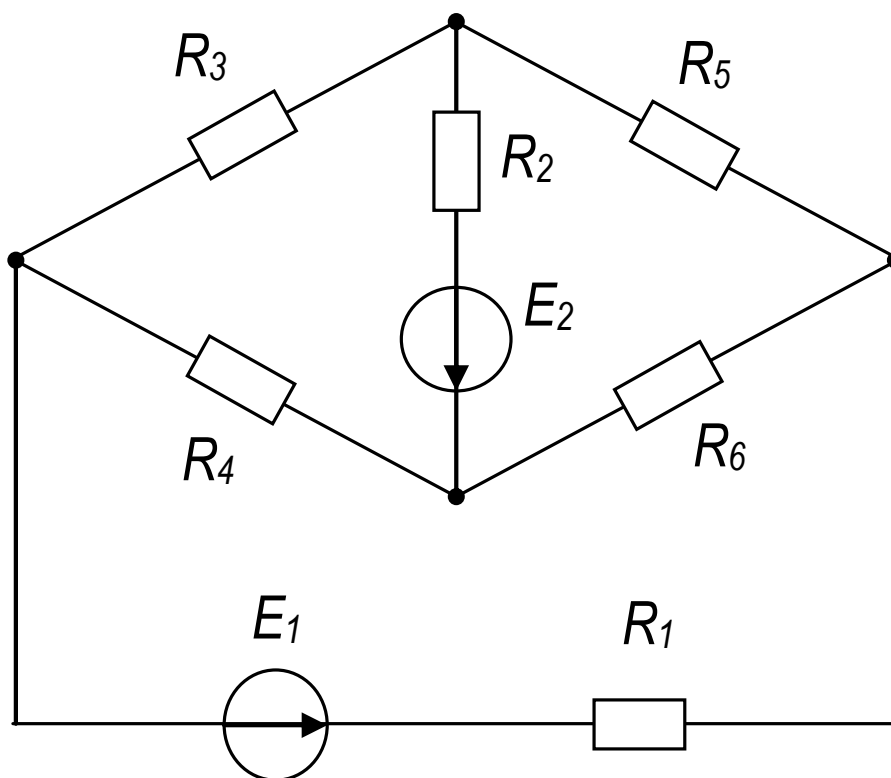
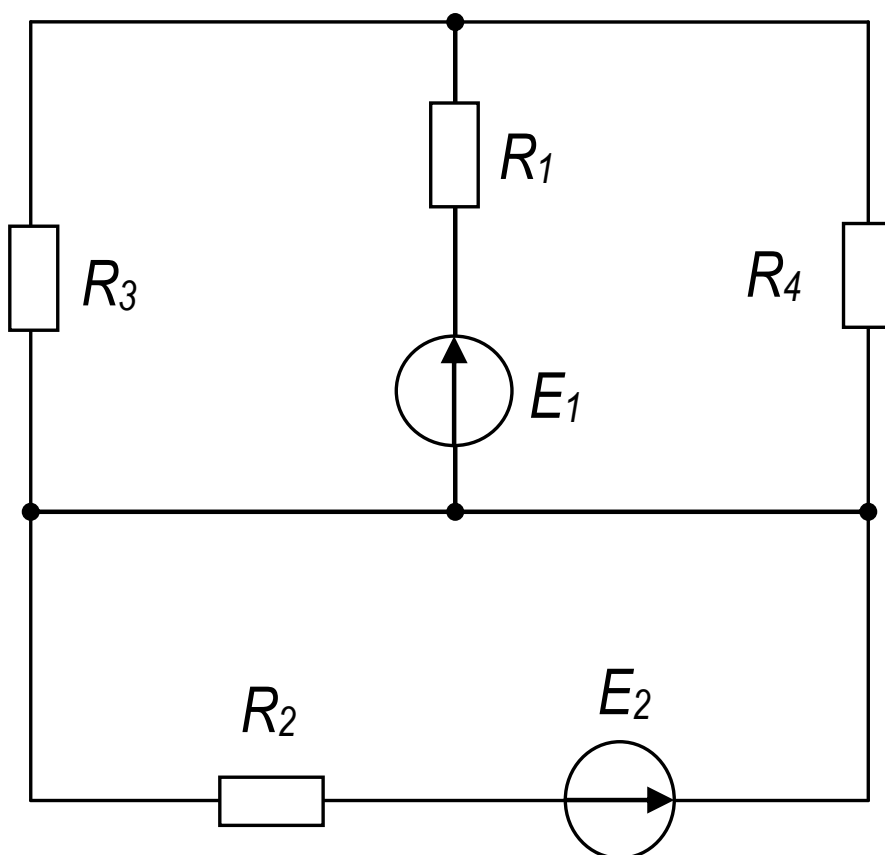


Рис. 2

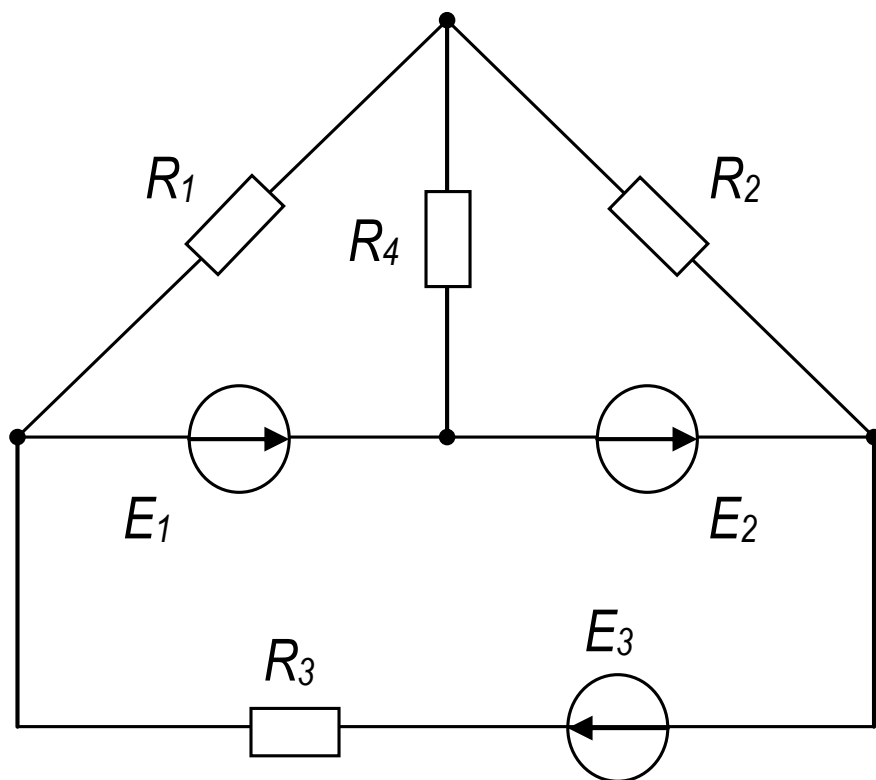


*Рис. 3*

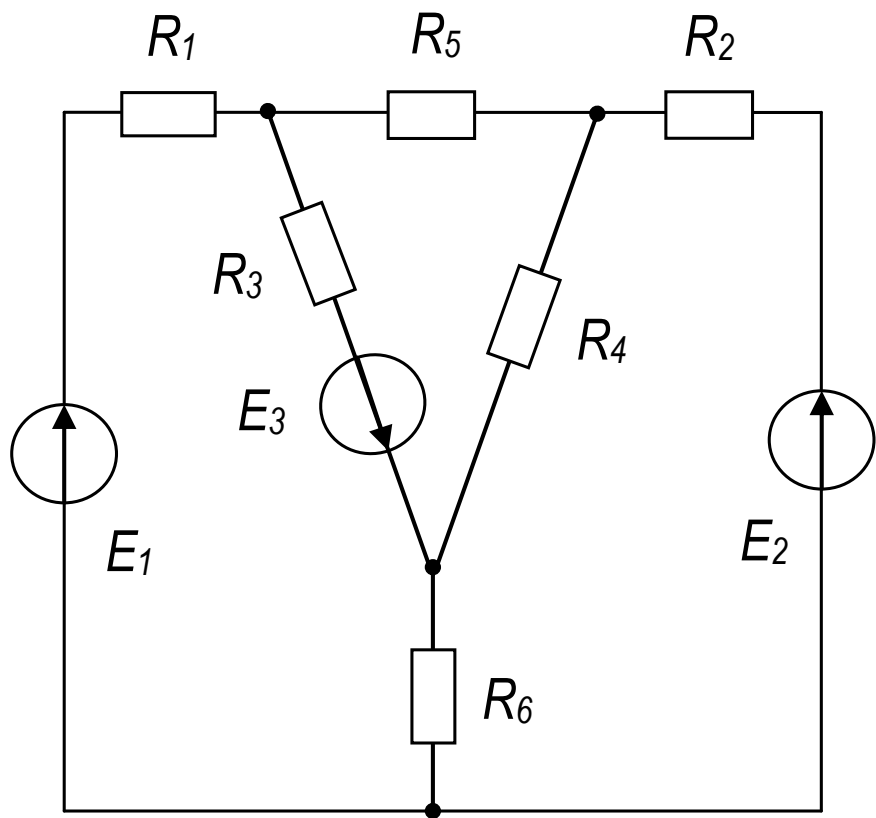


*Рис. 4*

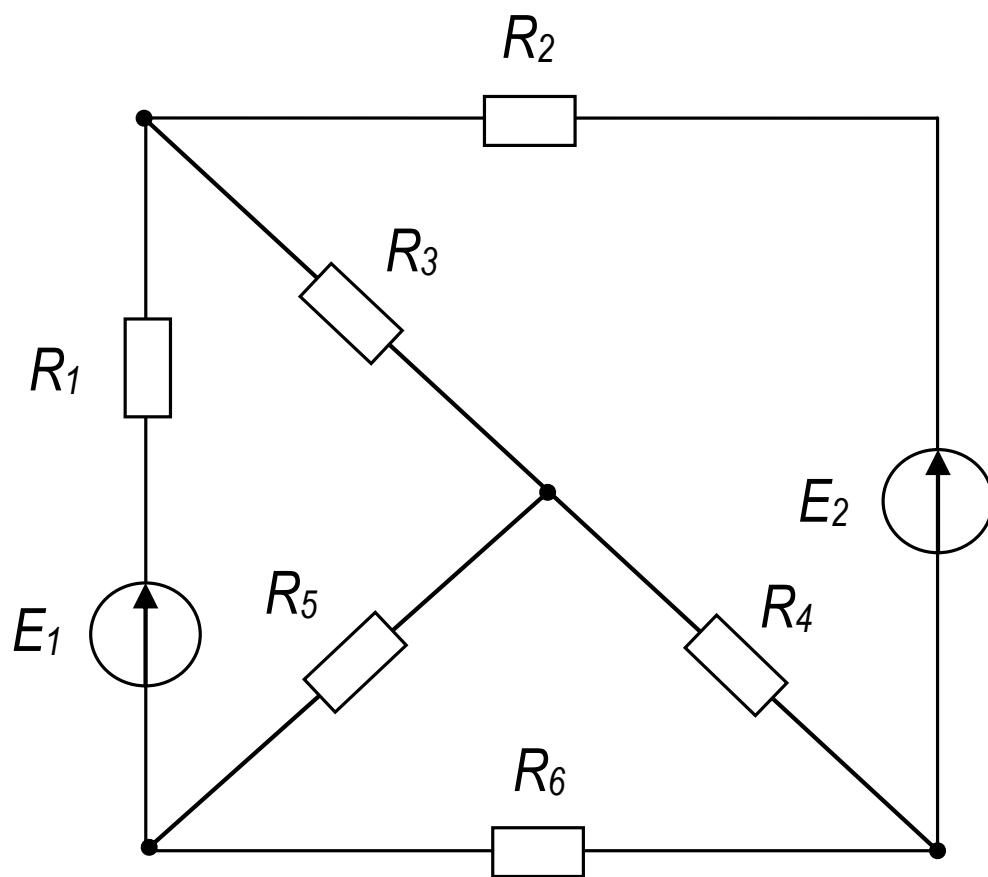




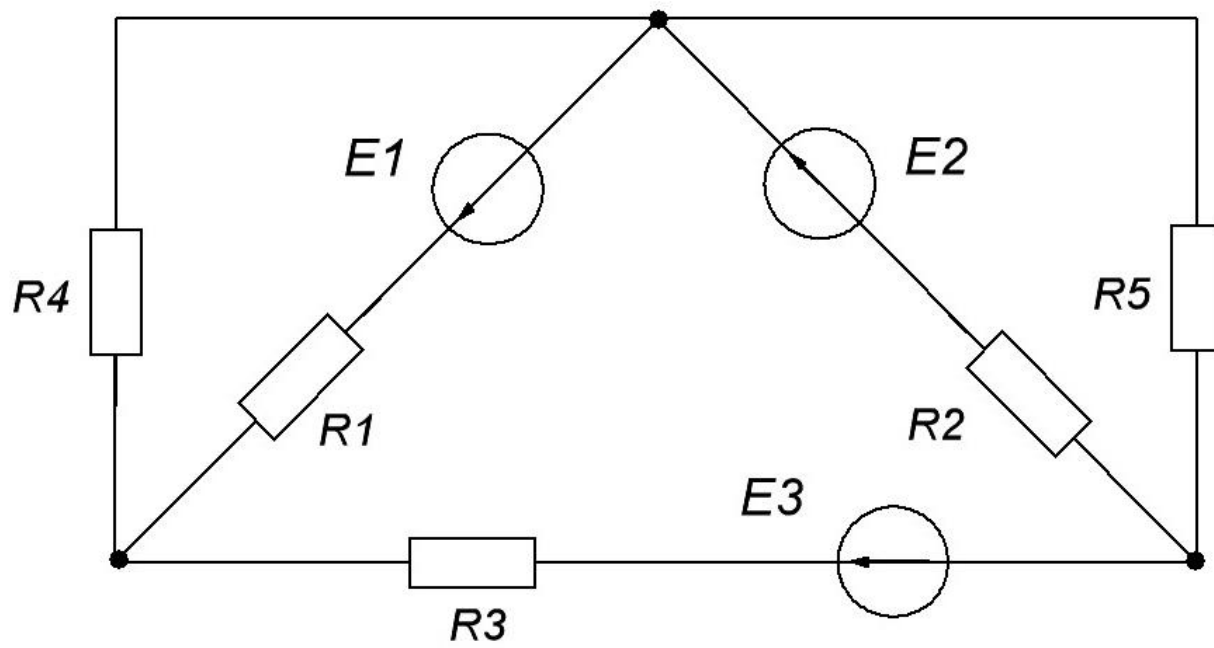
*Рис. 5*



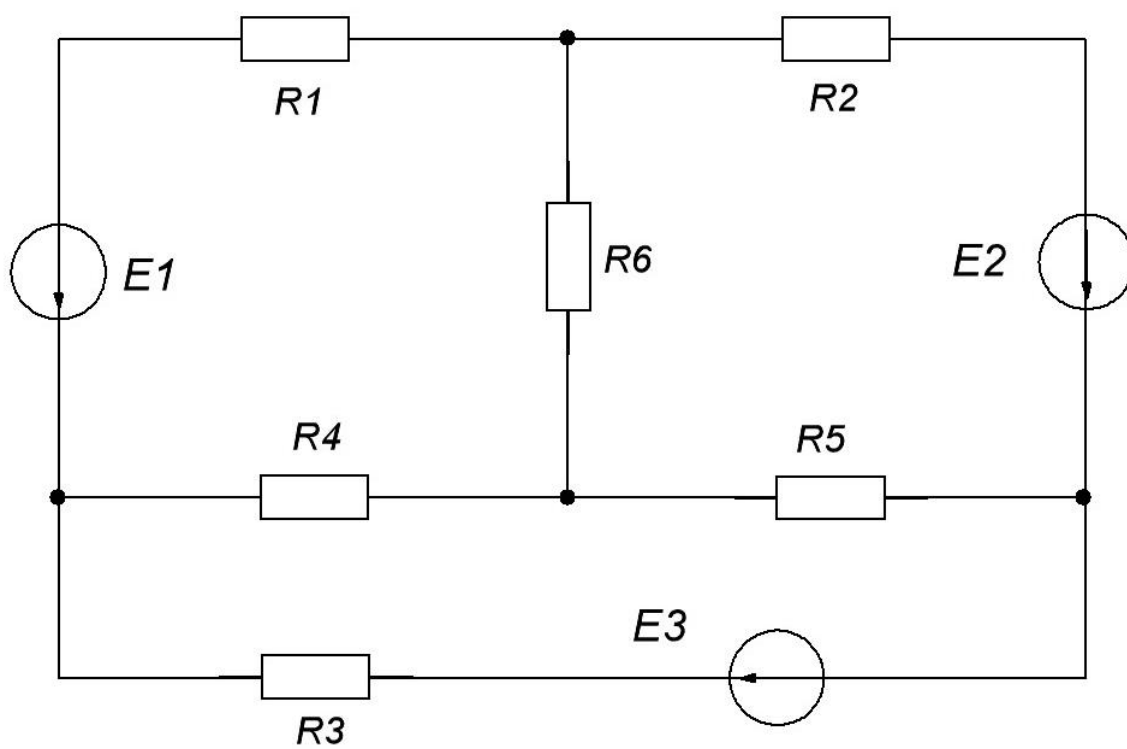
*Рис. 6*



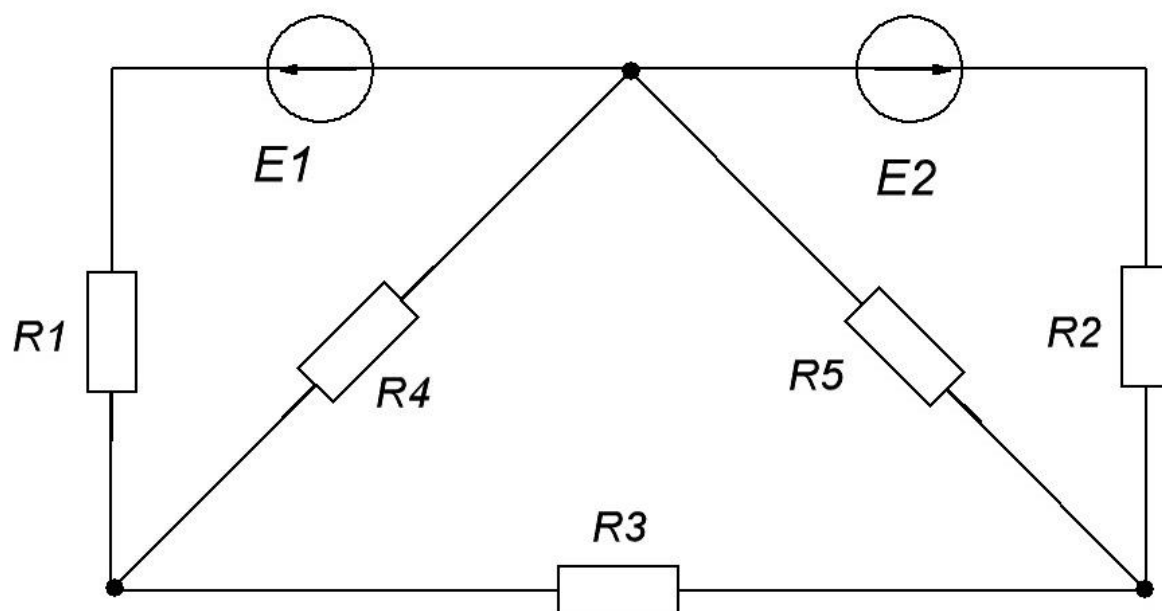
*Puc. 7*



*Puc. 8*



*Puc. 9*



*Puc. 10*

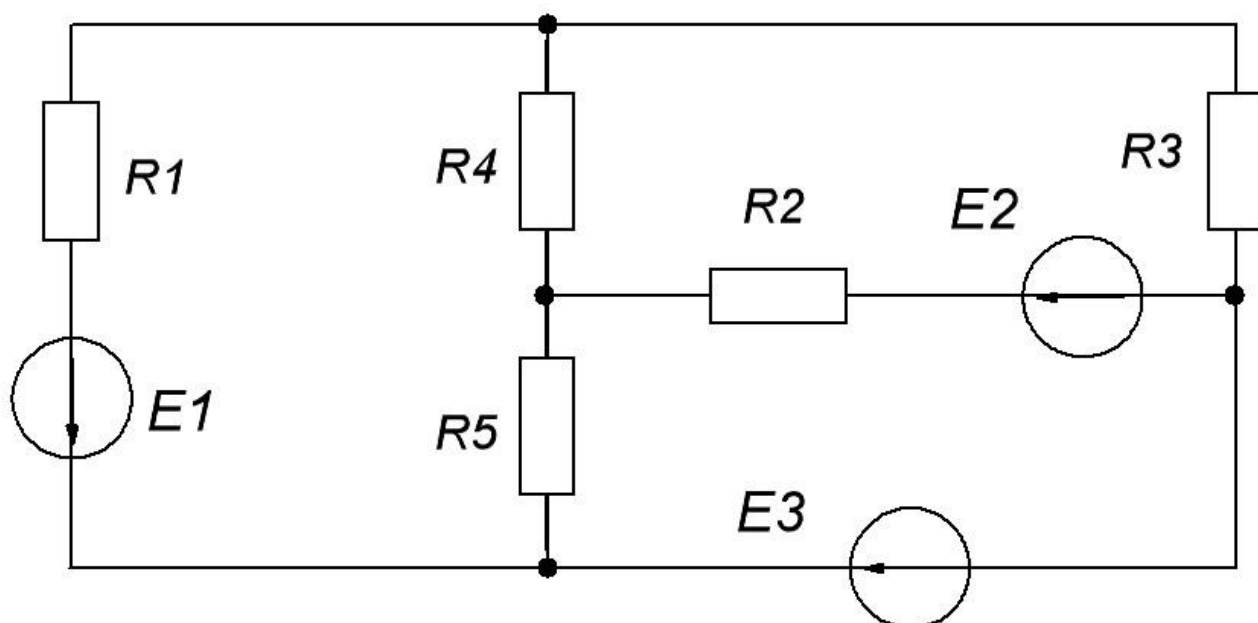


Рис. 11

Таблица 2

Вар. №	Рис.	$R_1$ Ом	$R_2$ Ом	$R_3$ Ом	$R_4$ Ом	$R_5$ Ом	$R_6$ Ом	$E_1$ В	$E_2$ В	$E_3$ В
01	2	1	1	1	6	6	4	12	15	10
02	2	1	1	1	6	6	4	15	10	5
03	2	1	1	1	6	6	4	20	10	10
04	2	1	1	1	6	6	4	20	20	15
05	2	1	1	1	6	6	4	15	10	15
06	3	2	2	4	4	6	6	42	24	-
07	3	2	2	4	4	6	6	20	10	-
08	3	2	8	4	4	6	6	20	10	-
09	3	8	2	4	4	6	6	15	10	-
10	3	2	8	4	4	6	6	10	15	-
11	4	8	2	6	10	-	-	20	10	-
12	4	2	2	6	10	-	-	20	20	-
13	4	2	2	6	10	-	-	15	15	-
14	4	2	2	6	10	-	-	10	15	-
15	4	2	2	6	10	-	-	25	20	-
16	5	6	6	2	6	-	-	30	20	30
17	5	6	6	8	6	-	-	20	20	20
18	5	6	6	8	6	-	-	20	15	10
19	5	6	6	8	6	-	-	10	15	20
20	5	6	6	8	6	-	-	15	10	15

Продолжение таблицы 2

Вар. №	Рис.	$R_1$ Ом	$R_2$ Ом	$R_3$ Ом	$R_4$ Ом	$R_5$ Ом	$R_6$ Ом	$E_1$ В	$E_2$ В	$E_3$ В
21	6	2	8	3	3	4	4	12	12	20
22	6	2	8	3	3	4	4	10	15	20
23	6	8	2	3	3	4	4	25	20	15
24	6	2	8	3	3	4	4	15	10	10
25	6	2	8	3	3	4	4	12	12	12
26	7	8	2	6	6	4	4	24	12	-
27	7	2	8	6	6	4	4	12	24	-
28	7	2	2	6	6	4	4	25	15	-
29	7	2	2	6	6	4	4	25	25	-
30	7	8	2	2	6	4	5	24	12	-
31	8	2	8	2	4	6	—	12	24	12
32	8	2	2	8	4	6	—	20	10	15
33	8	2	8	2	4	6	—	15	25	10
34	8	2	2	8	4	6	—	8	12	8
35	8	2	8	2	6	6	-	12	6	12
36	9	2	8	2	6	6	6	6	12	6
37	9	2	8	2	6	6	8	12	6	24
38	9	2	9	3	6	8	6	10	20	25
39	9	2	4	2	6	8	6	18	10	24
40	9	1	1	4	4	10	8	22	12	6
41	10	1	4	4	4	10	—	24	24	—
42	10	2	5	4	3	8	—	5	6	—
43	10	4	1	4	4	10	—	12	24	—
44	10	1	4	4	4	12	—	25	10	—
45	10	2	8	4	10	10	—	24	12	-
46	11	8	2	4	10	12	—	12	24	12
47	11	2	8	4	10	10	—	6	12	6
48	11	2	2	4	10	12	—	12	16	12
49	11	2	8	4	12	10	—	20	24	12
50	11	8	1	6	8	4	—	12	20	12

### ЗАДАЧА № 3

Для электрической схемы, изображенной на рис. 12-21, по заданным в таблице 3 параметрам элементов и ЭДС источника определить токи во всех ветвях цепи и напряжения на отдельных участках. Составить баланс активной и реактивной мощностей. Построить векторную диаграмму.

*Примечание: Методику расчета смотри в приложении Г.*

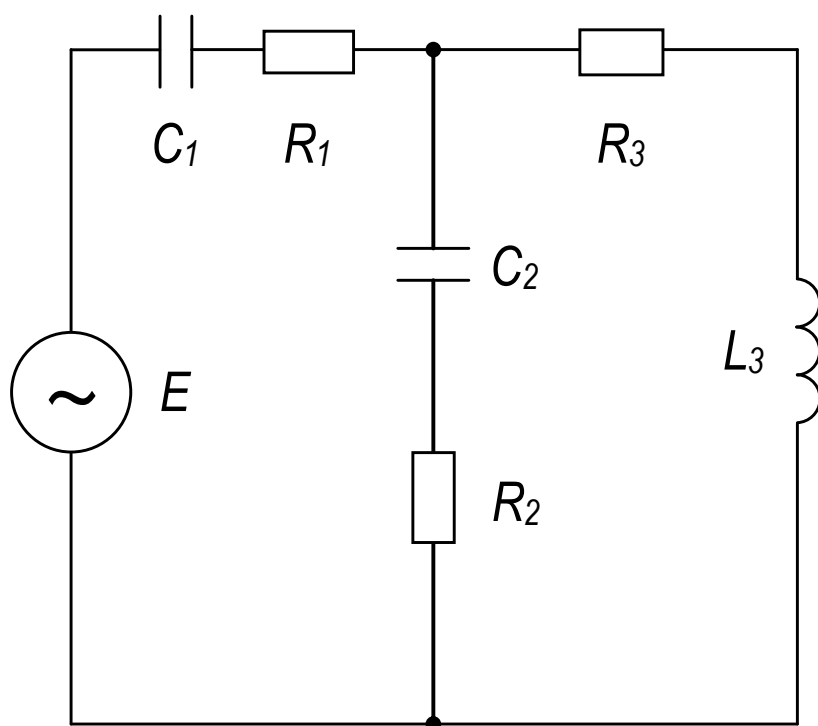
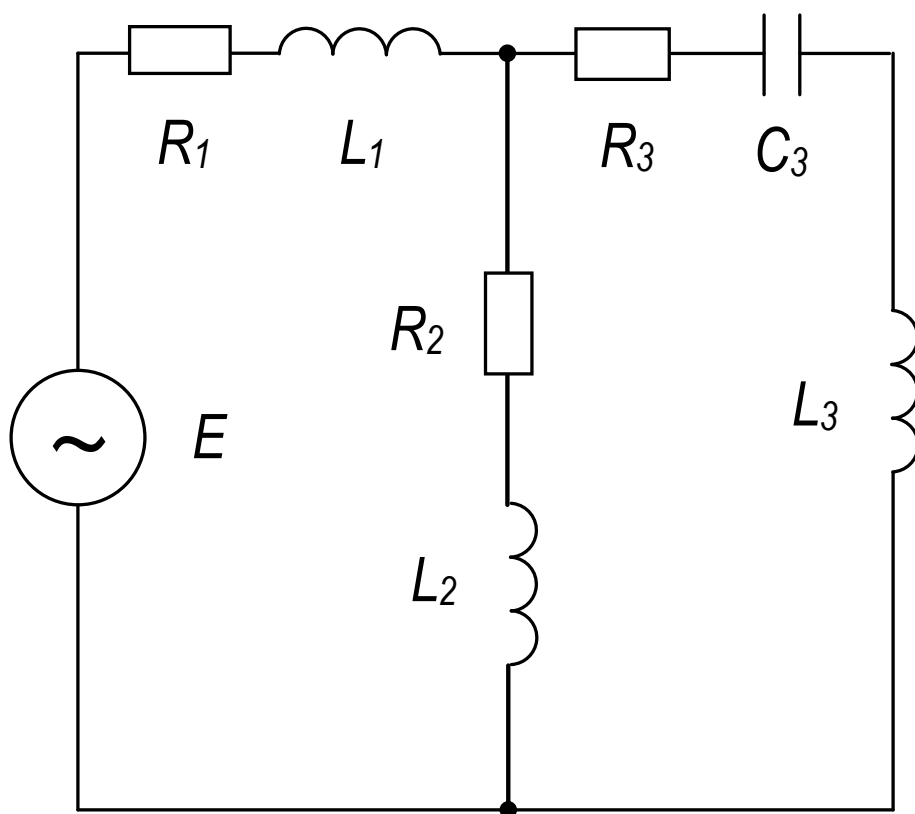
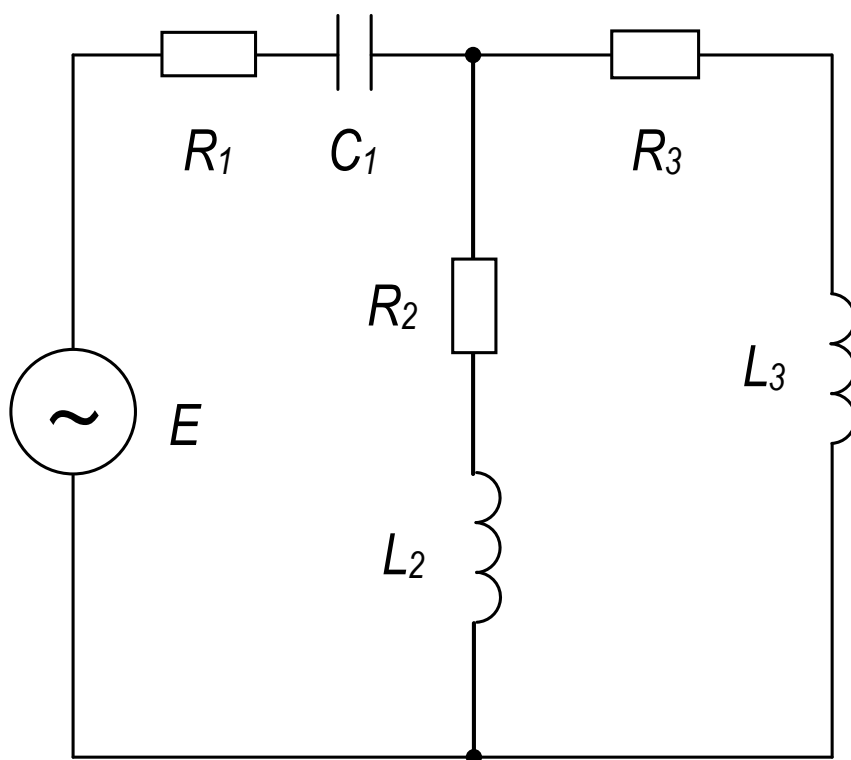


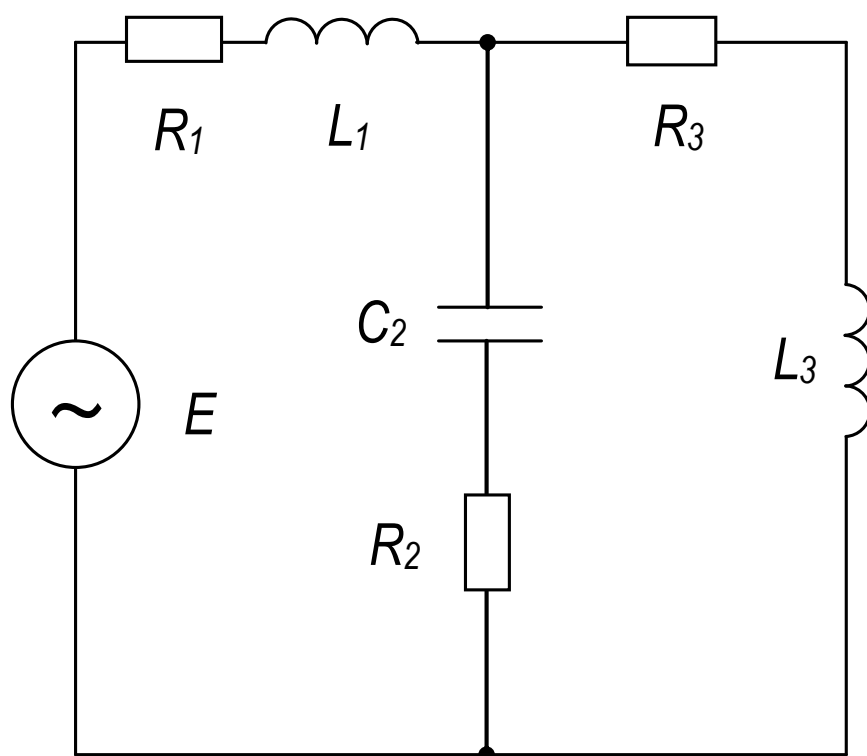
Рис. 12



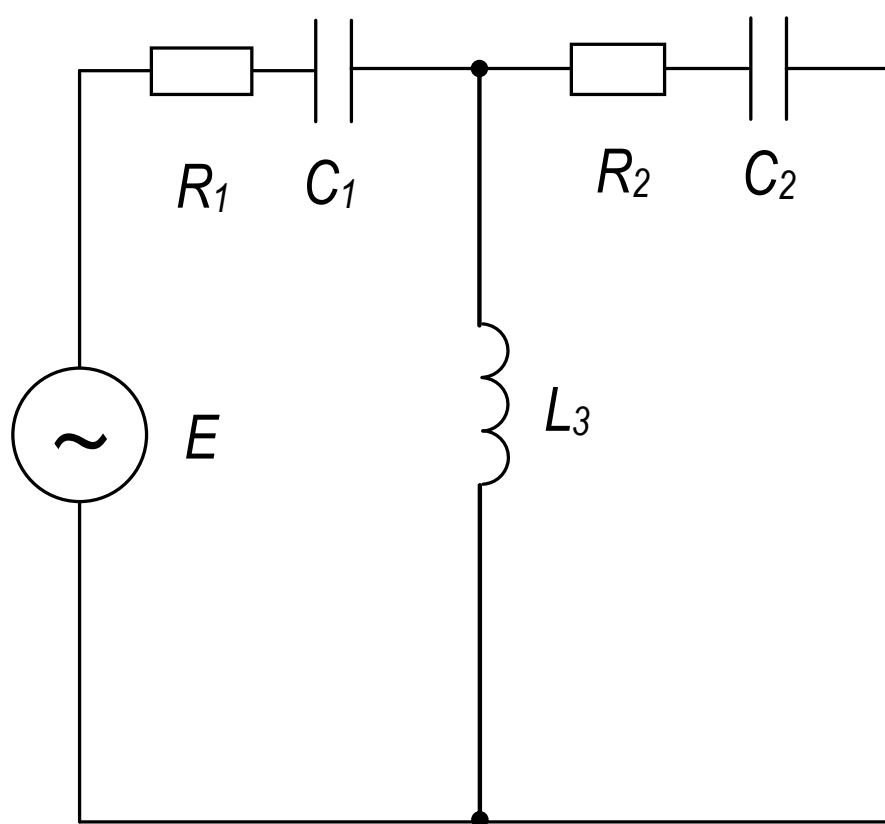
*Puc. 13*



*Puc. 14*

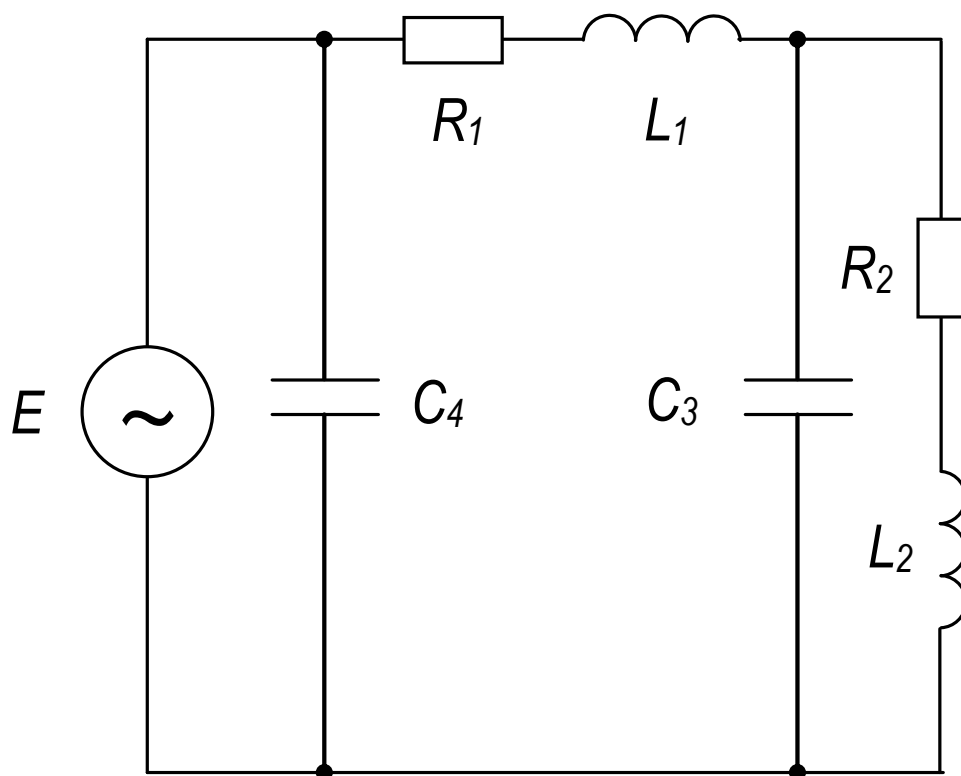


*Рис. 15*

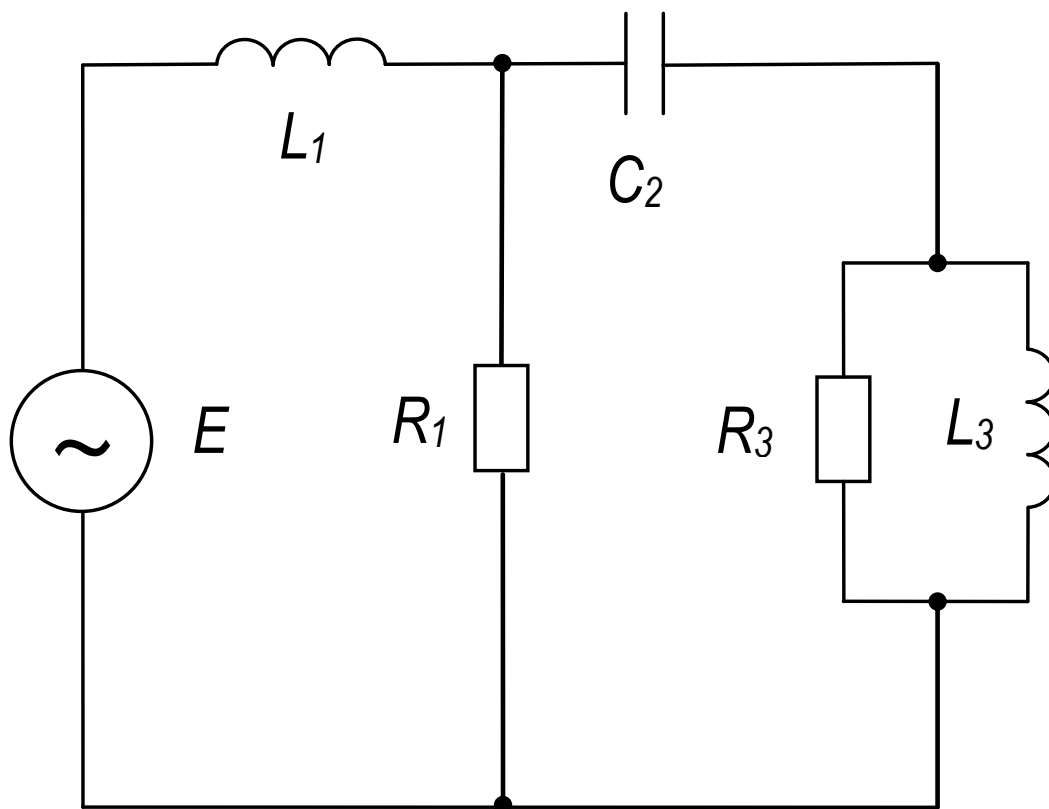


*Рис. 16*

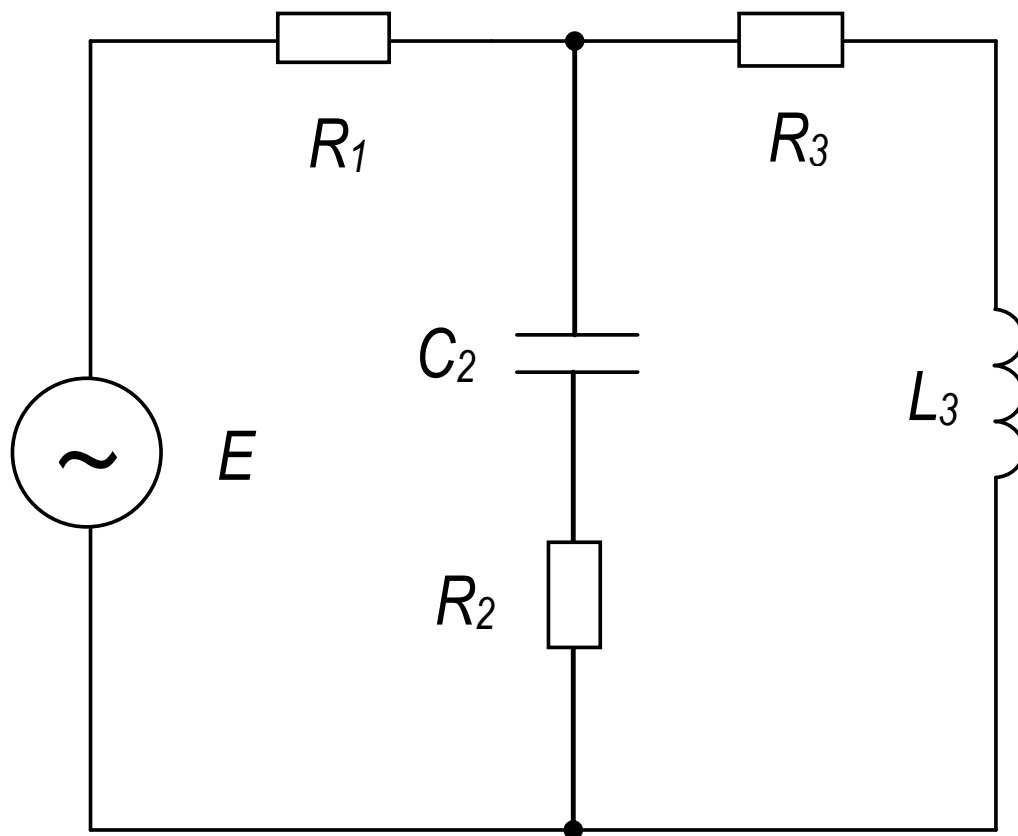




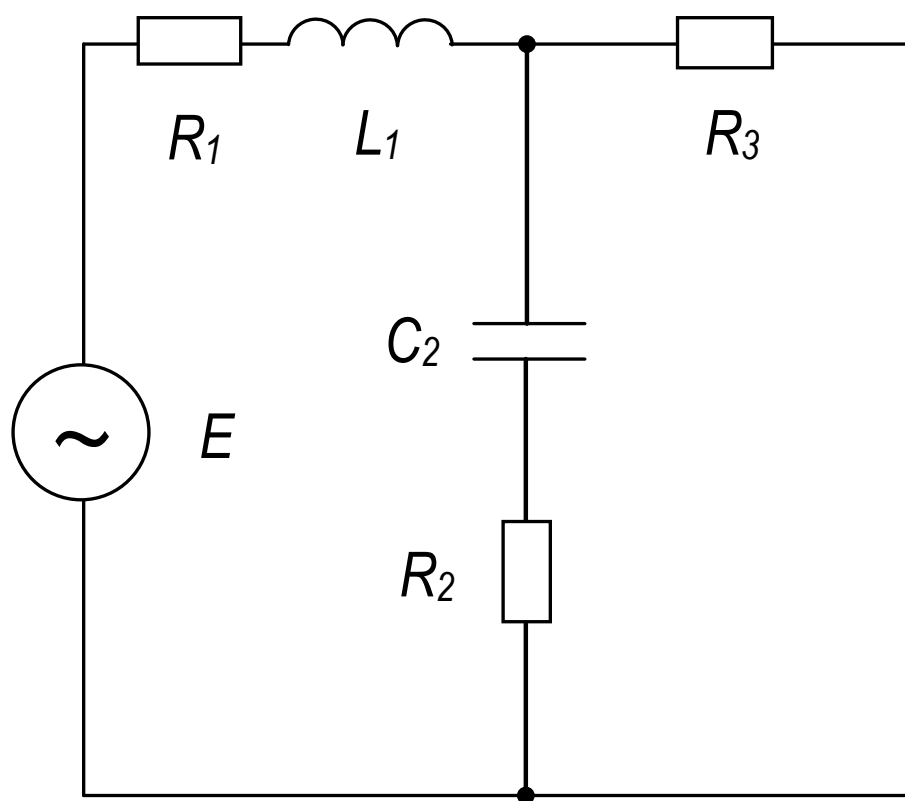
*Рис. 17*



*Рис. 18*



*Рис. 19*



*Рис. 20*

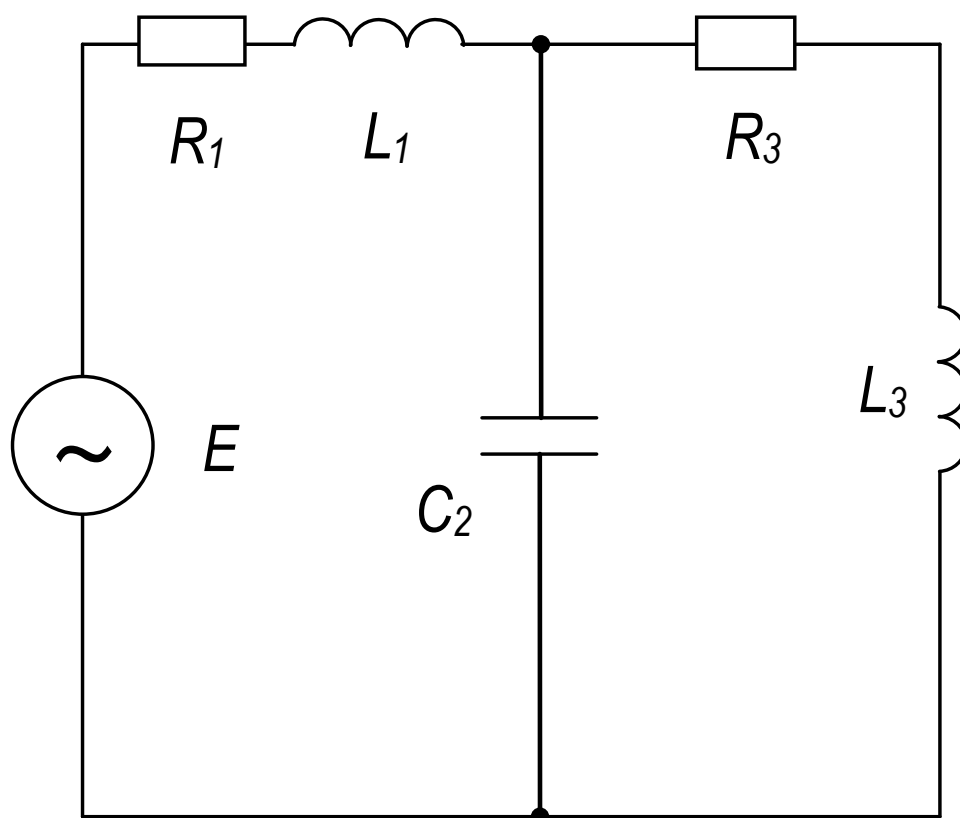


Рис. 21

Таблица 3

Вар. №	Рис.	$E$ , В	$f$ , Гц	$C_1$ , мкФ	$C_2$ , мкФ	$C_3$ , мкФ	$C_4$ , мкФ	$L_1$ , мГ	$L_2$ , мГ	$L_3$ , мГ	$R_1$ , Ом	$R_2$ , Ом	$R_3$ , Ом
01	12	150	50	637	300	-	-	-	-	15,9	2	3	4
02	12	100	50	637	300	-	-	-	-	15,9	8	3	4
03	12	120	50	637	300	-	-	-	-	15,9	8	3	4
04	12	200	50	637	300	-	-	-	-	15,9	8	3	4
05	12	220	50	637	300	-	-	-	-	15,9	8	3	4
06	13	50	50	-	-	100	-	15	10	115	10	4	10
07	13	100	50	-	-	100	-	15	10	115	10	4	10
08	13	120	50	-	-	150	-	15	10	115	20	4	15
09	13	200	50	-	-	100	-	15	10	115	10	4	15
10	13	220	50	-	-	150	-	15	10	115	20	4	10
11	14	50	50	637	-	-	-	-	9	6,37	5	10	8
12	14	100	50	637	-	-	-	-	9	6,37	10	5	8
13	14	120	50	637	-	-	-	-	9	6,37	5	10	10
14	14	200	50	637	-	-	-	-	9	6,37	5	10	8
15	14	220	50	637	-	-	-	-	9	6,37	5	10	8
16	15	150	50	-	800	-	-	31	-	95	10	2	10

Продолжение таблицы 3

Вар. №	Рис.	$E$ , В	$f$ , Гц	$C_1$ , мкФ	$C_2$ , мкФ	$C_3$ , мкФ	$C_4$ , мкФ	$L_1$ , мГ	$L_2$ , мГ	$L_3$ , мГ	$R_1$ , Ом	$R_2$ , Ом	$R_3$ , Ом
17	15	100	50	-	500	-	-	31	-	95	10	8	10
18	15	120	50	-	800	-	-	31	-	95	10	2	8
19	15	200	50	-	500	-	-	31	-	95	10	8	10
20	15	220	50	-	800	-	-	31	-	95	10	8	10
21	16	50	50	637	159	-	-	-	-	95	15	10	-
22	16	100	50	637	159	-	-	-	-	95	15	25	-
23	16	120	50	637	159	-	-	-	-	95	10	15	-
24	16	200	50	637	159	-	-	-	-	95	15	10	-
25	16	220	50	637	159	-	-	-	-	95	15	10	-
26	17	150	50	-	-	637	159	25	9	-	6	4	-
27	17	100	50	-	-	637	159	25	9	-	12	6	-
28	17	200	50	-	-	637	159	25	18	-	4	12	-
29	17	300	50	-	-	637	159	25	18	-	6	4	-
30	17	220	50	—	-	1250	637	19,1	15,6	-	40	14	-
31	18	100	50	—	637	—	—	19,1	—	31,8	40	—	10
32	18	120	50	—	637	—	—	19,1	—	31,8	40	—	20
33	18	200	50	—	637	—	—	19,1	—	31,8	20	—	40
34	18	220	50	—	637	—	—	19,1	—	31,8	10	—	20
35	18	50	50	—	637	—	—	15,9	—	15,6	8	-	4
36	19	100	50	—	318	—	—	-	—	15,9	10	10	4
37	19	150	50	—	318	—	—	-	—	15,9	8	6	4
38	19	200	50	—	318	—	—	-	—	15,9	10	10	8
39	19	220	50	—	318	—	—	-	—	15,9	8	10	10
40	19	50	50	—	318	—	—	-	—	9,55	4	40	40
41	20	100	50	—	318	—	—	9,55	—	—	4	40	4
42	20	120	50	—	318	—	—	9,55	—	—	4	40	10
43	20	200	50	—	318	—	—	9,55	—	—	4	10	40
44	20	220	50	—	318	—	—	9,55	—	—	40	10	40
45	20	50	50	—	159	—	—	15,9	—	-	35	20	16
46	21	100	50	—	159	—	—	15,9	—	31,8	35	40	—
47	21	120	50	—	159	—	—	15,9	—	31,8	35	20	—
48	21	200	50	—	159	—	—	15,9	—	31,8	40	20	—
49	21	220	50	—	159	—	—	15,9	—	31,8	5	10	—
50	21	380	50	—	159	—	—	15,9	—	31,8	35	10	—

#### ЗАДАЧА № 4

Для электрической схемы, изображенной на рис. 22-38, по заданным в таблице 4 параметрам и линейному напряжению определить фазные и линейные токи в нейтральном проводе (для четырехпроводной схемы), активную и реактивную мощность всей цепи и каждой фазы отдельно. Построить векторную диаграмму токов и напряжений.

*Примечание: Методику расчета смотри в приложении Д.*

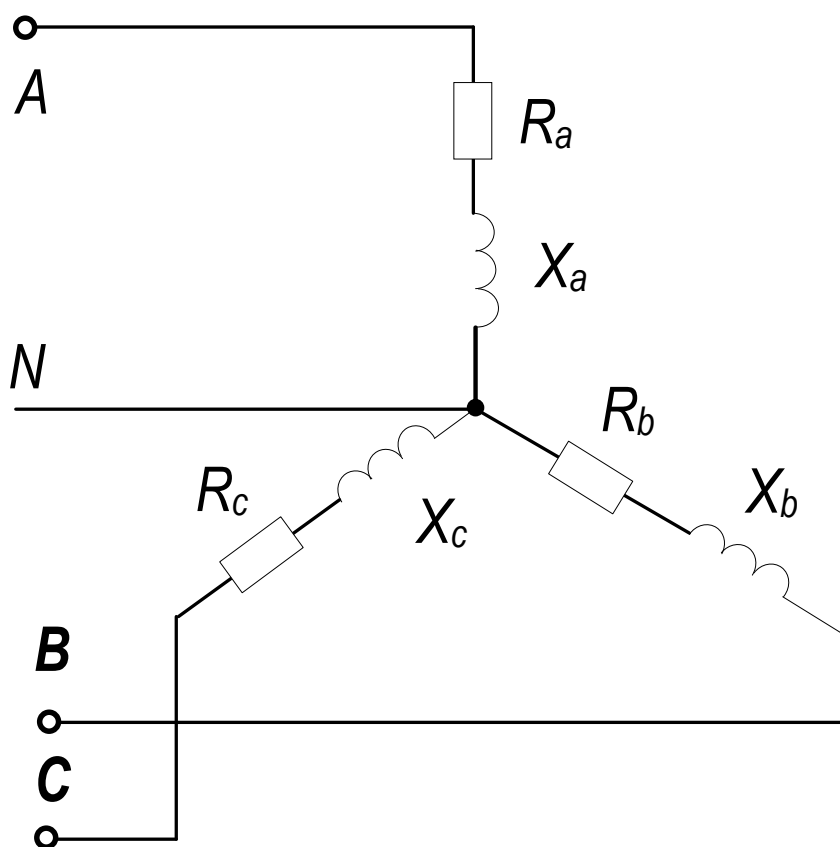
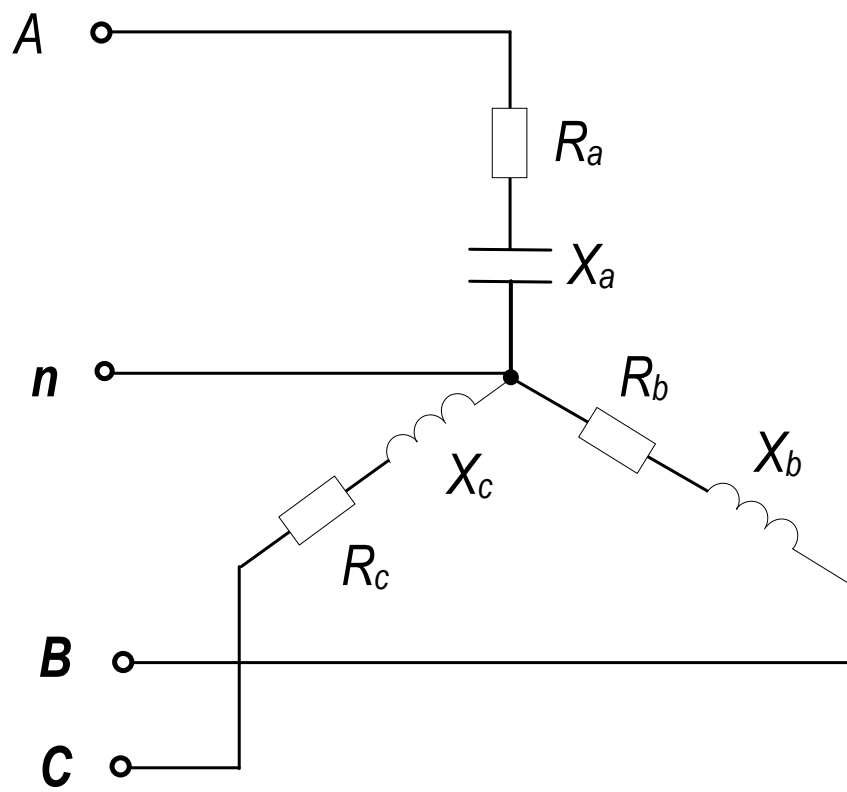
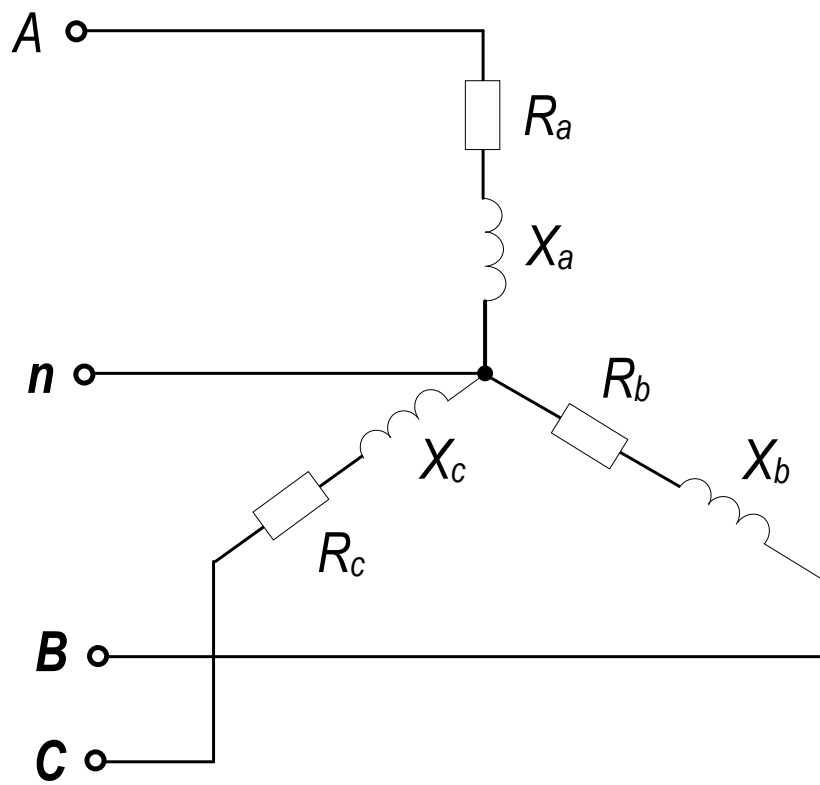


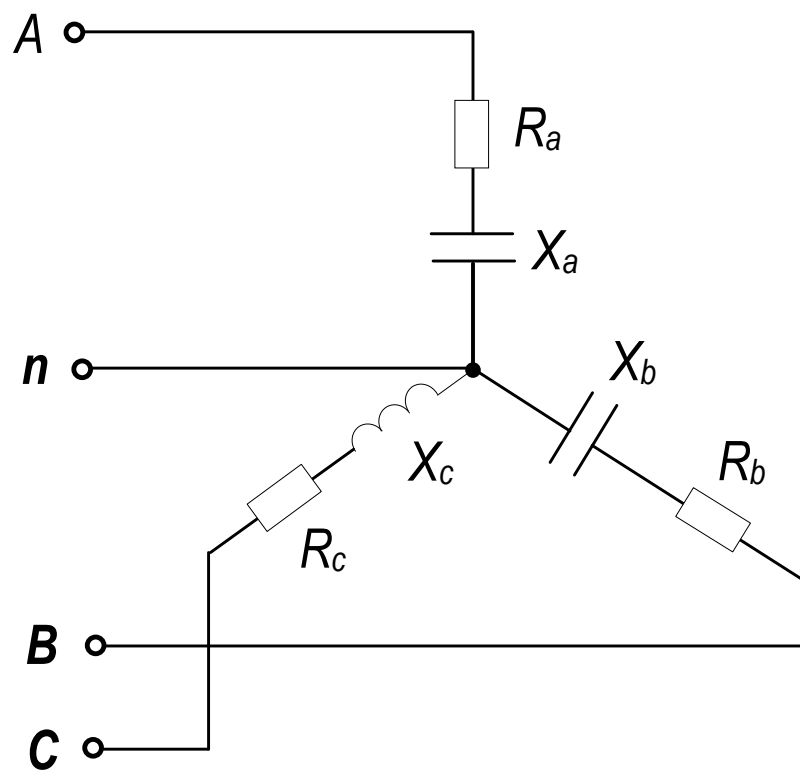
Рис. 22



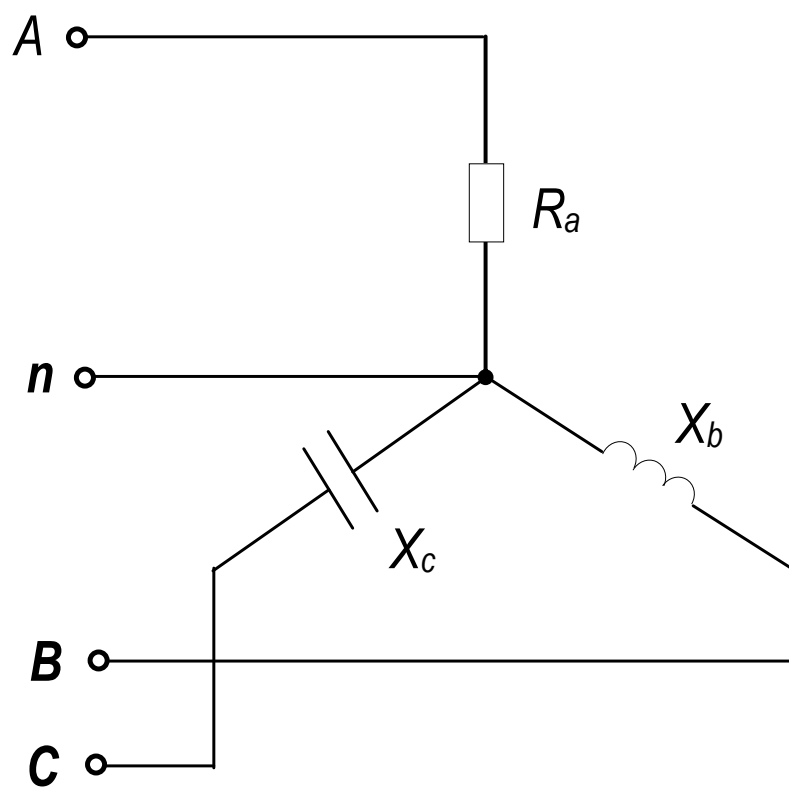
*Рис. 23*



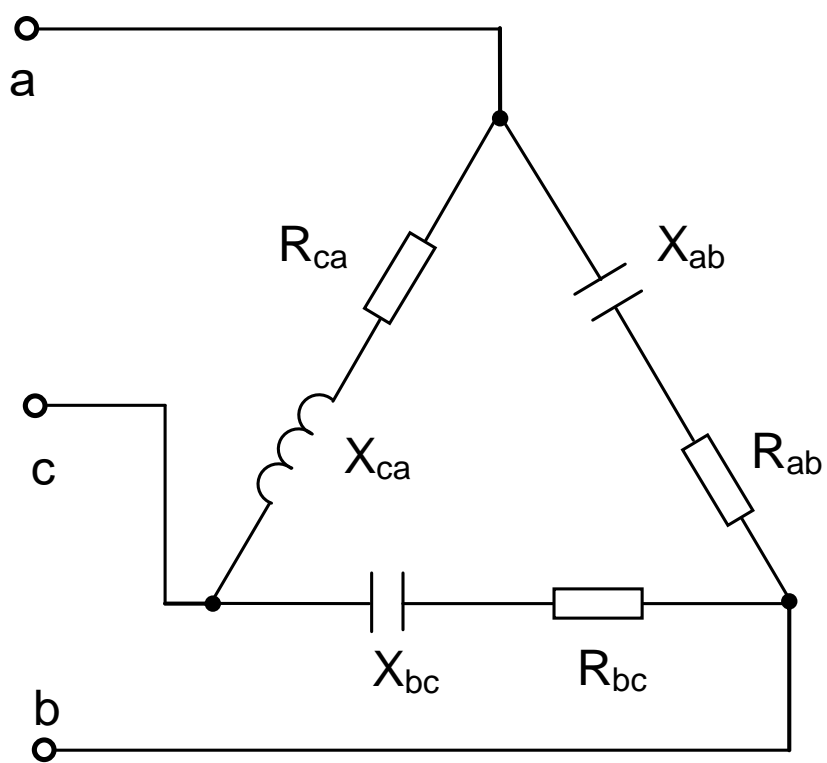
*Рис. 24*



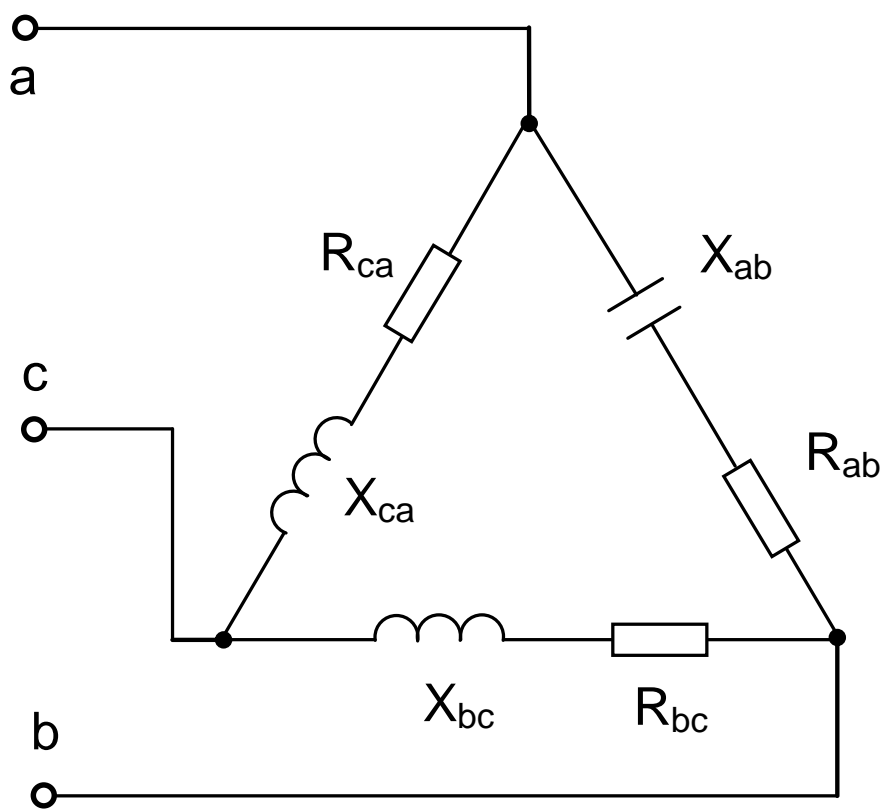
*Fig. 25*



*Fig. 26*

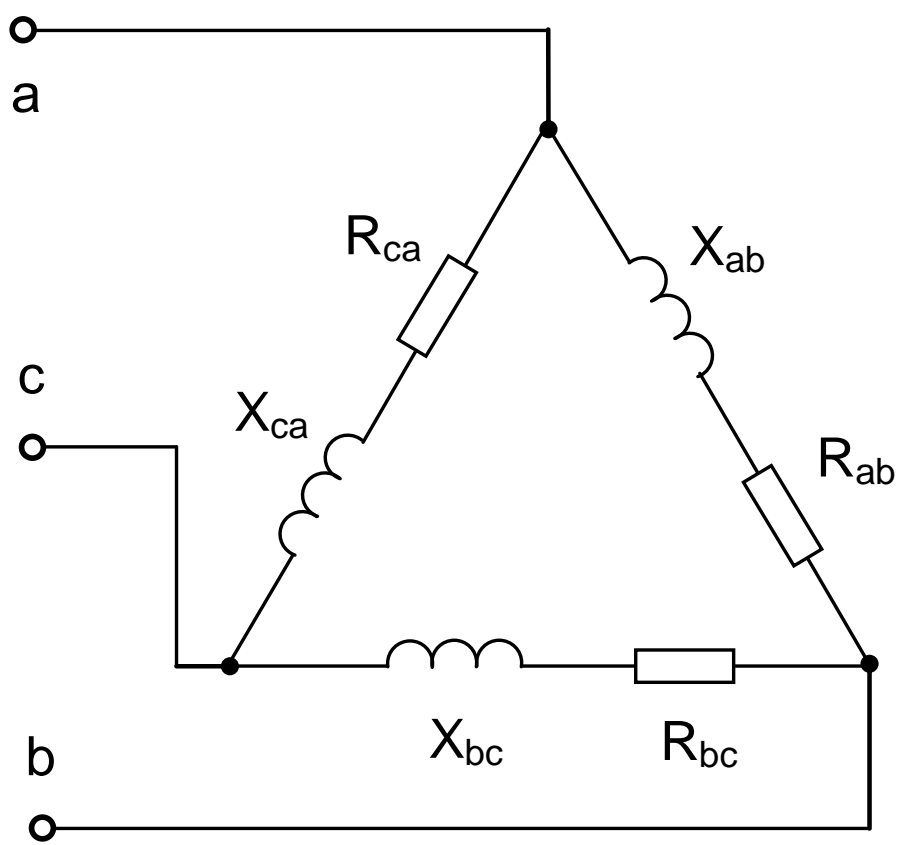


*Puc. 27*

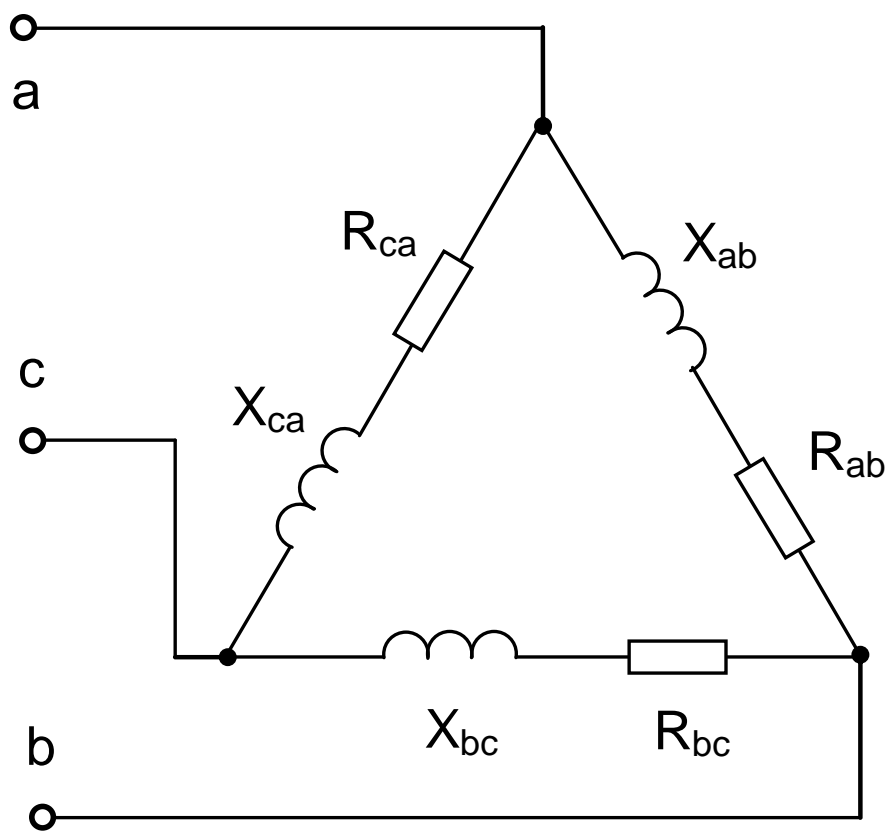


*Puc. 28*

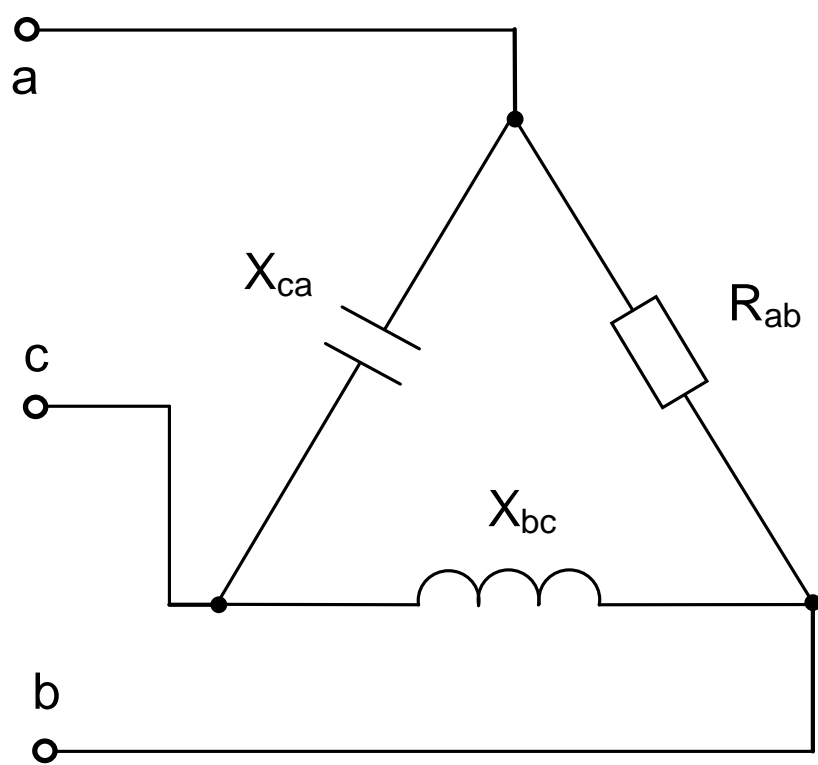




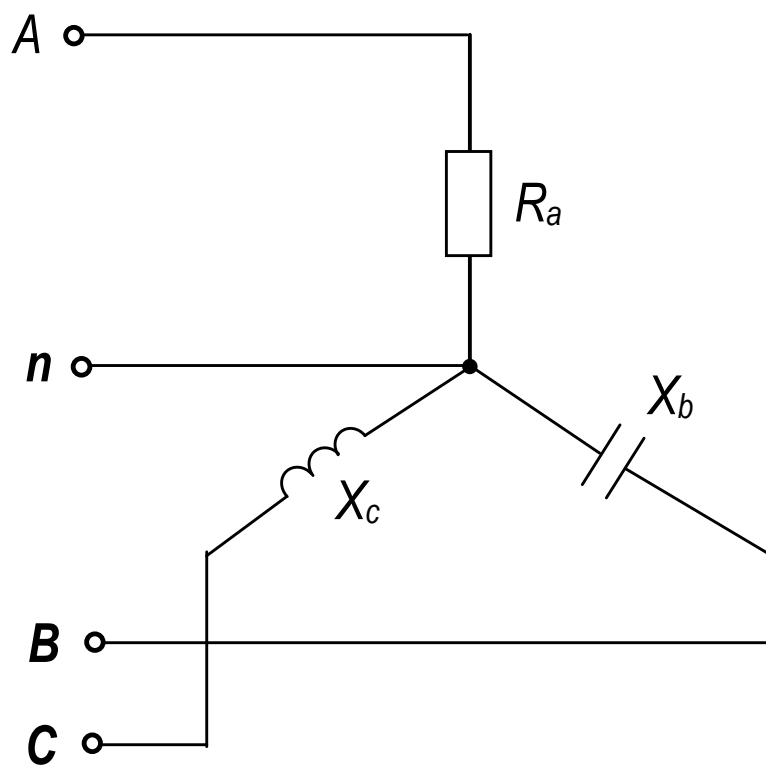
*Puc. 29*



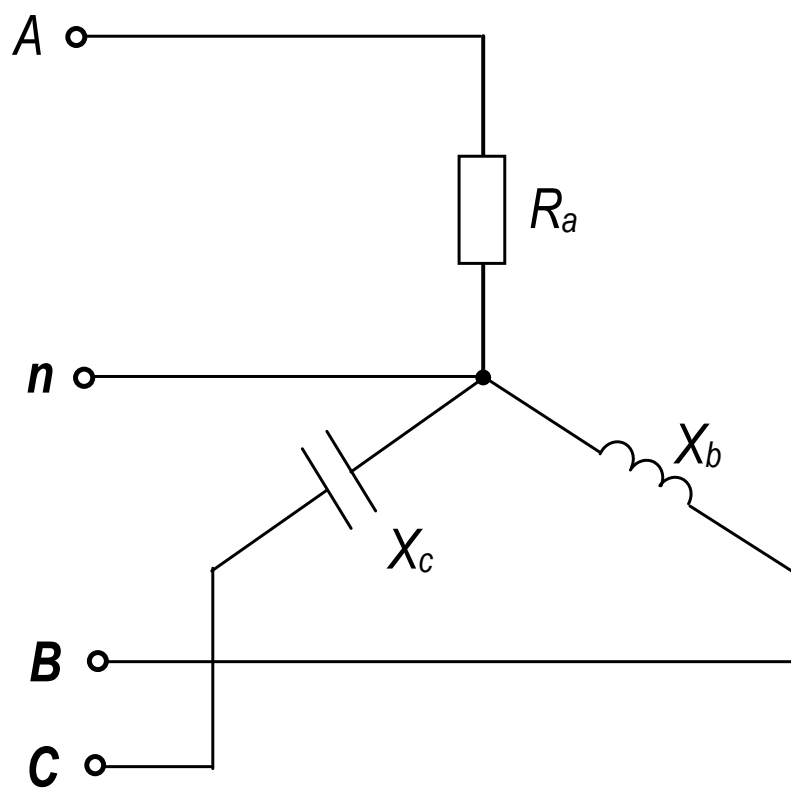
*Puc. 30*



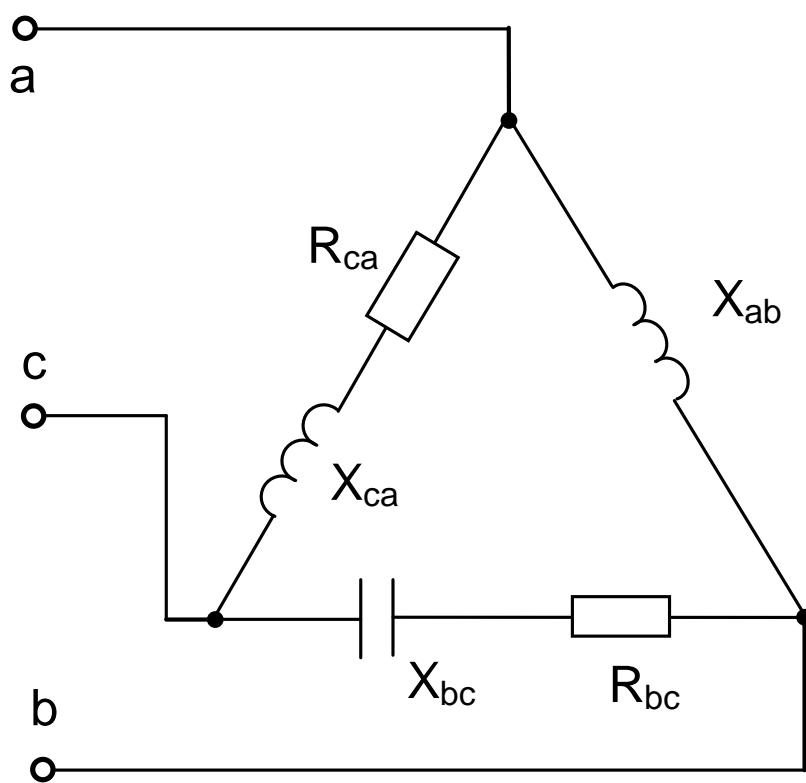
*Puc. 31*



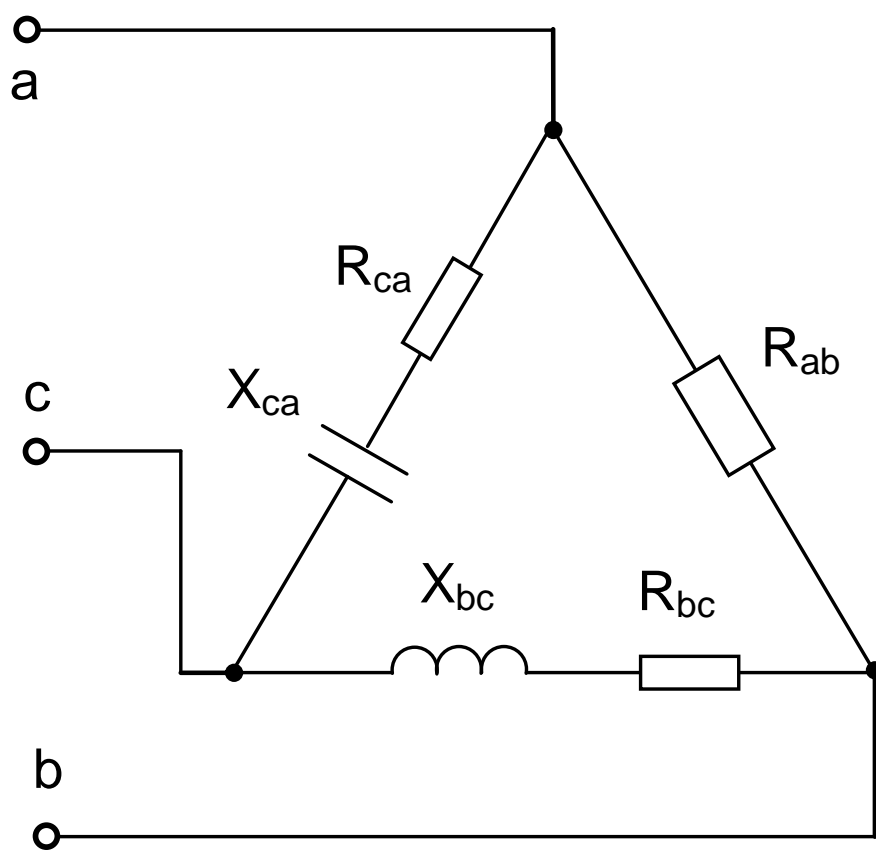
*Puc. 32*



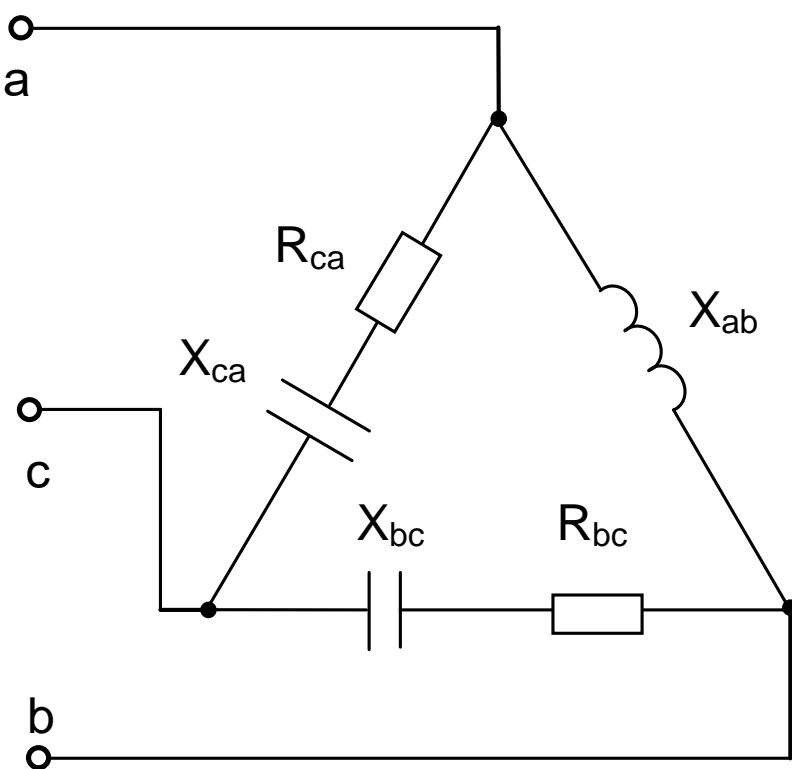
*Puc. 33*



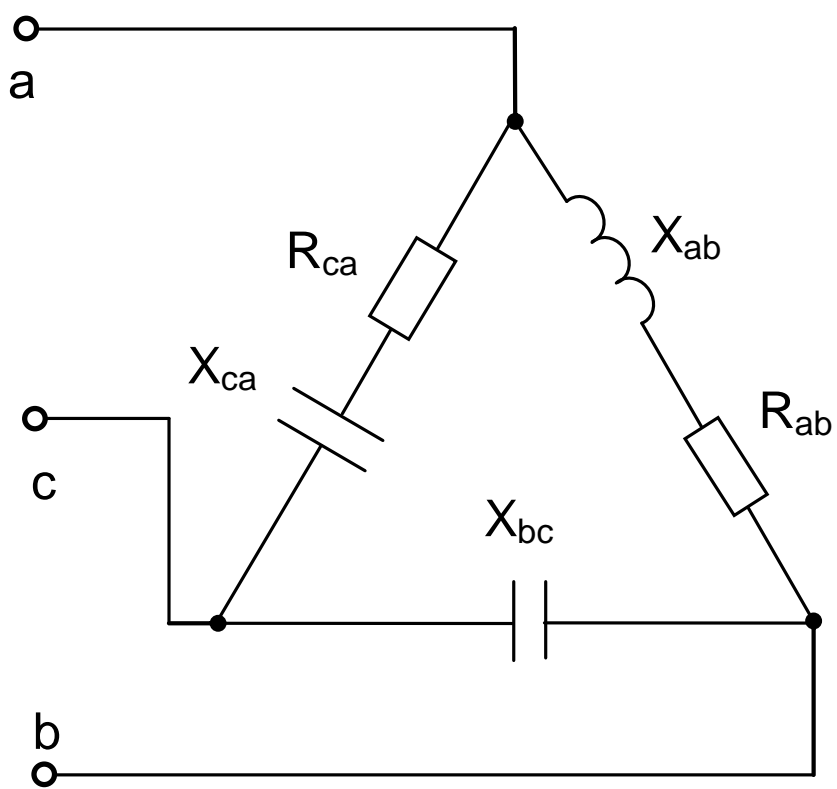
*Puc. 34*



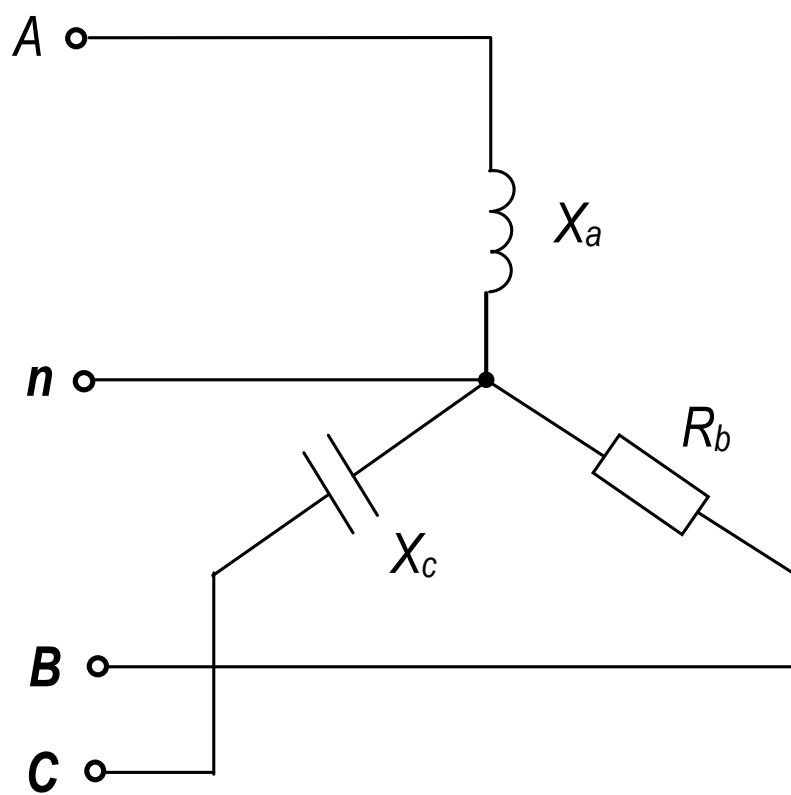
*Puc. 35*



*Puc. 36*



*Puc. 37*



*Puc. 38*

Таблица 4

<i>Вар. №</i>	<i>Пус.</i>	<i>U<sub>Л</sub>, В</i>	<i>R<sub>a</sub>, ОМ</i>	<i>R<sub>b</sub>, ОМ</i>	<i>R<sub>c</sub>, ОМ</i>	<i>X<sub>a</sub>, ОМ</i>	<i>X<sub>b</sub>, ОМ</i>	<i>X<sub>c</sub>, ОМ</i>	<i>R<sub>ab</sub>, ОМ</i>	<i>R<sub>bc</sub>, ОМ</i>	<i>R<sub>ca</sub>, ОМ</i>	<i>X<sub>ab</sub>, ОМ</i>	<i>X<sub>bc</sub>, ОМ</i>	<i>X<sub>ca</sub>, ОМ</i>
1	22	220	18	18	18	6	6	6	-	-	-	-	-	-
2	22	380	8	8	8	16	16	16	-	-	-	-	-	-
3	23	127	8	4	6	4	3	8	-	-	-	-	-	-
4	23	220	8	14	6	4	13	8	-	-	-	-	-	-
5	23	380	8	4	16	14	3	8	-	-	-	-	-	-
6	24	127	14	8	6	3	14	8	-	-	-	-	-	-
7	24	220	4	8	16	3	4	18	-	-	-	-	-	-
8	24	380	14	3	6	8	14	8	-	-	-	-	-	-
9	25	127	16	8	8	14	6	4	-	-	-	-	-	-
10	25	220	8	16	4	8	4	6	-	-	-	-	-	-
11	25	380	16	8	4	4	10	4	-	-	-	-	-	-
12	26	127	10	-	-	-	10	10	-	-	-	-	-	-
13	26	220	15	-	-	-	10	8						
14	26	380	6	-	-	-	16	8	-	-	-	-	-	-
15	27	127	-	-	-	-	-	-	8	8	8	6	6	6
16	27	220	-	-	-	-	-	-	12	12	12	4	4	4
17	27	380	-	-	-	-	-	-	6	6	6	4	4	4
18	28	127	-	-	-	-	-	-	8	4	6	4	4	8
19	28	220	-	-	-	-	-	-	8	4	3	6	6	3
20	28	380	-	-	-	-	-	-	8	4	6	6	6	3
21	29	127	-	-	-	-	-	-	8	6	3	4	4	4
22	29	220	-	-	-	-	-	-	3	6	8	4	4	8
23	29	380	-	-	-	-	-	-	8	6	8	3	3	3
24	30	127	-	-	-	-	-	-	16,8	8	3	14,2	6	4
25	30	220	-	-	-	-	-	-	16,8	8	3	14,2	4	8
26	30	380	-	-	-	-	-	-	16,8	8	8	14,2	6	4
27	31	127	-	-	-	-	-	-	10	-	-	-	10	10
28	31	220	-	-	-	-	-	-	25	-	-	-	20	4
29	31	380	-	-	-	-	-	-	10	-	-	-	4	10
30	32	127	10	—	—	—	10	10	—	—	—	—	—	—
31	32	220	10	—	—	—	10	20	—	—	—	—	—	—
32	32	380	10	—	—	—	20	10	—	—	—	—	—	—
33	33	127	15	—	—	—	10	5	—	—	—	—	—	—
34	33	220	15	—	—	—	10	10	—	—	—	—	—	—
35	33	380	15	—	—	—	5	5	—	—	—	—	—	—
36	34	127	—	—	—	—	—	—	—	3	8	4	6	8
37	34	220	—	—	—	—	—	—	—	6	8	4	6	8
38	34	380	—	—	—	—	—	—	—	3	6	4	6	4
39	35	127	—	—	—	—	—	—	8	4	8	—	6	10
40	35	220	—	—	—	—	—	—	4	4	8	—	6	8

Продолжение таблицы 4

<i><b>Вар. №</b></i>	<i><b>Рис.</b></i>	<i><b><math>U_L</math>, В</b></i>	<i><b><math>R_a</math>, Ом</b></i>	<i><b><math>R_b</math>, Ом</b></i>	<i><b><math>R_c</math>, Ом</b></i>	<i><b><math>X_a</math>, Ом</b></i>	<i><b><math>X_b</math>, Ом</b></i>	<i><b><math>X_c</math>, Ом</b></i>	<i><b><math>R_{ab}</math>, Ом</b></i>	<i><b><math>R_{bc}</math>, Ом</b></i>	<i><b><math>R_{ca}</math>, Ом</b></i>	<i><b><math>X_{ab}</math>, Ом</b></i>	<i><b><math>X_{bc}</math>, Ом</b></i>	<i><b><math>X_{ca}</math>, Ом</b></i>
41	35	380	—	—	—	—	—	—	8	4	6	—	6	12
42	36	127	—	—	—	—	—	—	—	5	6	5	8	4
43	36	220	—	—	—	—	—	—	—	8	6	5	8	4
44	36	380	—	—	—	—	—	—	—	5	6	4	8	5
45	37	127	—	—	—	—	—	—	5	—	6	10	8	4
46	37	220	—	—	—	—	—	—	8	—	4	10	8	4
47	37	380	—	—	—	—	—	—	10	—	6	8	8	4
48	38	127	—	3	—	15	—	10	—	—	—	—	—	—
49	38	220	—	5	—	10	—	10	—	—	—	—	—	—
50	38	380	—	9	—	15	—	15	—	—	—	—	—	—

## РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА МЕТОДОМ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

*Цель:* Научиться применять закон Ома для расчета цепей постоянного тока методом эквивалентных преобразований

### 1. ЗАКОН ОМА ДЛЯ УЧАСТКА ЦЕПИ, НЕ СОДЕРЖАЩЕГО ЭДС

Рассмотрим участок электрической цепи с сопротивлением  $R$ , к которому приложено напряжение  $U$ . Под действием разности потенциалов этого участка цепи, через сопротивление будет протекать ток  $I$  (рис. 1).

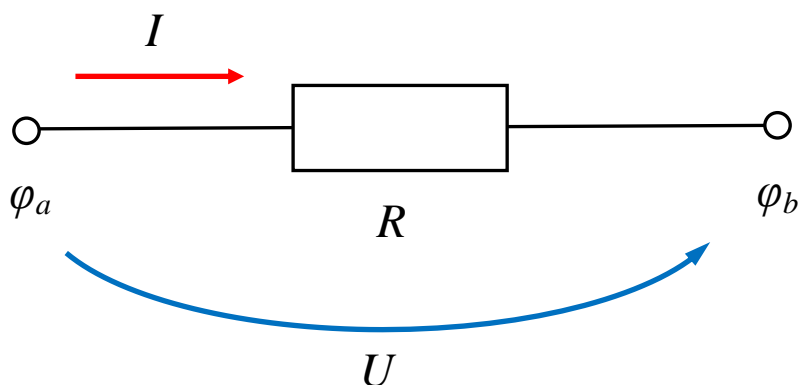


Рис. 1. Участок цепи, не содержащий ЭДС

Проводя исследование свойств электрического тока, немецкий ученый Георг Симон Ом в 1826 г. установил, что величина электрического сопротивления проводников не зависит от значения тока и, следовательно, является величиной постоянной. Выражение, полученное им для определения величины электрического сопротивления, имеет вид:

$$R = \frac{U}{I}. \quad (1)$$

Отсюда имеем:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{\varphi_a - \varphi_b}{R}. \quad (2)$$

Формула (2) получила название закона Ома для участка цепи, не содержащего ЭДС.

При протекании тока  $I$  через сопротивление  $R$  напряжение на участке  $ab$  равно:

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = IR. \quad (3)$$

Произведение  $I \cdot R$  принято называть *падением напряжения* на участке  $ab$ . Падение напряжения показывает значение напряжения  $U$  при протекании тока  $I$  через некоторое сопротивление  $R$  участка цепи. Это определение имеет определенный физический смысл, так как при протекании тока через участок цепи



« $ab$ » силами поля затрачивается работа по переносу электрических зарядов и, следовательно, потенциал уменьшается:  $\varphi_a > \varphi_b$ .

## 2. СПОСОБЫ СОЕДИНЕНИЙ СОПРОТИВЛЕНИЙ

### 2.1. Последовательное соединение сопротивлений

При *последовательном соединении* элементов конец предыдущего элемента соединяют с началом последующего элемента (рис. 2):

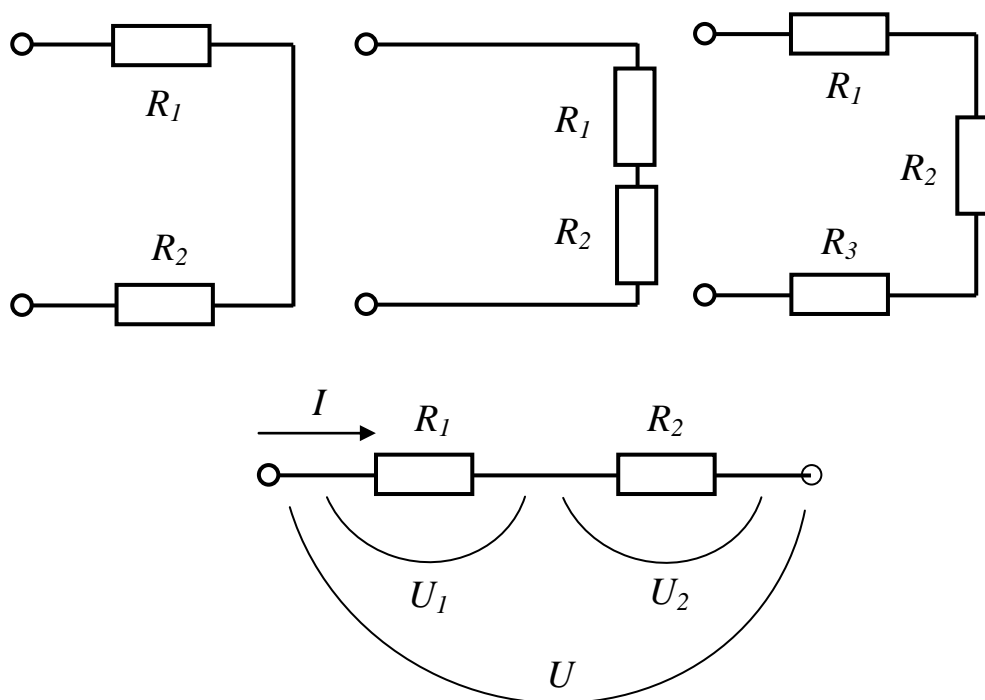


Рис. 2. Последовательное соединение сопротивлений

*Свойства последовательного соединения:*

1. Через все сопротивления протекает один и тот же ток:

$$I_1 = I_2 = \dots = I. \quad (5)$$

2. Общее напряжение равно сумме напряжений всех участков цепи. Например, для случая двух резисторов, указанных на рисунке 20:

$$U = U_1 + U_2. \quad (6)$$

3. Общее сопротивление равно сумме сопротивлений.

$$R = R_1 + R_2. \quad (7)$$

При последовательном соединении  $n$  резисторов общее сопротивление всей цепи равно арифметической сумме сопротивлений всех резисторов

$$R = \sum_{k=1}^n R_k. \quad (8)$$

4. Напряжения на сопротивлениях распределяются пропорционально величине сопротивлений: чем больше сопротивление, тем больше напряжение на нем. Это следует из закона Ома для участка цепи

$$U_1 = I \cdot R_1, \quad U_2 = I \cdot R_2. \quad (9)$$

## 2.2. Параллельное соединение сопротивлений

При параллельном соединении начала всех элементов соединяют в одной точке, а их концы – в другой (рис. 3).

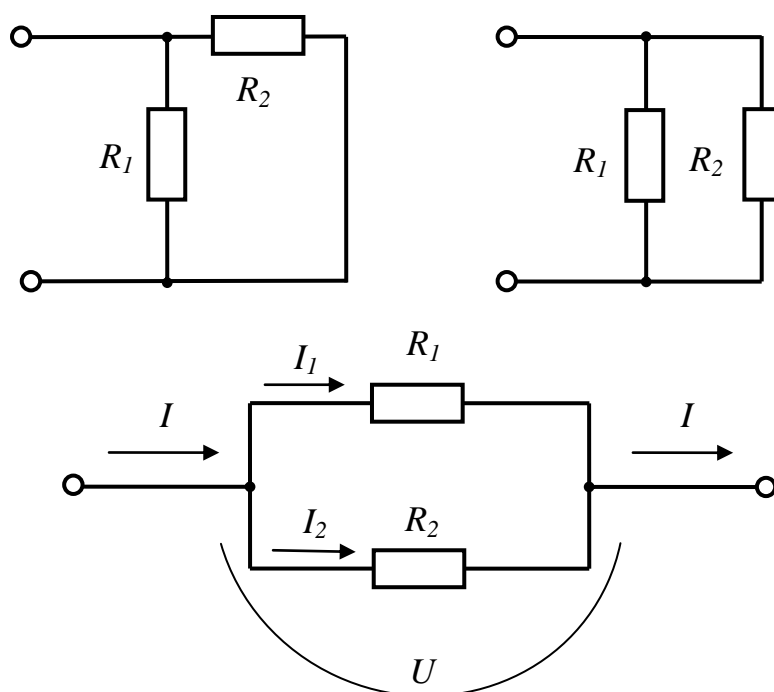


Рис.3. Параллельное соединение сопротивлений

Свойства параллельного соединения:

1. Напряжение на всех параллельных сопротивлениях одно и то же.

$$U_1 = U_2 = \dots = U. \quad (10)$$

2. В каждой ветви протекает свой ток. Общий ток равен сумме токов в ветвях:

$$I = I_1 + I_2. \quad (11)$$

3. Общее сопротивление при параллельном соединении определяется как обратная величина, равная сумме обратных величин всех сопротивлений.

$$\frac{1}{R_{\text{ОБЩ}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n}.$$

В случае двух параллельно соединенных сопротивлений:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \text{или} \quad R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}. \quad (12)$$

В случае трех параллельно соединенных сопротивлений:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \quad \text{или} \quad R = \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3}{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_1}. \quad (13)$$

4. Из соотношений (2.17) следует, что

$$I_1 \cdot R_1 = I_2 \cdot R_2 \quad \text{или} \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}. \quad (14)$$

*Сила тока в параллельно соединенных проводниках обратно пропорциональна их сопротивлениям.*

5. Изменение сопротивления какого-либо из параллельно соединенных потребителей не влияет на режим работы всех потребителей, т. к. напряжение на потребителях не изменяется.

В ряде случаев могут встретиться схемы, соединения в которых нельзя отнести ни к последовательному, ни к параллельному типу. В таких случаях преобразования носят более сложный характер: преобразование элементов схемы, соединенные звездой (рис. 4, а) в соединение треугольником (рис. 4, б) или наоборот.

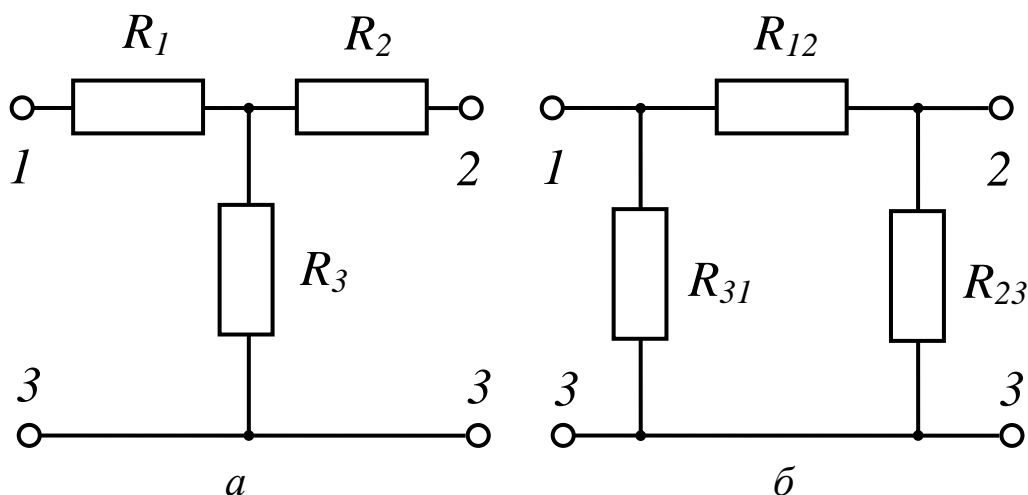


Рис. 4. Соединение звездой (а) и треугольником (б)

Это преобразование называется также преобразованием Т-образной схемы в П-образную и наоборот.

Соединение, при котором концы трех ветвей соединяются в общий узел, а начала ветвей присоединяются к трем узлам электрической цепи, называют *соединением звездой* (рис. 4, а).

Соединение, при котором конец первого элемента соединяется с началом второго, конец второго с началом третьего, конец третьего с началом первого, образуя замкнутый контур, и к узлам соединения элементов присоединяются ветви электрической цепи, называют *соединением треугольником* (рис. 4, б).

Преобразовать треугольник в звезду – значит заменить три сопротивления, соединенных в треугольник другими тремя сопротивлениями, соединенными в звезду между теми же точками электрической цепи. При этом на участках схемы, не затронутых этими преобразованиями, токи и напряжения должны остаться неизменными.

Для того, чтобы преобразование было эквивалентным, достаточно равенства сопротивлений между точками 1–2, 2–3 и 3–1 в обеих схемах. Запишем систему уравнений для сопротивлений:

для точек 1–2:

$$R_1 + R_2 = \frac{R_{12}(R_{23} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad (15)$$

для точек 2–3:

$$R_2 + R_3 = \frac{R_{23}(R_{12} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad (16)$$

для точек 3–1:

$$R_1 + R_3 = \frac{R_{31}(R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}. \quad (17)$$

Если решить эту систему относительно сопротивлений  $R_{12}$ ,  $R_{23}$  и  $R_{31}$  получим формулы эквивалентного преобразования звезды в треугольник.

$$\left. \begin{aligned} R_{12} &= R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}, \\ R_{23} &= R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1}, \\ R_{31} &= R_3 + R_1 + \frac{R_3 R_1}{R_2}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Если решить систему исходных уравнений относительно сопротивлений  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$  получим формулы эквивалентного преобразования треугольника в звезду.

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \frac{R_{12} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \\ R_2 &= \frac{R_{12} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \\ R_3 &= \frac{R_{23} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

### 3. РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА МЕТОДОМ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Расчет производится для электрической цепи постоянного тока с одним источником ЭДС и заключается в определении токов и напряжений на всех элементах цепи.

Расчет методом эквивалентных преобразований состоит из двух этапов: свертывание (сворачивание) схемы и развертывание (разворачивание) схемы.

#### 1. АЛГОРИТМ СВЕРТЫВАНИЯ СХЕМЫ

1. Найди участки цепи, где ясно видно группы последовательно или параллельно соединенных элементов.
2. Определи общее сопротивление на этом участке.
3. Перечерти схему, заменив несколько резисторов одним, равным им по сопротивлению.
4. Читай п. 1 и делай то, что там рекомендуется. Упрощения производят до тех пор, пока вся схема не будет сведена к одному сопротивлению, которое называют общим, эквивалентным или входным сопротивлением электрической цепи.

#### 2. РАЗВЕРТЫВАНИЕ (РАЗВОРАЧИВАНИЕ) СХЕМЫ.

Пользуясь законом Ома, свойствами последовательного и параллельного соединения элементов, последовательно определяют токи и напряжения на всех элементах цепи.

*Пример.*

Рассчитать электрическую цепь постоянного тока (рис. 5) при заданных параметрах цепи:  $R_1 = 3 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 2 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 5 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 3 \text{ Ом}$ ,  $R_5 = 2 \text{ Ом}$ ,  $R_6 = 1 \text{ Ом}$ ,  $R_7 = 2 \text{ Ом}$ ,  $E = \text{В}$ .

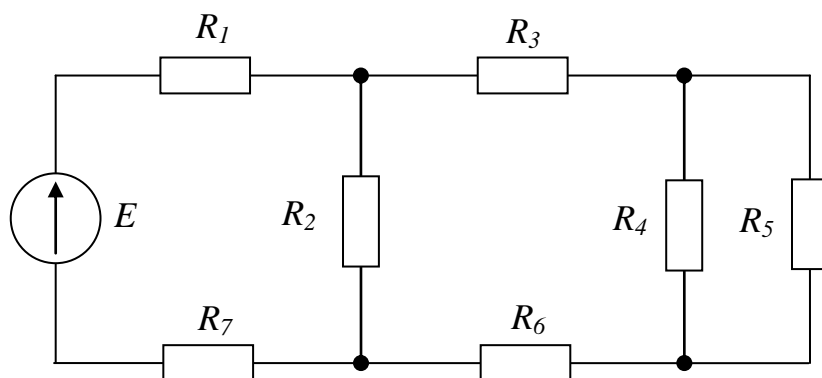


Рис. 5. Расчетная схема

Решение:

*Этап 1. Производим свертывание схемы в соответствии с алгоритмом.*

1. Сопротивления  $R_4$  и  $R_5$  соединены параллельно, значит, по формуле для параллельного соединения элементов получим:

$$R_a = \frac{R_4 \cdot R_5}{R_4 + R_5} = \frac{2 \cdot 1}{2 + 1} = \frac{2}{3} \approx 0,7 \text{ Ом.}$$

*Перечерчиваем схему:*

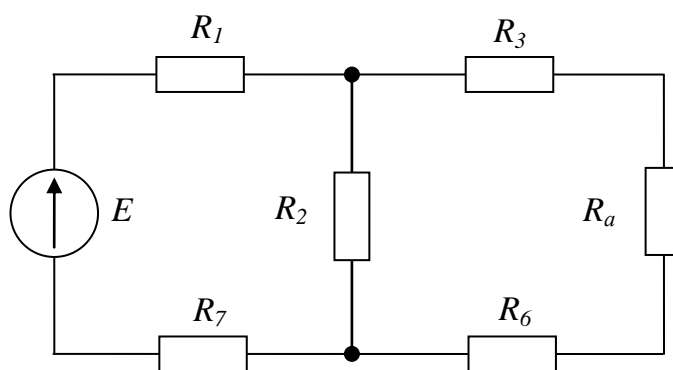


Рис. 6

2. Сопротивления  $R_3$ ,  $R_a$  и  $R_6$  соединены последовательно. Значит, по формуле для последовательного соединения элементов получим:

$$R_b = R_3 + R_a + R_6 = 5 + 0,7 + 1 = 6,7 \text{ Ом.}$$

*Перечерчиваем схему:*

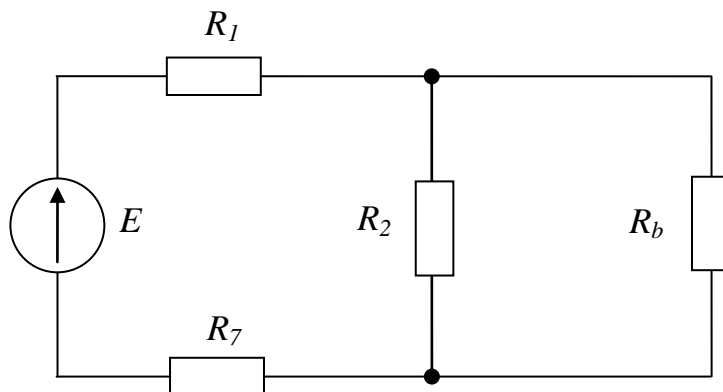


Рис. 7

3. Сопротивления ,  $R_2$  и  $R_b$  соединены параллельно, поэтому получим:

$$R_c = \frac{R_2 \cdot R_b}{R_2 + R_b} = \frac{2 \cdot 6,7}{2 + 6,7} = \frac{13,4}{8,7} \approx 1,5 \text{ Ом.}$$

Перечерчиваем схему:

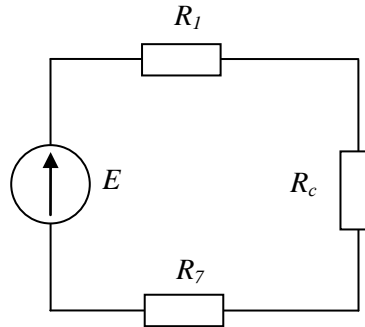


Рис. 8

4. Видно, что три элемента соединены последовательно:

$$R_{\text{экв.}} = R_1 + R_c + R_7 = 3 + 1,5 + 2 = 6,5 \text{ Ом.}$$

Таким образом, входное сопротивление данной схемы :

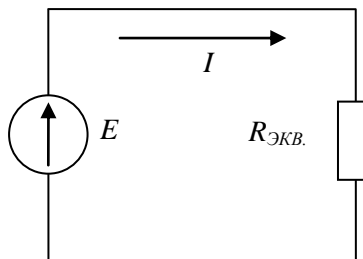


Рис. 9

$$R_{\text{экв.}} = 6,5 \text{ Ом.}$$

**Этап 2.** Пользуясь законом Ома, свойствами последовательного и параллельного соединения элементов, последовательно определяют токи и напряжения на всех элементах цепи.

5. По закону Ома определяем общий ток:

$$I = \frac{E}{R_{\text{экв.}}} = 10/6,5 = 1,54 \text{ А.}$$

Так как на схеме рис. 9 все параметры определены, переходим к схеме рис. 8.

6. На этой схеме три элемента  $R_1$ ,  $R_c$ ,  $R_7$  соединены последовательно, значит, ток, протекающий через них одинаковый, а падения напряжения на них разные. Записываем это следующим образом:

$$I_1 = I_c = I_7 = I = 1,54 \text{ A.}$$

$$U_1 = I_1 \cdot R_1 = 1,54 \cdot 3 = 4,62 \text{ В,}$$

$$U_c = I_c \cdot R_c = 1,54 \cdot 1,5 = 2,31 \text{ В,}$$

$$U_7 = I_7 \cdot R_7 = 1,54 \cdot 2 = 3,08 \text{ В.}$$

*Так как на схеме рис. 8 все токи и напряжения определены, переходим к схеме рис. 7.*

7. На схеме рис. 7, сопротивления  $R_2$  и  $R_b$  соединены параллельно, значит, напряжение на них одинаковое, а токи, текущие через них, разные. Записываем это следующим образом:

$$U_2 = U_b = U_c = 2,31 \text{ В.}$$

По закону Ома определяем токи:

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{2,31}{2} = 1,15 \text{ А}$$

$$I_b = \frac{U_b}{R_b} = \frac{2,31}{6,7} = 0,35 \text{ А.}$$

*Так как на схеме рис. 7 все токи и напряжения определены, переходим к схеме рис. 6.*

8. На схеме рис. 6, элементы  $R_3$ ,  $R_a$ ,  $R_6$  соединены последовательно, значит, ток, протекающий через них одинаковый, а падения напряжения на них разные. Записываем это следующим образом:

$$I_3 = I_a = I_6 = I_b = 0,35 \text{ А.}$$

$$U_3 = I_3 \cdot R_3 = 0,35 \cdot 5 = 1,75 \text{ В,}$$

$$U_a = I_a \cdot R_a = 0,35 \cdot 0,7 = 0,25 \text{ В,}$$

$$U_6 = I_6 \cdot R_6 = 0,35 \cdot 1 = 0,35 \text{ В.}$$

*Так как на схеме рис. 6 все токи и напряжения определены, переходим к схеме рис. 5.*



9. На схеме рис. 5, сопротивления  $R_4$  и  $R_5$  соединены параллельно, значит, напряжение на них одинаковое, а токи, текущие через них, разные. Записываем это следующим образом:

$$U_4 = U_5 = U_a = 0,25 \text{ В.}$$

По закону Ома определяем токи:

$$I_4 = \frac{U_4}{R_4} = \frac{0,25}{3} = 0,08 \text{ А}$$

$$I_5 = \frac{U_5}{R_5} = \frac{0,25}{2} = 0,13 \text{ А.}$$

*Таким образом, определили токи и напряжения на всех элементах цепи.*

10. Составляем баланс мощностей:

$$\Sigma P_{\text{ист}} = \Sigma P_{\text{потр.}}$$

Мощность источника определяется по формуле  $P_{\text{ист}} = E \cdot I$ .

Мощность потребителей определяется по формуле  $P_{\text{потр}} = I^2 \cdot R = I \cdot U$ .

$$P_{\text{ист}} = E \cdot I = 10 \cdot 1,54 = 15,4 \text{ Вт.}$$

$$P_{\text{потр}} = I_1^2 \cdot R_1 + I_2^2 \cdot R_2 + I_3^2 \cdot R_3 + I_4^2 \cdot R_4 + I_5^2 \cdot R_5 + I_6^2 \cdot R_6 + I_7^2 \cdot R_7 = 1,54^2 \cdot 3 + 1,15^2 \cdot 2 + 0,35^2 \cdot 5 + 0,08^2 \cdot 3 + 0,13^2 \cdot 2 + 0,35^2 \cdot 1 + 1,54^2 \cdot 2 = 7,12 + 2,65 + 0,61 + 0,02 + 0,03 + 0,12 + 4,74 = 15,29 \text{ Вт.}$$

$$15,4 \text{ Вт} \approx 15,29 \text{ Вт.}$$

*Баланс мощностей совпадает, значит, расчет электрической цепи произведен, верно.*

Примечание: ошибка в балансе мощностей не должна превосходить 3 %.

## РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА МЕТОДОМ ЗАКОНОВ КИРХГОФА

*Цель:* Изучить законы Кирхгофа и научиться применять их для расчета цепей постоянного тока

### 1. ЗАКОНЫ КИРХГОФА

В разветвленных электрических цепях токи в ветвях могут иметь различное значение и направление.

**Первый закон Кирхгофа** (закон для узла электрической цепи) является следствием закона сохранения количества электричества, согласно которому в любом узле электрической цепи заряд не может ни накапливаться, ни убывать.

Если в узле электрический заряд не накапливается и не расходуется, то сумма зарядов, приходящих к узлу в единицу времени, равна сумме зарядов, уходящих от узла, т.к. в противном случае в узле происходило-бы накопление электрического заряда. Поэтому *сумма всех токов, приходящих к узлу электрической цепи, равна сумме всех токов, выходящих из этого узла:*

$$\sum I_{\text{вх}} = \sum I_{\text{вых}} \quad (1)$$

Или 1-й закон Кирхгофа формулируется так: сумма токов, входящих в узел, равна сумме токов, выходящих из узла.

Например, рассмотрим узел электрической цепи.

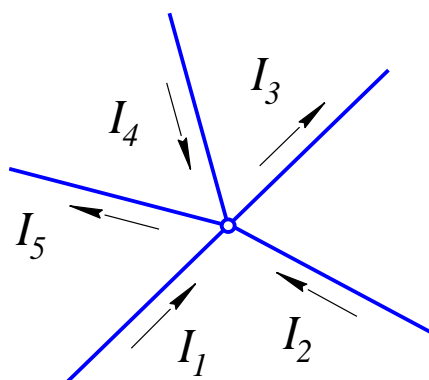


Рис.1. Узел электрической цепи

Для этого узла мы можем записать первый закон Кирхгофа:

$$I_1 + I_2 + I_4 = I_3 + I_5 \quad (2)$$

Запишем это уравнение по другому:

$$I_1 + I_2 - I_3 + I_4 - I_5 = 0 \quad (3)$$

На рис. 1 токи, направленные к узлу будем записывать со знаком «+», а направленные от узла – со знаком «-».

В итоге получим вторую формулировку **1-го закона Кирхгофа** – Алгебраическая сумма токов ветвей, сходящихся в узле равна нулю.

$$\sum I_n = 0. \quad (4)$$

**Второй закон Кирхгофа (закон для контура электрической цепи)** является следствием закона сохранения энергии для произвольного контура электрической цепи.

Формулируется 2-й закон Кирхгофа следующим образом: алгебраическая сумма напряжений на сопротивлениях замкнутого контура равна алгебраической сумме э.д.с. источников, действующих в этом контуре:

$$\sum_{i=1}^n U_i = \sum_{i=1}^n I_i R_i = \sum_{j=1}^m E_m, \quad (5)$$

где э.д.с.  $E_m$ , напряжения  $U_i$  и токи  $I_i$  берутся со знаком «+», если их направление совпадает с направлением обхода контура, и со знаком «-» – если их направление противоположно обходу контура.

Например, для первого контура разветвленной электрической цепи, схема которой представлена на рис. 2, этот закон запишется так:

$$U_1 + U_2 - U_3 = E_1 - E_2. \quad (6)$$

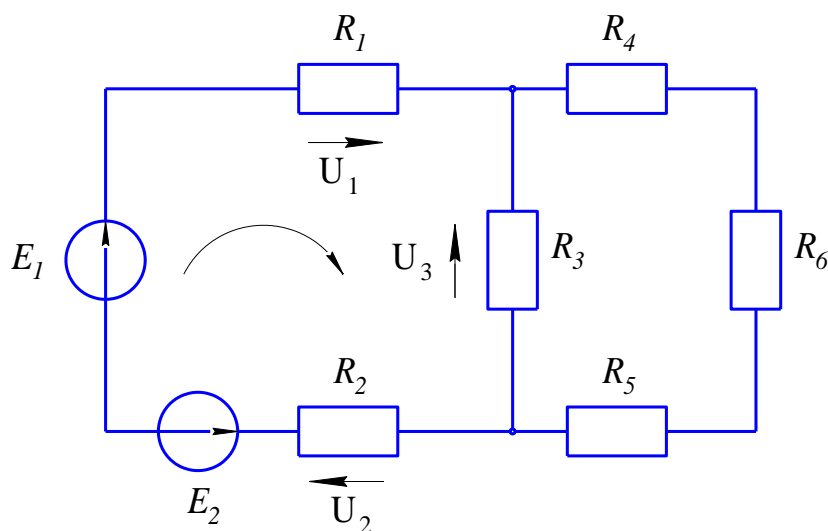


Рис. 2. Разветвленная электрическая цепь

Второй закон Кирхгофа устанавливает аналитическую связь между электродвижущими силами, токами и сопротивлениями любого замкнутого контура и является следствием закона сохранения энергии.

## 2. РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА МЕТОДОМ ЗАКОНОВ КИРХГОФА

Метод законов Кирхгофа является основным методом расчета и применяется для расчета электрических цепей с несколькими источниками энергии. Этот метод расчета позволяет рассчитать электрическую цепь с любым количеством контуров,

однако его недостатком является необходимость решать систему из большого количества уравнений.

## 2.1. АЛГОРИТМ РАСЧЕТА

1. Определить количество уравнений, которые необходимо составить по первому и второму законам Кирхгофа:

$$K_1 = N_Y - 1, \quad (7)$$

$$K_2 = N_B - N_Y + 1 - N_T, \quad (8)$$

где  $N_Y$  – количество узлов,  $N_B$  – количество ветвей,  $N_T$  – число источников тока в данной схеме.

2. Выберем произвольно положительное направление токов во всех ветвях схемы. Запишем  $K_1$  уравнений по первому закону Кирхгофа:

$$\sum I_{вх} = \sum I_{вых}. \quad (9)$$

3. Выбрав произвольно направление обхода контуров записать  $K_2$  уравнений по второму закону Кирхгофа:

$$\sum_{i=1}^n U_i = \sum_{i=1}^n I_i R_i = \sum_{j=1}^m E_j, \quad (10)$$

где  $n$  – число ветвей в контуре;

$m$  – число источников ЭДС в контуре;

$R_i$  – общее сопротивление ветви  $K$ .

ЭДС пишется со знаком «+», если направление обхода выбранного контура совпадает с направлением ЭДС, и со знаком «–», если не совпадает.

Падение напряжения  $R_K I_K$  записывается со знаком «+», если направление обхода выбранного контура совпадает с направлением тока  $I_K$ , и со знаком «–», если не совпадает.

4. Подставляем известные данные и решаем получившуюся систему уравнений решают относительно токов. Если значение тока получилось со знаком «–», то необходимо изменить направление тока на схеме.

5. Составляем баланс мощностей: сумма мощностей потребителей равна сумме мощностей источников э.д.с.:

$$\sum_k P_{потр} = \sum_m P_{ист}. \quad (11)$$

Мощность потребителей определяется по формуле

$$P_k = I_k^2 R_k. \quad (12)$$

Мощность источников э.д.с. определяется по формуле

$$P_m = \pm E_m I_m. \quad (13)$$

Мощность источника энергии берется со знаком «+», если направление э.д.с. и тока, протекающего через нее совпадают, и со знаком «–» – если не совпадают.

## 2.2. ПРИМЕР РАСЧЕТА

Методом законов Кирхгофа найти все токи в цепи.

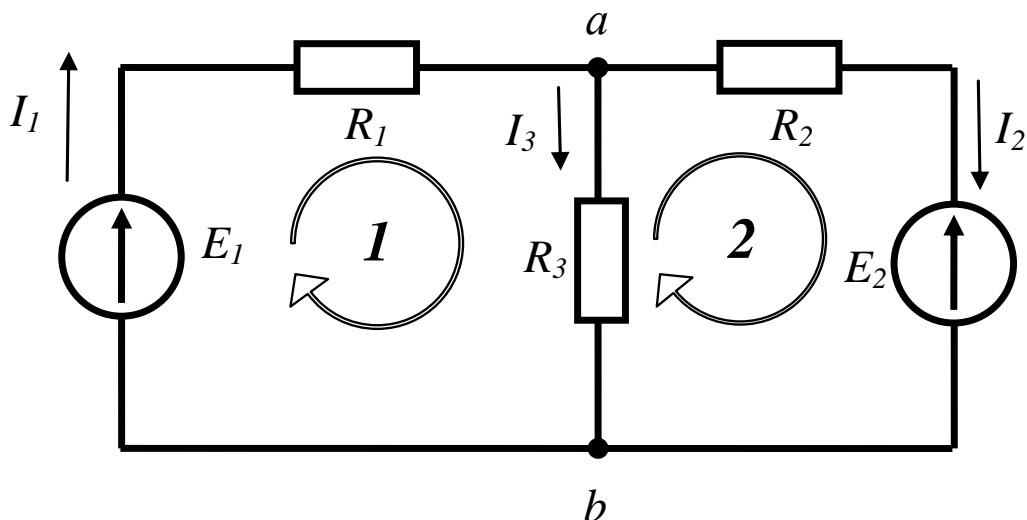


Рис. 3. Электрическая цепь постоянного тока

### Решение

1. Выбираем произвольно направление токов во всех ветвях и рассчитываем необходимое количество уравнений по первому и второму законам Кирхгофа.

$$N_B = 3, N_Y = 2, N_T = 0; \quad (14)$$

$$K_1 = N_Y - 1 = 2 - 1 = 1; \quad (15)$$

$$K_2 = N_B - N_Y + 1 - N_T = 3 - 2 + 1 = 2. \quad (16)$$

2. Записываем одно уравнение по первому закону Кирхгофа для узла *a*:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0. \quad (17)$$

3. Запишем два уравнения по второму закону Кирхгофа. При выборе замкнутых контуров нужно следить за тем, чтобы уравнения второго закона Кирхгофа были – бы независимы друг от друга. Достаточным условием независимости может быть требование, что каждый новый замкнутый контур должен содержать хотя – бы одну новую ветвь.

Для первого контура:

$$R_1 \cdot I_1 + R_3 \cdot I_3 = E_1; \quad (18)$$

для второго контура:

$$R_2 \cdot I_2 - R_3 \cdot I_3 = -E_2. \quad (19)$$

Окончательно получим следующую систему относительно токов:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0; \quad (20)$$

$$R_1 \cdot I_1 + R_3 \cdot I_3 = E_1; \quad (21)$$

$$R_2 \cdot I_2 - R_3 \cdot I_3 = -E_2. \quad (22)$$

4. Подставляем известные данные и решив данную систему уравнений методом Гаусса, методом Крамера или матричным методом найдем неизвестные токи.

5. Определяем мощность источников и приемников энергии и составляем баланс мощностей, вследствие которого

$$\sum_{h=1}^{h=m} E_h I_h = \sum_{h=1}^{h=m} R_h I_h^2. \quad (23)$$

В левой части уравнения при совпадении направлений  $E_h$  и  $I_h$  произведение положительно, а при несовпадении – отрицательно.

6. При наличии в схеме источников тока их следует учитывать при записи уравнений 1-го закона Кирхгофа. Отдаваемая ими энергия учитывается в левой части уравнения баланса мощностей.

7. Если ток определен отрицательным, то его действительное направление противоположно принятому в начале расчета, необходимо изменить его направление на схеме.

## РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА МЕТОДОМ КОНТУРНЫХ ТОКОВ

**Цель:** Изучить метод контурных токов и научиться применять его для расчета сложных электрических цепей постоянного тока.

*Метод контурных токов* дает возможность упростить расчет электрических цепей по сравнению с методом законов Кирхгофа за счет уменьшения числа уравнений.

В основу метода контурных токов положено два предположения:

- 1) в каждом независимом контуре протекает свой контурный ток;
- 2) реальные токи в ветвях электрической цепи равны алгебраической (т.е. с учетом знаков) сумме контурных токов, протекающих через данную ветвь.

Согласно этому методу неизвестными величинами являются контурные токи, поэтому число уравнений для решения снижается до числа независимых контуров. В основе метода контурных токов используется второй закон Кирхгофа.

### 1. ОСНОВНЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ

Для анализа и расчета реальная электрическая цепь представляется графически в виде расчетной электрической схемы (схемы замещения). В этой схеме реальные элементы цепи изображаются условными обозначениями, причем вспомогательные элементы цепи обычно не изображаются. Сопротивление соединительных проводов намного меньше сопротивления других элементов цепи, поэтому его обычно не учитывают. Например, на рисунке 1 показана расчетная электрическая схема, в которой есть несколько источников ЭДС и потребителей.

При расчете в схеме электрической цепи выделяют несколько основных элементов.

**Ветвь** электрической цепи – участок цепи с одним и тем же током. Ветвь может состоять из одного или несколько последовательно соединенных элементов. Например, схема на рис. 1 имеет шесть ветвей:  $amb$ ,  $anb$ ,  $aqd$ ,  $bqc$ ,  $brd$ ,  $dsc$ .

**Узел** электрической цепи – место соединения трех и более ветвей. В схеме на рис. 1 имеется четыре узла  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$ .

**Контур** – любой замкнутый путь, проходящий по нескольким ветвям. В схеме на рис. 1 можно выделить шесть контуров. Стрелкой на схеме показывают направление обхода контура.

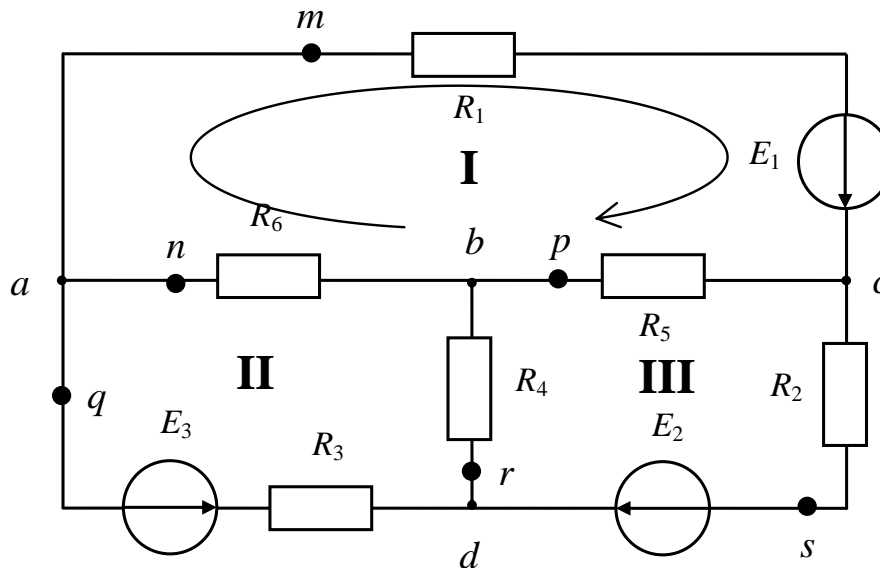


Рис. 1. Схема замещения электрической цепи

Контур, не имеющий внутри себя ветвей, называют **независимым контуром** или **ячейкой**. На схеме рис. 1 имеется три независимых контура. Они обозначены на схеме римскими цифрами **I**, **II** и **III**.

Любая разветвленная электрическая цепь состоит из нескольких смежных независимых контуров. Например, в электрической цепи рис. 1 таких контуров три. Каждый контур имеет *несмежные ветви*, принадлежащие лишь данному контуру, и ветви, принадлежащие также соседним контурам. Общая ветвь для двух контуров называется **смежной**. Так, контур **I** имеет одну несмежную ветвь *amc* и две смежные ветви *anb* и *bpc*.

## 2. ВТОРОЙ ЗАКОН КИРХГОФА

*Второй закон Кирхгофа* устанавливает аналитическую связь между электродвижущими силами, токами и сопротивлениями любого замкнутого контура электрической цепи и является следствием закона сохранения энергии.

Формулируется *второй закон Кирхгофа* следующим образом: алгебраическая (т.е. с учетом знаков) сумма напряжений на сопротивлениях замкнутого контура равна алгебраической (т.е. с учетом знаков) сумме ЭДС источников, действующих в этом контуре:

$$\sum_{i=1}^n U_i = \sum_{i=1}^n I_i R_i = \sum_{j=1}^m E_m, \quad (1)$$

где ЭДС  $E_m$ , напряжения  $U_i$  и токи  $I_i$  берутся со знаком «+», если их направление совпадает с направлением обхода контура, и со знаком «-» — если их направление противоположно обходу контура.

При записи уравнений по второму закону Кирхгофа необходимо:

- 1) задать условные положительные направления ЭДС, токов и напряжений;
- 2) выбрать направление обхода контура, для которого записывается уравнение;



3) записать уравнение, пользуясь одной из формулировок второго закона Кирхгофа, причем слагаемые, входящие в уравнение, берут со знаком «+», если их условные положительные направления совпадают с обходом контура, и со знаком «-», если они противоположны.

Если в электрической цепи включены источники напряжений, то второй закон Кирхгофа формулируется в следующем виде: алгебраическая сумма напряжений на всех элементах контура, включая источники ЭДС равна нулю:

$$\sum_{k=1}^m U_k = 0. \quad (2)$$

Например, для первого контура разветвленной электрической цепи, схема которой представлена на рис. 2, этот закон запишется так:

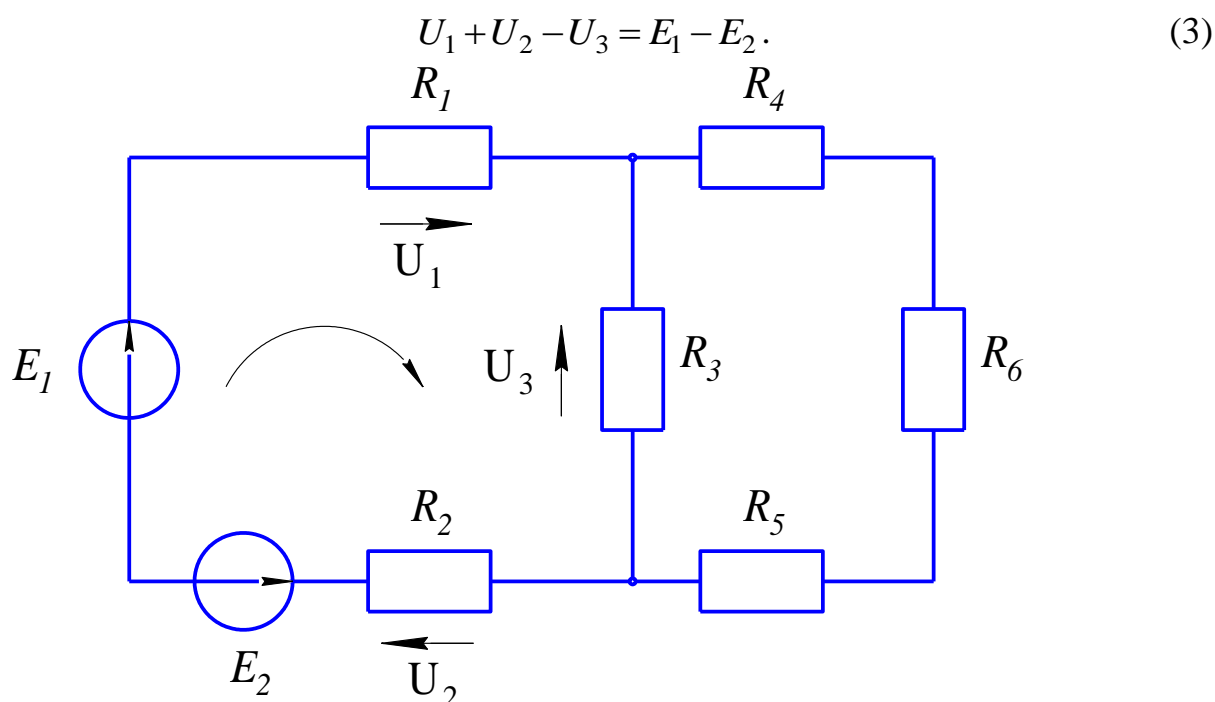


Рис. 2. Разветвленная электрическая цепь

### 3. РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА МЕТОДОМ КОНТУРНЫХ ТОКОВ

#### 3.1. АЛГОРИТМ РАСЧЕТА

1. Произвольно обозначаем независимые контуры (римскими цифрами) электрической цепи.
2. Произвольно задаем направление протекания *контурных токов* в каждом из независимых контуров (по часовой стрелке или против) и показываем эти токи дугообразными стрелками с индексами. Направление контурных токов в контурах целесообразно выбрать в одну сторону. Для нумерации контурных токов можно использовать арабские двойные цифры ( $I_{11}$ ,  $I_{22}$ ,  $I_{33}$  и т. д.), буквы ( $I_A$ ,  $I_B$ ,  $I_C$  и т. д.) или римские цифры.

3. По второму закону Кирхгофа, относительно контурных токов, составляем уравнения для всех независимых контуров. При записи равенства удобно считать, что направление обхода контура, совпадает с направлением контурного тока данного контура. Следует учитывать и тот факт, что в смежных ветвях, принадлежащих двум контурам, протекают два контурных тока. Падение напряжения на потребителях в таких ветвях надо брать от каждого контурного тока в отдельности с учетом их направления.
4. Подставляем в полученную систему уравнений все известные данные. Решаем любым методом систему уравнений и определяем контурные токи.
5. Произвольно задаемся направлением *реальных токов* всех ветвей и обозначаем их. Обозначать эти токи надо таким образом, чтобы не спутать с контурными токами. Для нумерации реальных токов можно использовать арабские цифры ( $I_1, I_2, I_3$  и т. д.).
6. *Реальный ток* ветви равен алгебраической (т.е. с учетом знаков) сумме контурных токов, протекающих по данной ветви. Определяем реальные токи электрической цепи следующим образом:
  - а) токи в не смежных ветвях равны своим контурным токам. Они берутся со знаком «+», если направление контурного и тока ветви совпадают и со знаком «-», если их направление не совпадает с направлением контурного тока.
  - б) токи в смежных ветвях равны алгебраической сумме соответствующих контурных токов, причем контурный ток берется со знаком «+», если его направление совпадает с направлением действительного тока и со знаком «-», если его направление не совпадает с направлением тока ветви.
7. Т.к. направления действительных токов были заданы произвольно, то некоторые из них могут получиться отрицательными. Это значит, что на схеме они направлены в противоположную сторону, поэтому необходимо заменить направления отрицательных токов на противоположные.
8. Составляем баланс мощностей: сумма мощностей потребителей равна сумме мощностей источников э.д.с.:

$$\sum_k P_{\text{потр}} = \sum_m P_{\text{ист}}. \quad (7)$$

Мощность потребителей определяется по формуле

$$P_k = I_k^2 R_k. \quad (8)$$

Мощность источников э.д.с. определяется по формуле

$$P_m = \pm E_m I_m, \quad (9)$$

где мощность источника энергии берется со знаком «+», если направление э.д.с. и тока, протекающего через нее совпадают, и со знаком «-» – если не совпадают.

### 3.2. ПРИМЕР РАСЧЕТА

Методом контурных токов найти все токи в схеме рис. 4. Расчетные данные:

$R_1$ Ом	$R_2$ Ом	$R_3$ Ом	$R_4$ Ом	$R_5$ Ом	$R_6$ Ом	$E_1$ В	$E_2$ В	$E_3$ В
1	1	1	6	6	4	15	10	5

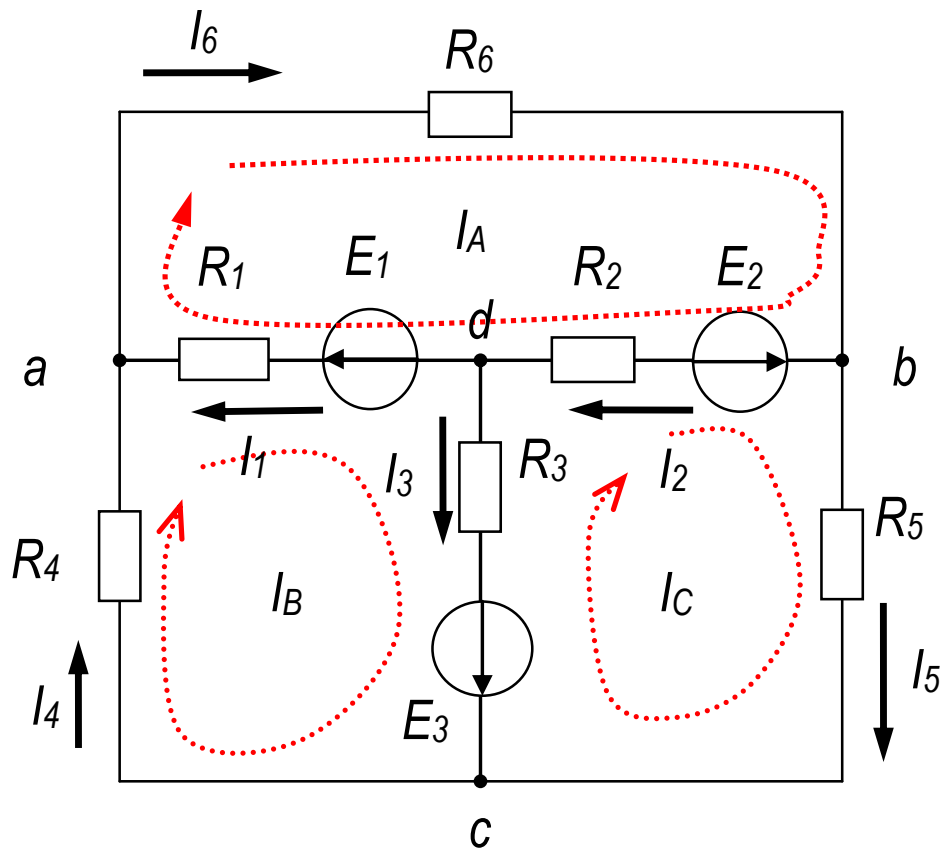


Рис. 4. Расчетная электрическая схема

1) В данной схеме три независимых контура (ячейки). Выбираем направление контурных токов  $I_A$ ,  $I_B$ ,  $I_C$  как показано на рис. 4, направление обхода контуров считаем таким же.

2) Для контурных токов по второму закону Кирхгофа составляем контурные уравнения для каждого независимого контура:

$$\begin{aligned} \text{контур } aR_6b: \quad & I_A(R_1 + R_2 + R_6) - I_B R_1 - I_C R_2 = E_1 - E_2, \\ \text{контур } aR_4c: \quad & I_B(R_1 + R_3 + R_4) - I_A R_1 - I_C R_3 = E_3 - E_1, \\ \text{контур } cR_5b: \quad & I_C(R_2 + R_3 + R_5) - I_B R_3 - I_A R_2 = E_2 - E_3. \end{aligned}$$

3) Подставляя исходные данные, получим:

$$\begin{aligned} 6 I_A - I_B - I_C &= 5 \\ -I_A + 8 I_B - I_C &= -10 \\ -I_A - I_B + 8 I_C &= 5 \end{aligned}$$

4) Решаем полученную систему уравнений любым методом, например, методом определителей. Для этого составим и вычислим основной и вспомогательные определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 360, \quad \Delta_A = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -10 & 8 & -1 \\ 5 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 270,$$

$$\Delta_B = \begin{vmatrix} 6 & 5 & -1 \\ -1 & -10 & -1 \\ -1 & 5 & 8 \end{vmatrix} = -390, \quad \Delta_C = \begin{vmatrix} 6 & -1 & 5 \\ -1 & 8 & -10 \\ -1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 210.$$

Вычисляем контурные токи:

$$I_A = \frac{\Delta_A}{\Delta} = 0,75 \text{ А}, \quad I_B = \frac{\Delta_B}{\Delta} = -1,08 \text{ А}, \quad I_C = \frac{\Delta_C}{\Delta} = 0,58 \text{ А}.$$

5) Вводим произвольно направление токов в ветвях и составляем уравнения для их определения (рис. 4):

$$\begin{aligned} I_1 &= I_A - I_B = 0,75 - (-1,08) = 1,83 \text{ А}, \\ I_2 &= I_A - I_C = 0,75 - 0,58 = 0,17 \text{ А}, \\ I_3 &= I_B - I_C = -1,08 - 0,58 = -1,66 \text{ А}, \\ I_4 &= I_B = -1,08 \text{ А}, \\ I_5 &= I_C = 0,58 \text{ А}, \\ I_6 &= I_A = 0,75 \text{ А}. \end{aligned}$$

Токи  $I_3, I_4$  получились со знаком «-», значит необходимо изменить на схеме их направления на противоположные (рис. 5):

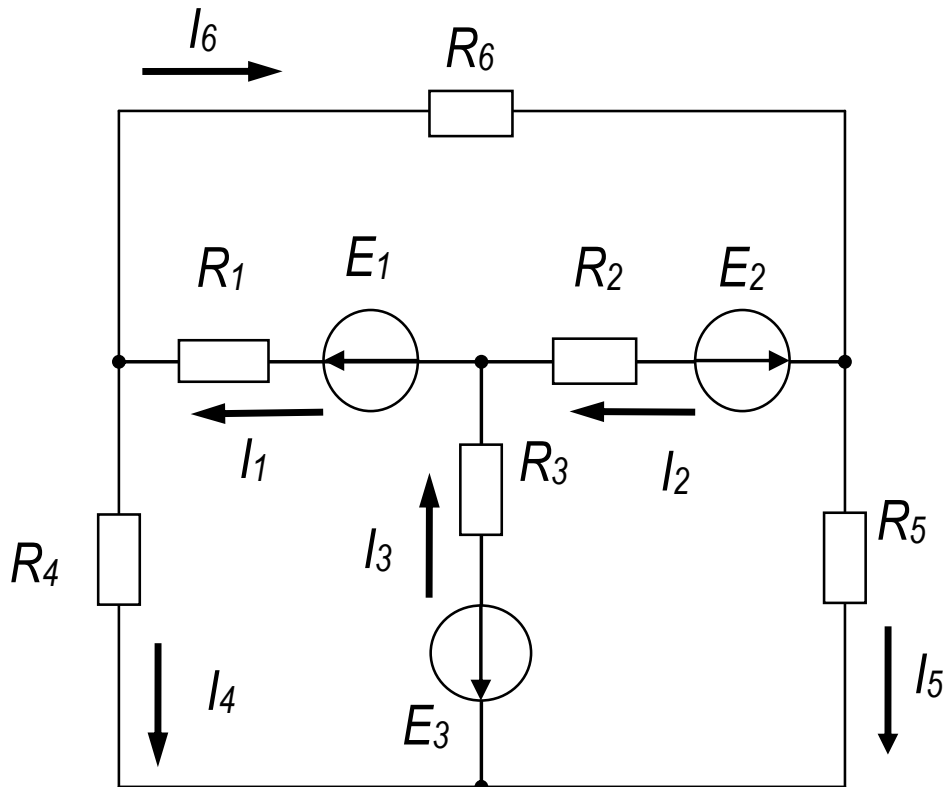


Рис. 5. Истинные направления токов ветвей на схеме

6) Составляем баланс мощностей:

$$\sum_k P_{\text{потр}} = \sum_m P_{\text{ист}}.$$

$$\sum P_{\text{ист}} = E_1 I_1 - E_2 I_2 - E_3 I_3 = 15 \cdot 1,83 - 10 \cdot 0,17 - 5 \cdot 1,66 = 17,45 \text{ Вт}$$

$$\sum P_{\text{потр}} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6 =$$

$$= 1,83^2 \cdot 1 + 0,17^2 \cdot 1 + 1,66^2 \cdot 1 + 1,08^2 \cdot 6 + 0,58^2 \cdot 6 + 0,75^2 \cdot 4 = 17,40 \text{ Вт}$$

Видно, что баланс мощностей выполняется, значит, расчет схемы произведен, верно.

Ответ:  $I_1 = 1,83 \text{ А}$ ,  $I_2 = 0,17 \text{ А}$ ,  $I_3 = 1,66 \text{ А}$ ,  
 $I_4 = 1,08 \text{ А}$ ,  $I_5 = 0,58 \text{ А}$ ,  $I_6 = 0,75 \text{ А}$ .

#### 4. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ КРАМЕРА

Пусть дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (10)$$

Рассмотрим матрицу, составленную из коэффициентов при неизвестных:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Свободные члены и неизвестные можно записать в виде матрицы столбцов:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_3 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Тогда, используя правило умножение матриц, эту систему уравнений можно записать так:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}. \quad (13)$$

или

$$A \cdot X = B. \quad (14)$$

Равенство (1) называется матричным уравнением или системой уравнений в матричном виде.

##### 4.1. МЕТОД КРАМЕРА

При решении систем линейных уравнений по методу Крамера последовательно выполняется следующий алгоритм.

1. Записывают систему в матричном виде (если это еще не сделано).
2. Вычисляют главный определитель системы:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}. \quad (15)$$

3. Вычисляют все дополнительные определители системы:

$$\Delta_{x1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_m & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}, \quad (16)$$

$$\Delta_{x2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & b_m & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}, \quad (17)$$

$$\Delta_{xn} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & b_m \end{vmatrix}. \quad (18)$$

4. Если главный определитель системы не равен нулю, то выполняют пункт 5. Иначе рассматривают вопрос о разрешимости данной системы (имеет бесчисленное множество решений или не имеет решений).
5. Находят значения всех неизвестных по формулам Крамера для решения системы  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными, которые имеют вид:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x1}}{\Delta}; x_2 = \frac{\Delta_{x2}}{\Delta}; \dots; x_n = \frac{\Delta_{xn}}{\Delta}. \quad (19)$$

### **Пример 1**

Решить по методу Крамера систему из трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 7 \\ 7x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 3 \\ 5x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -12. \end{cases} \quad (20)$$

**Решение.** Запишем главный и побочные определители системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 7 & 4 & -8 \\ 5 & -3 & -4 \end{vmatrix}, \quad (21)$$

$$\Delta_{x1} = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & -8 \\ -12 & -3 & -4 \end{vmatrix}, \quad (22)$$

$$\Delta_{x2} = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 7 & 3 & -8 \\ 5 & -12 & -4 \end{vmatrix}, \quad (23)$$

$$\Delta_{x3} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 7 & 4 & 3 \\ 5 & -3 & -12 \end{vmatrix}. \quad (24)$$

Вычисляем эти определители:

$$\Delta = 3 \cdot 4 \cdot (-4) + 7 \cdot (-3) \cdot 5 + (-2) \cdot (-8) \cdot 5 - 5 \cdot 4 \cdot 5 - 3 \cdot (-3) \cdot (-8) - 7 \cdot (-2) \cdot (-4) = 48 - 105 + 80 - 100 - 72 - 56 = 128 - 333 = -205.$$

$$\Delta_{x1} = -112 + (-45) + (-192) - (-240) - 24 - 168 = -112 - 45 - 192 + 240 - 24 - 168 = 240 - 541 = -301.$$

$$\Delta_{x2} = -36 - 420 - 280 - 75 + 196 - 288 = 196 - 1099 = -903.$$

$$\Delta_{x3} = -144 - 147 - 30 - 140 + 27 - 168 = -629 + 27 = -602.$$

Главный определитель системы не равен нулю. Подставим найденные значения определителей в формулы Крамера (33), получим:

$$x1 = \Delta_{x1} / \Delta = -301 / (-205) = 1,468292682927 \approx 1,47;$$

$$x2 = \Delta_{x2} / \Delta = -903 / (-205) = 4,40487804878 \approx 4,4;$$

$$x3 = \Delta_{x3} / \Delta = -602 / (-205) = 2,936585365854 \approx 2,93.$$

### **Вывод:**

При решении систем линейных уравнений по методу Крамера используются формулы, в которых участвуют как главный, так и дополнительные определители системы уравнений (24):

$$x_1 = \frac{\Delta_{x1}}{\Delta}; x_2 = \frac{\Delta_{x2}}{\Delta}; \dots; x_n = \frac{\Delta_{xn}}{\Delta}. \quad (25)$$

Главным определителем системы называется определитель матрицы системы уравнений (24), составленной из коэффициентов при неизвестных:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}. \quad (26)$$

Если в главном определителе системы заменить поочередно столбцы коэффициентов при  $x_1, x_2, \dots, x_n$  на столбец свободных членов, то получим  $n$  дополнительных определителей (для каждого из  $n$  неизвестных):

$$\Delta_{x1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_m & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & b_m & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}, \dots, \\ \Delta_{xn} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & b_m \end{vmatrix}. \quad (27)$$

При этом важен вопрос о разрешимости данной системы, который решается сравнением главного и дополнительных определителей системы с нулем.

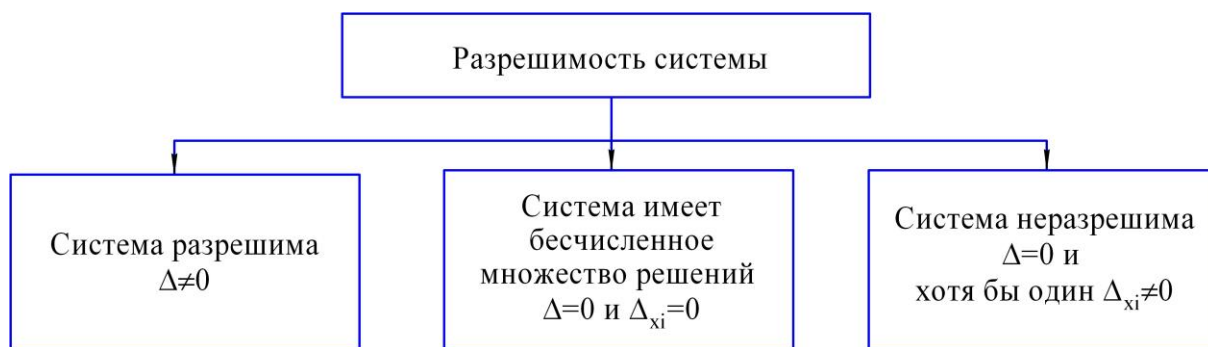


Рис. 6. Разрешимость системы

#### 4.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Определитель второго порядка вычисляется по формуле

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1. \quad (28)$$

Определитель третьего порядка вычисляется по формуле

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2. \quad (29)$$

Существует удобная схема для вычисления определителя третьего порядка (см. рис. 7).

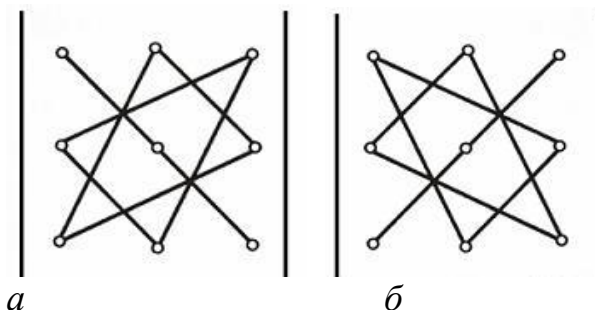
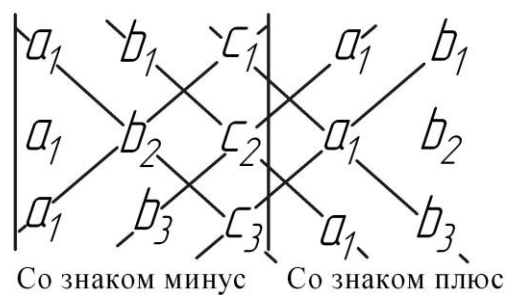


Рис. 7. Схема для вычисления определителя

По схеме, приведенной на рис. 7, а, произведения соединенных элементов берутся со знаком «+», а по схеме рис. 7, б – со знаком «-». Величина определителя равна алгебраической сумме полученных шести произведений.

Существует способ вычисления определителей, который называется способом Сарруса или способом «параллельных полосок». Суть состоит в том, что справа от определителя приписывают первый и второй столбец и аккуратно карандашом проводят линии (рис. 8).





*Рис. 8. Вычисление определителя методом Сарруса*

Множители, находящиеся на диагоналях сверху вниз входят в формулу со знаком «плюс». Множители, находящиеся на диагоналях снизу вверх входят в формулу со знаком минус.

## РАСЧЕТ ОДНОФАЗНЫХ ЦЕПЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА СИМВОЛИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

**Цель:** Изучить символический метод и научиться применять его для расчета разветвленных цепей однофазного переменного тока.

### 1. Формы записи и изображение комплексных чисел

#### Алгебраическая форма записи комплексного числа

Комплексными числами называют числа вида

$$\bar{z} = a + jb, \quad (1)$$

где  $a$  и  $b$  – действительные величины, а  $j$  – так называемая мнимая единица, удовлетворяющая условию

$$j^2 = -1.$$

Величины  $a$  и  $b$  называют соответственно действительной и мнимой частями комплексного числа  $\bar{z}$ :

$$a = \operatorname{Re} \bar{z}, \quad b = \operatorname{Im} \bar{z}.$$

Равенство двух комплексных чисел  $\bar{z}_1 = a_1 + jb_1$  и  $\bar{z}_2 = a_2 + jb_2$  означает, что равны их действительные и мнимые части:  $a_1 = a_2$  и  $b_1 = b_2$ .

Например, если число  $\bar{z} = a + jb = 0$ , то равны нулю и  $a$  и  $b$ .

Для комплексных чисел отсутствует понятие «больше», «меньше». Например, нельзя сказать, что  $4j$  больше  $2j$ .

Представление комплексного числа в виде (1), называют алгебраической формой записи комплексного числа.

#### Геометрическое изображение комплексных чисел

Для изображения комплексных чисел на плоскости проводят две взаимно перпендикулярные оси. Ось абсцисс называют действительной осью, ось ординат – мнимой осью, а плоскость, в которой лежат эти оси, – комплексной плоскостью. Комплексное число  $\bar{z} = a + jb$  может быть представлено на комплексной плоскости точкой с абсциссой  $a$  и ординатой  $b$  или радиус-вектором, соединяющим начало координат и точку  $z(a, b)$ . При этом все действительные числа изображаются точками на оси абсцисс, а мнимые – точками на оси ординат.

**Например,**  $\bar{Z} = 2 + j4$ , векторное представление комплексного числа представлено на рис. 1.

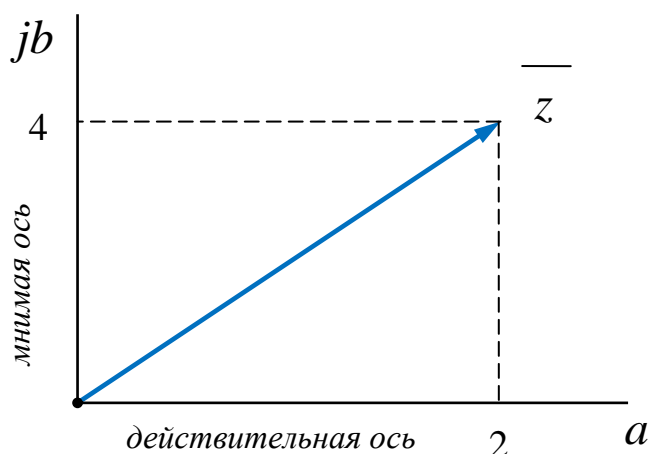


Рис. 1. Изображение комплексного числа на комплексной плоскости

### Тригонометрическая форма комплексного числа

Выберем на плоскости  $XOY$  полярную систему координат так, чтобы полюс совпал с началом координат комплексной плоскости, а полярная ось пошла бы по положительному направлению действительной оси. Обозначим полярный радиус точки  $\bar{z} = a + jb$  через  $\rho$ , а полярный угол через  $\varphi$  (рис. 2).

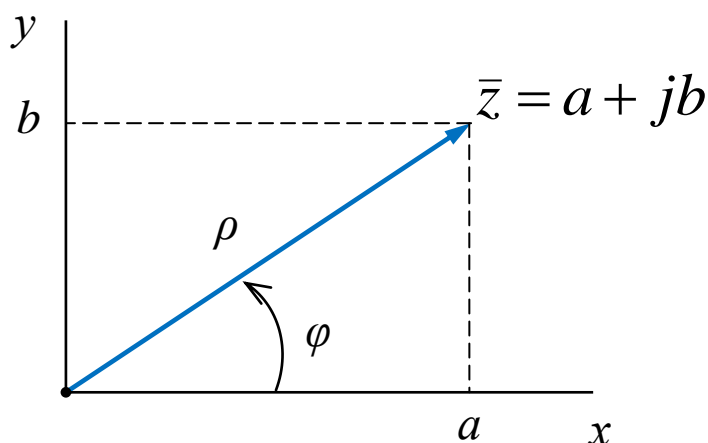


Рис. 2. Комплексное число в полярной системе координат

Из рисунка 2 видна связь между полярными координатами точки на плоскости и действительной и мнимой частями комплексного числа  $\bar{z} = a + jb$ :

$$a = \rho \cos \varphi;$$

$$b = \rho \sin \varphi.$$

Следовательно, комплексное число  $\bar{z} = a + jb$  можно переписать в виде:

$$\bar{z} = a + jb = \rho \cos \varphi + \rho \sin \varphi = \rho (\cos \varphi + \sin \varphi).$$

Представление комплексного числа в виде  $\bar{z} = \rho (\cos \varphi + \sin \varphi)$ , называют тригонометрической формой комплексного числа.

Длина  $\rho$  вектора, изображающего комплексное число  $\bar{z}$ , называется модулем комплексного числа:

$$\rho = |\bar{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Угол  $\varphi$  между положительным направлением действительной оси и направлением вектора, изображающего комплексное число, называют аргументом комплексного числа:

$$\varphi = \arg \bar{z}.$$

Модуль  $\rho$  и аргумент  $\varphi$  числа  $\bar{z} = a + jb$  связаны с его действительной и мнимой частью соотношениями

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos \varphi = \frac{a}{\rho}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\rho}.$$

В электротехнике часто аргумент комплексного числа определяют как

$$\varphi = \arctg \frac{b}{a}.$$

Тригонометрическая форма записи комплексного числа применяется при переходе от алгебраической формы к показательной форме записи комплексного числа.

При расчетах аргумента необходимо учитывать знаки мнимой и действительной части комплексного числа, т.е. в какой четверти системы координат находится комплексное число.

Для определения аргумента комплексного числа  $\varphi$  введем вспомогательную величину

$$\psi = \arctg \left( \frac{|b|}{|a|} \right),$$

тогда значения аргумента  $\varphi$  можно определить:

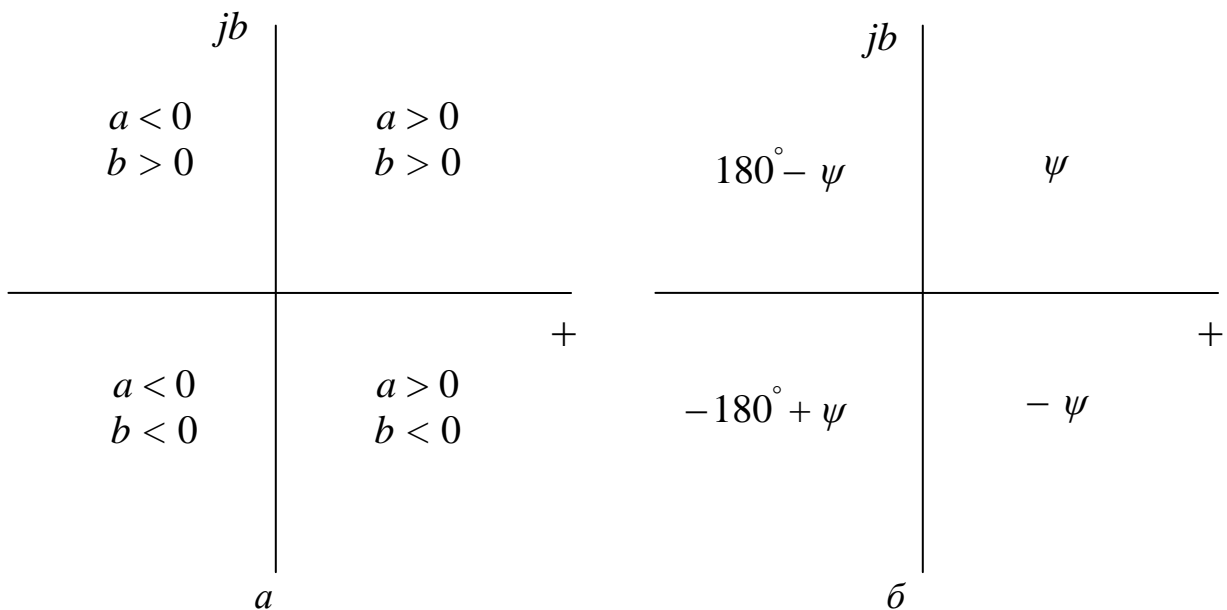


Рис. 3. Значения аргумента  $\varphi$  (рис. б) в зависимости от знаков мнимой и действительной части комплексного числа (рис. а)

Эти значения аргумента комплексного числа сведены в таблицу 1.

Таблица 1

Значения аргумента комплексного числа в зависимости от знака действительной и мнимой части числа

$\varphi =$	не определён	при	$a = b = 0$	
	$90^\circ$	при	$b > 0, a = 0$	$0 + jb$
	$-90^\circ$	при	$b < 0, a = 0$	$0 - jb$
	$\psi$	при	$b \geq 0, a > 0$	$a + jb$
	$180^\circ - \psi$	при	$b \geq 0, a < 0$	$-a + jb$
	$-180^\circ + \psi$	при	$b < 0, a < 0$	$-a - jb$
	$-\psi$	при	$b < 0, a > 0$	$a - jb$

**Пример.** Найти аргумент комплексного числа  $\bar{z} = -3 - j2$ .

Так как комплексное число находится в третьей четверти ( $a < 0, b < 0$ ), то получим:

$$\varphi = -180^\circ - \psi = -180^\circ + \arctg\left(\frac{|b|}{|a|}\right) = -180^\circ + \arctg\left(\frac{2}{3}\right) = -180^\circ + 33,7^\circ = -146,3^\circ$$

### Показательная форма комплексного числа

Формула Эйлера

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$$

позволяет представить комплексное число в виде:

$$\bar{z} = a + jb = \rho(\cos \varphi + j \sin \varphi) = \rho e^{j\varphi}.$$

Представление комплексного числа в виде

$$\bar{z} = \rho e^{j\varphi},$$

называют показательной (экспоненциальной) формой комплексного числа.

Эта форма записи особенно удобна при расчетах синусоидальных токов и напряжений.

## 2. Действия над комплексными числами

Над комплексными числами можно производить такие же операции, как над действительными числами.

## Сложение и вычитание комплексных чисел

Два комплексных числа складываются (вычитаются) посредством сложения (вычитания) их действительных и мнимых частей.

Следовательно, если  $\bar{Z}_1 = a + jb$  и  $\bar{Z}_2 = c + jd$ , то

$$\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 = (a + jb) + (c + jd) = (a + c) + j(b + d)$$

и

$$\bar{Z}_1 - \bar{Z}_2 = (a + jb) - (c + jd) = (a - c) + j(b - d).$$

**Пример.**

$$(2 + j3) + (3 - j4) = 2 + j3 + 3 - j4 = (2 + 3) + j(3 - 4) = 5 - j1$$

и

$$(2 + j3) - (3 - j4) = 2 + j3 - 3 + j4 = (2 - 3) + j(3 + 4) = -1 + j7.$$

## Умножение и деление комплексных чисел

Чтобы **перемножить комплексные числа**, необходимо перемножить все величины в действительной и мнимой частях, как будто они действительные числа, а затем упростить, используя выражение  $j^2 = -1$ .

Следовательно, если  $\bar{Z}_1 = a + jb$  и  $\bar{Z}_2 = c + jd$ , то

$$\begin{aligned} (a + jb)(c + jd) &= ac + a(jb) + (jb)c + (jb)(jd) = \\ &= ac + jab + jbc + j^2bd = (ac - bd) + j(ab + bc), \text{ поскольку } j^2 = -1. \end{aligned}$$

**Пример.**

$$\begin{aligned} (3 + j2)(4 - j5) &= 12 - j15 + j8 - j^210 = \\ &= (12 - (-10)) + j(-15 + 8) = 22 - j7. \end{aligned}$$

Комплексные числа называются *комплексно-сопряженными*, если их действительные части одинаковые, а мнимые равны и отличаются только знаком.

Если  $\bar{Z} = a + jb$ , то комплексно-сопряженным будет число  $\bar{Z}^* = a - jb$ . В электротехнике комплексно-сопряженное число обозначается звездочкой.

Произведение двух комплексно-сопряженных чисел всегда равно действительному числу:

$$\begin{aligned} (a + jb)(a - jb) &= a^2 + a(-jb) + (jb)a + (jb)(-jb) = \\ &= a^2 - jab + jba - j^2b^2 = a^2 + b^2. \end{aligned}$$

**Пример.**

$$(3 + j4)(3 - j4) = 9 - j12 + j12 - j^2 16 = 9 + 16 = 25.$$

Деление комплексных чисел осуществляют, умножая и числитель и знаменатель на комплексно-сопряженное знаменателю.

$$\begin{aligned} \frac{a + jb}{c + jd} &= \frac{(a + jb)(c - jd)}{(c + jd)(c - jd)} = \frac{ac - jad + jbc - j^2 bd}{c^2 + d^2} = \\ &= \frac{(ac + bd) + j(bc - ad)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + j \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}. \end{aligned}$$

**Пример.**

$$\begin{aligned} \frac{2 - j5}{3 + j4} &= \frac{(2 - j5)(3 - j4)}{(3 + j4)(3 - j4)} = \frac{6 - j8 - j15 + j^2 20}{3^2 + 4^2} = \\ &= \frac{(6 - 20) + j(-8 - 15)}{25} = \frac{-14}{25} - j \frac{23}{25} = -0,56 - j0,92. \end{aligned}$$

Деление и умножение комплексных чисел удобно производить в комплексной форме записи.

Пусть  $\bar{Z}_1 = Z_1 e^{j\varphi_1}$  и  $\bar{Z}_2 = Z_2 e^{j\varphi_2}$ . Тогда умножение:

$$\bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2 = Z_1 e^{j\varphi_1} \cdot Z_2 e^{j\varphi_2} = Z_1 Z_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

деление

$$\frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2} = \frac{Z_1 e^{j\varphi_1}}{Z_2 e^{j\varphi_2}} = \frac{Z_1}{Z_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

**Пример.**  $\bar{Z}_1 = 8,5e^{-j36^\circ}$ ,  $\bar{Z}_2 = 3,2e^{j71^\circ}$ .

$$\bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2 = 8,5e^{-j36^\circ} \cdot 3,2e^{j71^\circ} = 8,5 \cdot 3,2e^{j(-36^\circ + 71^\circ)} = 27,2e^{j35^\circ}.$$

$$\frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2} = \frac{8,5e^{-j36^\circ}}{3,2e^{j71^\circ}} = \frac{8,5}{3,2} e^{j(-36^\circ - 71^\circ)} = 2,66e^{-j107^\circ}.$$

### 3. Представление синусоидального тока с помощью комплексных чисел

Рассмотрим проекции вращающегося против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вектора тока  $\bar{I}_m$  (рис. 4).

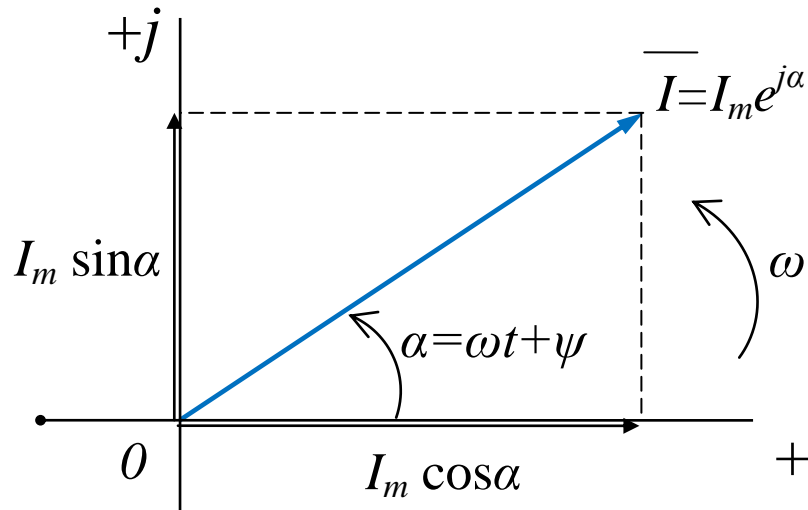


Рис. 4. Проекции вращающегося вектора  $\bar{I}_m$  на комплексной плоскости

Проекция на действительную ось будет равна  $I_m \cos \alpha$ . Проекция на мнимую ось —  $jI_m \sin \alpha$ .

Тогда согласно формуле Эйлера

$$I_m e^{j\alpha} = I_m \cos \alpha + jI_m \sin \alpha.$$

Угол  $\alpha$  может быть любым. Если  $\alpha = \omega t + \psi$ , где  $\psi$  — начальная фаза, то

$$I_m e^{j(\omega t + \psi)} = I_m \cos(\omega t + \psi) + jI_m \sin(\omega t + \psi),$$

где  $I_m \cos(\omega t + \psi)$  — действительная часть комплексного числа;

$jI_m \sin(\omega t + \psi)$  — мнимая часть комплексного числа.

Для единообразия принято на комплексной плоскости изображать векторы синусоидально изменяющихся во времени величин для момента времени  $\omega t = 0$ . Для этого момента времени вектор  $I_m e^{j(\omega t + \psi)}$  будет равен  $I_m e^{j\psi} = \bar{I}_m$ .

Величина  $\bar{I}_m = I_m e^{j\psi}$  называется комплексной амплитудой тока, где  $I_m$  — амплитуда тока,  $\psi$  — начальная фаза тока.

Аналогично можно записать для ЭДС и напряжения:

$$\bar{E}_m = E_m e^{j\psi_e},$$

$$\bar{U}_m = U_m e^{j\psi_U}.$$

При расчетах цепи обычно принято выражать напряжения и токи в виде комплексных чисел действующих значений напряжения и тока, а не их амплитудных значений.

Комплексным током  $\bar{I}$  называют выражение

$$\bar{I} = \frac{\bar{I}_m}{\sqrt{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi} = I e^{j\psi},$$



где  $I$  – действующее значение тока,  $\psi$  – начальная фаза тока.

Аналогично можно записать для комплексного напряжения и ЭДС:

$$\bar{U} = Ue^{j\psi_U},$$

$$\bar{E} = Ee^{j\psi_E}.$$

### Пример.

1. Записать выражение для комплексной амплитуды тока и комплекса тока, если мгновенное значение синусоидального тока  $i = 5\sin(\omega t - 30^\circ)$  А.

*Решение.* Сравнивая с общим выражением для тока  $i = I_m \sin(\omega t - \psi_I)$ , получим  $I_m = 5$  А,  $\psi_I = -30^\circ$ . Тогда получим

$$\bar{I}_m = I_m e^{j\psi_I} = 5e^{-j30^\circ} \text{ А.}$$

$$\bar{I} = Ie^{j\psi_I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_I} = \frac{5}{\sqrt{2}} e^{-j30^\circ} = 3,54e^{-j30^\circ} = 3,54\cos 30^\circ - 3,54\sin 30^\circ = 3,07 - j1,77.$$

2. По заданному комплексу тока  $\bar{I} = 4,5e^{j20^\circ}$  А, записать выражение для мгновенной силы тока.

*Решение.* По условию  $\bar{I} = Ie^{j\psi_I} = 4,5e^{j20^\circ}$  А, значит действующее значение тока  $I = 4,5$  А.

Тогда из определения действующего значения тока  $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$  получим, что

$$I_m = \bar{I}\sqrt{2} = 4,5 \cdot \sqrt{2} \cong 6,36 \text{ А.}$$

Следовательно, мгновенное значение силы тока

$$i = I_m \sin(\omega t - \psi_I) = 6,36 \sin(\omega t + 20^\circ) \text{ А.}$$

### Комплексные значения полного сопротивления и полной проводимостей цепи. Закон Ома в комплексной форме

Разделив комплексное напряжение на комплексный ток, получим комплексное полное сопротивление

$$\bar{Z} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}} = \frac{Ue^{j\psi_u}}{Ie^{j\psi_i}} = \frac{U}{I} e^{j(\psi_u - \psi_i)} = Ze^{j\varphi}, \quad (2)$$

где  $Z = U/I$  – модуль полного сопротивления;  $\varphi$  – угол сдвига фаз между напряжением и током.

Выразив комплексное значение полного сопротивления в тригонометрической форме, получим:

$$\bar{Z} = Ze^{j\varphi} = Z \cos \varphi + jZ \sin \varphi = R + jX = R + j(X_L - X_C),$$

где  $R$  – активное сопротивление;

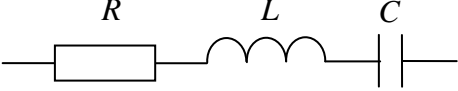
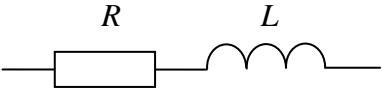
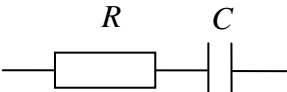
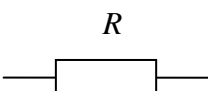
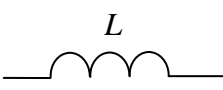
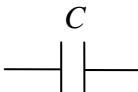
$X_L = 2\pi fL = \omega L$  – индуктивное сопротивление;

$X_C = 1/2\pi fC = 1/\omega C$  – емкостное сопротивление.

Комплексные сопротивления цепей различного характера приведены в табл. 2.

Таблица 2

Значения комплексного сопротивления

Характер цепи	Комплексные сопротивления
	$\bar{Z} = R + j(X_L - X_C) = Ze^{\pm j\varphi}$
	$\bar{Z} = R + jX_L = Ze^{j\varphi}$
	$\bar{Z} = R - jX_C = Ze^{-j\varphi}$
	$\bar{Z} = R = R \cdot e^{j0}$
	$\bar{Z} = jX_L = X_L e^{j90^\circ}$
	$\bar{Z} = -jX_C = X_C e^{-j90^\circ}$

Из формулы (2) получим:

$$\bar{I} = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}}, \quad (3)$$

где  $\bar{Z} = Ze^{j\varphi} = R + j(X_L - X_C)$  – комплексное полное сопротивление цепи. Выражение (3) называют законом Ома в комплексной форме.

### Законы Кирхгофа в комплексной форме

Первый закон Кирхгофа гласит, что алгебраическая сумма мгновенных значений токов в любом узле цепи равна нулю:

$$\sum i_n = 0.$$

Выразив мгновенные значения токов через их комплексные выражения, получим первый закон Кирхгофа в комплексной форме:

$$\sum \bar{I}_n = 0.$$

Сумма комплексных значений токов в любом узле цепи равна нулю.

Поскольку комплексные значения токов состоят из действительных и мнимых частей, очевидно, должны быть равны нулю отдельно сумма действительных и сумма мнимых частей комплексных значений токов в узле цепи:

$$\sum I \cos \psi = 0, \quad \sum I \sin \psi = 0.$$

Для любого замкнутого контура цепи переменного тока может быть составлено уравнение мгновенных значений ЭДС, токов и напряжений по второму закону Кирхгофа:

$$\sum e = \sum ir + \sum u.$$

Выразив ЭДС, токи и напряжения в комплексной форме, получим второй закон Кирхгофа в комплексной форме:

$$\sum \bar{E} = \sum \bar{I}\bar{Z} + \sum \bar{U}.$$

Сумма комплексных значений ЭДС при обходе замкнутого контура равна сумме произведений комплексных значений токов на соответствующие комплексные значения полных сопротивлений и сумме комплексных значений напряжений.

Комплексные ЭДС, токи и напряжения имеют знак плюс, если принятые направления этих величин совпадают с произвольно выбранным направлением обхода контура, и знак минус, когда направления противоположны.

Таким образом, *в комплексной форме справедливы все законы известные для линейных цепей постоянного тока*. Поэтому при расчетах цепей переменного тока можно применять методы уравнений Кирхгофа, метода контурных токов, узловых потенциалов и другие, только представив все параметры цепи в комплексной форме.

### Комплексная мощность

Комплексная мощность равна произведению комплекса напряжения и сопряженного комплекса тока

$$\bar{S} = \bar{U} \cdot \bar{I}^*.$$

Пусть даны комплексы напряжения и тока  $\bar{U} = Ue^{j\psi_U}$  и  $\bar{I} = Ie^{j\psi_I}$ . Тогда комплексно-сопряженный ток будет равен  $\bar{I}^* = Ie^{-j\psi_I}$ . Комплексная мощность

$$\bar{S} = \bar{U} \cdot \bar{I}^* = Ue^{j\psi_U} \cdot Ie^{-j\psi_I} = UIe^{j(\psi_U - \psi_I)} = UIe^{j\varphi} = UI \cos \varphi + UI \sin \varphi = P + jQ,$$

где  $P = UI \cos \varphi$  - активная мощность,  $Q = UI \sin \varphi$  - реактивная мощность.

**Пример.** Определить активную, реактивную и полную мощность цепи по заданным комплексам напряжения и тока:  $\bar{U} = 230e^{j30^\circ}$ ,  $\bar{I} = 25e^{-j30^\circ}$ .

*Решение.*

1. Комплексно-сопряженный ток:  $\bar{I}^* = 25e^{j30^\circ}$ .
2. Комплексная мощность:

$$\begin{aligned}\bar{S} &= \bar{U} \cdot \bar{I}^* = P + jQ = 230e^{j30^\circ} \cdot 25e^{j30^\circ} = 5750e^{j60^\circ} = \\ &= 5750\cos 60^\circ + j5750\sin 60^\circ = 2875 + j4970 \text{ ВА}.\end{aligned}$$

3. Полная мощность  $S = 5750 \text{ ВА}$ ;  
Активная мощность  $P = 2875 \text{ Вт}$ ;  
Реактивная мощность  $Q = 4970 \text{ ВАр}$ .

### Пример расчета линейной электрической цепи однофазного синусоидального тока символическим методом

Для цепи, изображенной на рис. 5 требуется:

1. Определить комплексным методом действующие значения напряжений и токов на всех участках цепи.
  2. Определить активные, реактивные и полные мощности каждого участка цепи и всей цепи.
  3. Составить баланс активных и реактивных мощностей и оценить погрешность расчета.
  4. Построить векторную диаграмму токов и напряжений.
- Частота питающего напряжения 50 Гц.

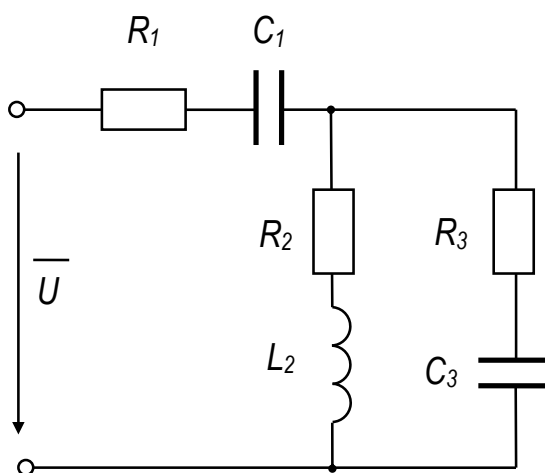


Рис. 5. Расчетная схема

**Исходные данные:**

$U = 127 \text{ В}$ ,  $R_1 = 15 \text{ Ом}$ ,  $C_1 = 60 \text{ мкФ}$ ,  $R_2 = 10 \text{ Ом}$ ,  $L_2 = 80 \text{ мГн}$ ,  $R_3 = 15 \text{ Ом}$ ,  $C_3 = 90 \text{ мкФ}$ .

### Решение.

Построим комплексную схему замещения данной цепи. Для этого все элементы каждой ветви объединим в одно комплексное сопротивление (рис. 6).

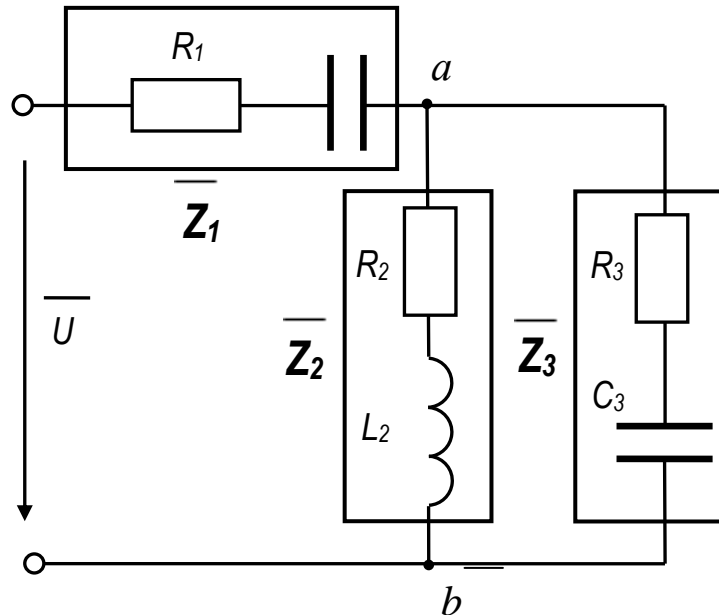


Рис. 6. Схема замещения расчетной цепи

1. Определим комплексные сопротивления каждой ветви.

$$\bar{Z}_1 = R_1 - jX_{C_1} = R_1 - j \frac{1}{2\pi f C_1} = 15 - j \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 60 \cdot 10^{-6}} = 15 - j55,1 = 55,2e^{-j74,22} \text{ Ом},$$

$$\bar{Z}_2 = R_2 + jX_{L_2} = R_2 + j2\pi f L_2 = 10 + j314 \cdot 80 \cdot 10^{-3} = 10 + j25,12 = 27,04e^{j68,3} \text{ Ом},$$

$$\bar{Z}_3 = R_3 - jX_{C_3} = R_3 - j \frac{1}{2\pi f C_3} = 15 - j \frac{1}{314 \cdot 90 \cdot 10^{-6}} = 15 - j35,4 = 38,45e^{-j67,04} \text{ Ом}.$$

После определения комплексных сопротивлений в схеме замещения цепи дальнейший расчет ведем методом эквивалентных преобразований (также как при расчете цепей постоянного тока). Для этого сначала свернем схему и определим ее эквивалентное сопротивление и входной ток, после этого развертывая схему, определяем токи и напряжения на всех элементах цепи.

2. Определим полное сопротивление цепи:

$$\bar{Z} = \bar{Z}_1 + \frac{\bar{Z}_2 \cdot \bar{Z}_3}{\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3} = 15 - j53,1 + \frac{27,04e^{j68,3} \cdot 38,45e^{-j67,04}}{10 + j25,12 + 15 - j35,4} = 50,24 - j37,7 = 62,8e^{-j36,88} \text{ Ом}.$$

3. Приняв  $\bar{U} = U$  найдем токи и напряжения в ветвях:

$$\bar{I}_1 = \frac{U}{\bar{Z}} = \frac{127}{62,8e^{-j36,88}} = 2,02e^{j36,88} \text{ А};$$

$$\bar{U}_{ab} = \bar{I}_1 \cdot \frac{\bar{Z}_2 \cdot \bar{Z}_3}{\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3} = 2,02e^{j36,88} \cdot 38,46e^{j23,6} = 77,7e^{j60,48} \text{ В};$$

$$\bar{U}_1 = \bar{I}_1 \cdot \bar{Z}_1 = 2,02e^{j36,88} \cdot 55,2e^{-j74,22} = 111,5e^{-j37,34} \text{ В};$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{U}_{ab}}{\bar{Z}_2} = \frac{77,7e^{j60,48}}{27,04e^{j68,3}} = 2,87e^{-j7,82} \text{ А};$$

$$\bar{I}_3 = \frac{\bar{U}_{ab}}{\bar{Z}_3} = \frac{77,7e^{j60,48}}{38,45e^{-j67,04}} = 2,02e^{j127,52} \text{ А}.$$

4. Определим активные, реактивные и полные мощности участков цепи и всей цепи целиком.

*Мощность первого участка:*

$$\bar{S}_1 = \bar{U}_1 \cdot \bar{I}_1^* = P_1 + jQ_1 = 111,5e^{-j37,34} \cdot 2,02e^{-j36,88} = 225,23e^{-j74,22} = 61,25 - j216,7 \text{ ВА}.$$

*Мощность второго участка:*

$$\bar{S}_2 = \bar{U}_{ab} \cdot \bar{I}_2^* = P_2 + jQ_2 = 77,7e^{j60,48} \cdot 2,87e^{j7,82} = 222,99e^{j68,3} = 82,44 + j207,19 \text{ ВА}.$$

*Мощность третьего участка:*

$$\bar{S}_3 = \bar{U}_{ab} \cdot \bar{I}_3^* = P_3 + jQ_3 = 77,7e^{j60,48} \cdot 2,02e^{-j127,52} = 156,95e^{-j67,04} = 61,22 - j144,5 \text{ ВА}.$$

*Полная мощность всей цепи:*

$$\bar{S} = \bar{U} \cdot \bar{I}_1^* = P + jQ = 127 \cdot 2,02e^{-j36,88} = 256,54e^{-j36,88} = 205,2 - j153,96 \text{ ВА}.$$

Из этого выражения следует, что активная мощность  $P = 205,2 \text{ ВА}$ .

*Проверим баланс активных мощностей:*

Из расчетов мощностей первого, второго и третьего участков следует, что

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = 61,25 + 82,44 + 61,22 = 204,91 \text{ Вт}.$$

$$\text{Абсолютная погрешность: } \Delta = P - (P_1 + P_2 + P_3) = 205,2 - 204,91 = 0,29 \text{ Вт}.$$

*Относительная погрешность:*

$$\varepsilon = \frac{\Delta}{P} = \frac{0,29}{205,2} \cdot 100\% = 0,14\% .$$

*Проверим баланс реактивных мощностей:*

$$S = S_1 + S_2 + S_3,$$

$$S = -153,96 \text{ (ВА)}.$$

$$S_1 + S_2 + S_3 = -216,7 + 207,19 - 144,5 = -154,01 \text{ ВА}.$$

*Абсолютная погрешность:*

$$\Delta = |S - (S_1 + S_2 + S_3)| = |153,96 - 154,01| = 0,05 \text{ ВА}.$$

*Относительная погрешность:*

$$\varepsilon = \frac{\Delta}{P} = \frac{0,05}{153,96} \cdot 100\% = 0,03\%.$$

5. Построим *векторную диаграмму* на комплексной плоскости.

Для этого определим напряжения на каждом элементе схемы.

$$U_{R_1} = I_1 \cdot R_1 = 2,02e^{j36,88} \cdot 15 = 30,3e^{j36,88} \text{ В};$$

$$U_{C_1} = I_1 \cdot X_{C_1} = 2,02e^{j36,88} \cdot 53,1e^{-j90} = 107,2e^{-j53,12} \text{ В};$$

$$U_{R_2} = I_2 \cdot R_2 = 2,78e^{-j7,82} \cdot 10 = 27,8e^{-j7,82} \text{ В};$$

$$U_{L_2} = I_2 \cdot X_{L_2} = 2,78e^{-j7,82} \cdot 25,12e^{j90} = 69,8e^{j82,18} \text{ В};$$

$$U_{R_3} = I_3 \cdot R_3 = 2,02e^{j127,52} \cdot 15 = 30,3e^{j127,52} \text{ В};$$

$$U_{C_3} = I_3 \cdot X_{C_3} = 2,02e^{j127,52} \cdot 35,4e^{-j90} = 71,5e^{j37,52} \text{ В}.$$

После этого в выбранном масштабе откладываем все токи и напряжения с учетом сдвига фаз.

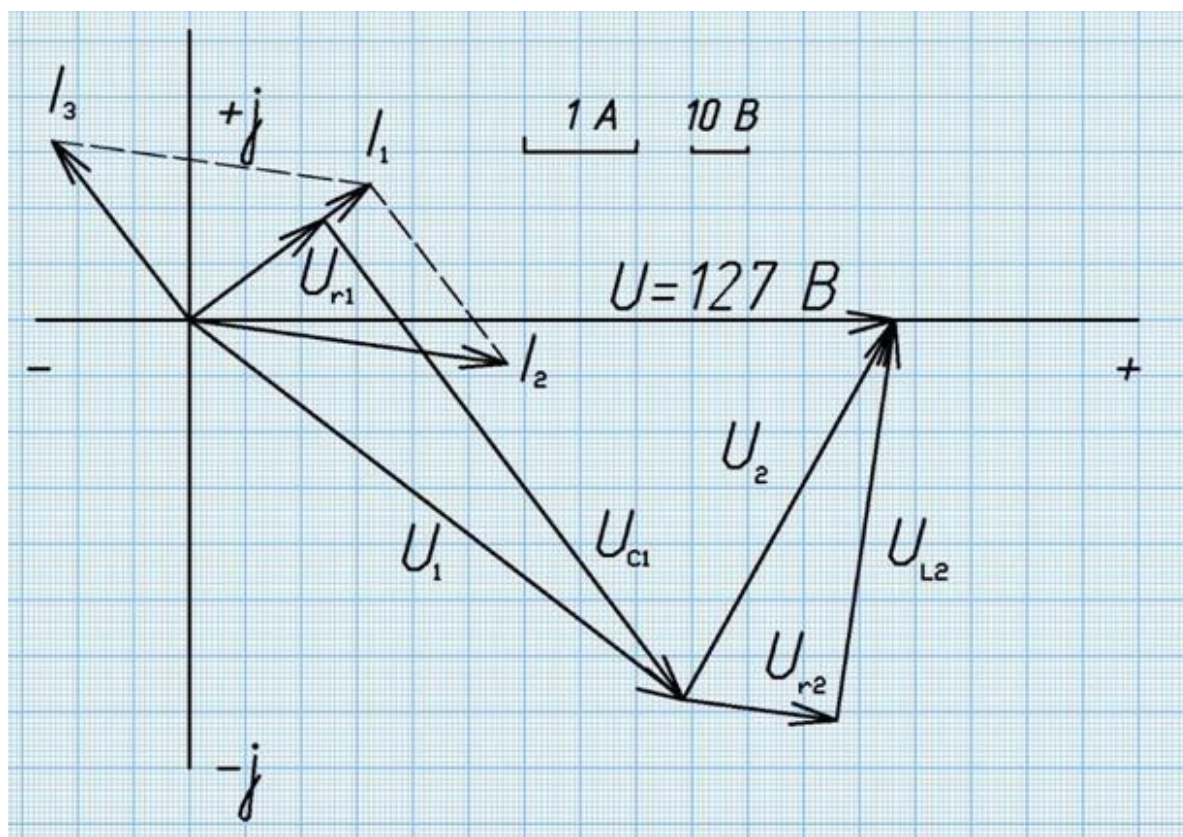


Рис. 7. Векторная диаграмма

Проверкой правильности расчетов и построения векторной диаграммы является выполнение векторных уравнений для напряжений и токов:

$$\vec{I}_1 = \vec{I}_2 + \vec{I}_3 \text{ и } \vec{U} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2.$$



## РАСЧЕТ ТРЕХФАЗНЫХ ЦЕПЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА МЕТОДОМ ВЕКТОРНЫХ ДИАГРАММ

**Цель:** Иметь представление об особенностях соединения источников и потребителей в «звезду» и «треугольник», знать соотношения между линейными и фазными токами и напряжениями, а также уметь рассчитать нагрузку в фазах и строить векторные диаграммы при симметричной и несимметричной нагрузках..

### 1. Трехфазные цепи

#### Основные понятия и определения

*Трехфазная электрическая цепь* – это совокупность трех электрических цепей, в которых действуют три синусоидальные ЭДС одной и той же частоты, сдвинутые друг относительно друга по фазе и создаваемые общим источником электрической энергии.

Отдельную электрическую цепь, входящую в состав трехфазной цепи, называют *фазой*.

*Фазное напряжение*  $U_{\phi}$  – напряжение между началом и концом фазы источника или приемника. Общепринятое обозначение фаз трехфазной цепи приведено в табл. 1.

Таблица 1

*Обозначения фаз в трехфазных электрических цепях*

Фаза	Источник		Приемник	
	Начало	Конец	Начало	Конец
А	А	Х	<i>a</i>	<i>x</i>
В	В	У	<i>b</i>	<i>y</i>
С	С	Z	<i>c</i>	<i>z</i>

*Фазный ток*  $I_{\phi}$  – ток, протекающий в фазе трехфазной цепи.

Провода, соединяющие начала фаз генератора и приемника, называются *линейными*. Точка *O* — нулевая (нейтральная) точка генератора, соответственно точка, *O'* — нулевая (нейтральная) точка приемника потребителя. Провод, соединяющий точки *O*- *O'*, называется *нулевым*, или *нейтральным*.

*Линейный ток*  $I_L$  – ток в линейных проводах.

*Линейное напряжение*  $U_L$  – напряжение между линейными проводами или между начала разных фаз.

Трехфазная система ЭДС (напряжений, токов) – совокупность ЭДС (напряжений, токов) в трехфазной цепи. Трехфазную систему ЭДС (напряжений, токов) называют *симметричной*, если амплитудные (действующие) значения

ЭДС (напряжений, токов) во всех фазах равны и сдвинуты по фазе друг относительно друга на  $120^\circ$  и *несимметричной*, если хотя бы одно из приведенных условий не выполняется.

Трехфазная симметричная система ЭДС для мгновенных и комплексных значений может быть описана системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} e_A &= E_m \sin(\omega t + \psi_A), & \bar{E}_A &= E e^{j\psi_A}, \\ e_B &= E_m \sin\left(\omega t + \psi_B - \frac{2\pi}{3}\right), & \bar{E}_B &= E e^{j\psi_B} e^{-j2\pi/3}, \\ e_C &= E_m \sin\left(\omega t + \psi_C - \frac{4\pi}{3}\right), & \bar{E}_C &= E e^{j\psi_C} e^{-j4\pi/3}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Трехфазную систему ЭДС (напряжений, токов) можно изобразить векторной диаграммой, как показано на рис. 1.

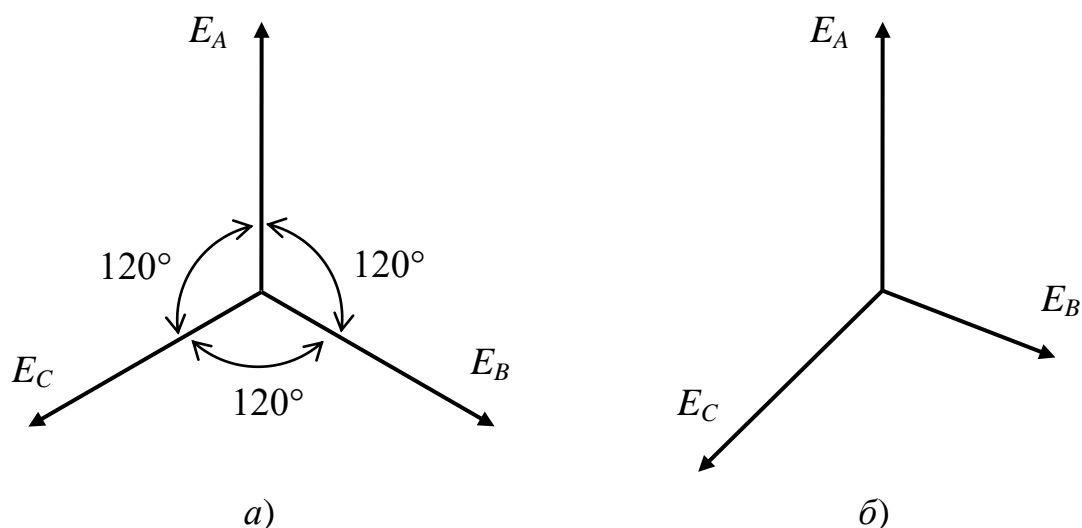


Рис. 1. Векторная диаграмма трехфазной системы ЭДС : а) – симметричная система; б) – несимметричная система ЭДС

*Симметричный приемник* электрической энергии – трехфазный приемник, у которого сопротивления во всех фазах равны. *Симметричный режим работы* трехфазной цепи – режим работы, при котором трехфазные системы напряжений и токов симметричны (равны).

При использовании трехфазных систем питания трехфазных потребителей электроэнергии соединение фаз источника и потребителя выполняется обычно по схеме «звезда» или «треугольник».

## 2. Соединение звездой

Соединение фаз трехфазного источника питания или потребителя энергии, при котором концы фаз источника или приемника соединены в общую нейтральную точку, а начала фаз подключаются к соответствующим линейным проводам, называют *соединением звездой*.

Схема соединения звездой в четырехпроводной цепи приведена на рис. 2, где указаны и общепринятые условные положительные направления токов, напряжений и ЭДС.

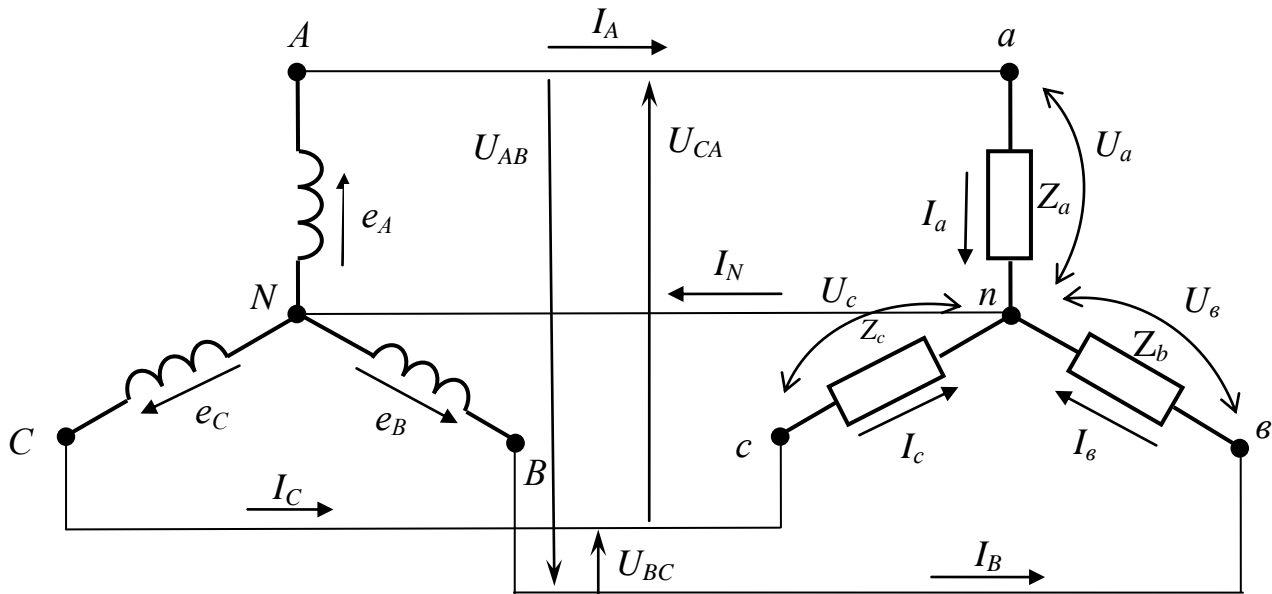


Рис. 2. Соединение трехфазной цепи звездой

На электрической схеме:

$N$  и  $n$  – нейтральные точки источника и приемника соответственно;

$N - n$  – нейтральный провод;

$A - a, B - b, C - c$  – линейные провода;

$I_A, I_B, I_C$  – линейные токи;

$I_a, I_b, I_c$  – фазные токи;

Из рисунка видно, что при соединении звездой фазные и линейные токи равны:  $I_L = I_\Phi$ .

$U_{AB}, U_{BC}, U_{CA}$  – линейные напряжения;

$U_a, U_b, U_c$  – фазные напряжения;

$U_{nN}$  – напряжение между нейтральными точками;

$Z_a, Z_b, Z_c$  – сопротивления нагрузки в фазах.

1. Из рис. 2 видно, что при соединении звездой вектора линейных напряжений равны разности векторов фазных напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \vec{U}_{AB} &= \vec{U}_a - \vec{U}_b \\ \vec{U}_{BC} &= \vec{U}_b - \vec{U}_c \\ \vec{U}_{CA} &= \vec{U}_c - \vec{U}_a \end{aligned} \right\}. \quad (2)$$

2. При наличии нулевого провода фазные напряжения будут одинаковы  $U_a = U_b = U_c = U_\phi$ .
3. Для симметричной трехфазной цепи и для трехфазной четырехпроводной цепи линейное напряжение в  $\sqrt{3}$  раз больше фазного:

$$\begin{aligned} U_L &= \sqrt{3}U_\phi, \text{ т.е.} \\ U_{AB} &= \sqrt{3}U_A; U_{BC} = \sqrt{3}U_b; U_{CA} = \sqrt{3}U_C. \end{aligned} \quad (3)$$

4. При соединении в звезду справедливо равенство линейных и фазных токов:  $I_L = I_\phi$ , т.е.  $I_A = I_a$ ,  $I_B = I_b$ ,  $I_C = I_c$ .
5. В трехфазной четырехпроводной цепи ток в нейтральном проводе определяется на основании первого закона Кирхгофа как векторная сумма фазных токов:

$$\vec{I}_N = \vec{I}_a + \vec{I}_b + \vec{I}_c.$$

6. При несимметричной нагрузке обрыв нулевого провода ( $Z_N = \infty$ ) вызывает значительное изменение токов и фазных напряжений, что в большинстве случаев недостижимо. Поэтому в нулевой провод предохранители не устанавливают.

7. Токи в фазах определяют по закону Ома для цепей переменного тока:

$$I_a = \frac{U_a}{Z_a}; \quad U_b = \frac{U_b}{Z_b}; \quad I_c = \frac{U_c}{Z_c}; \quad \text{где } Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}.$$

### 3. Соединение треугольником

Соединение трёхфазной цепи переменного тока, при котором конец первой фазы соединяется с началом второй, конец второй фазы с началом третьей и конец третьей фазы с началом первой, образуя замкнутый треугольник, к вершинам которого подсоединяются линейные провода, называется *соединением треугольником*.

Схема соединения треугольником приведена на рис. 3, где указаны общепринятые условные положительные направления токов, напряжений и ЭДС.

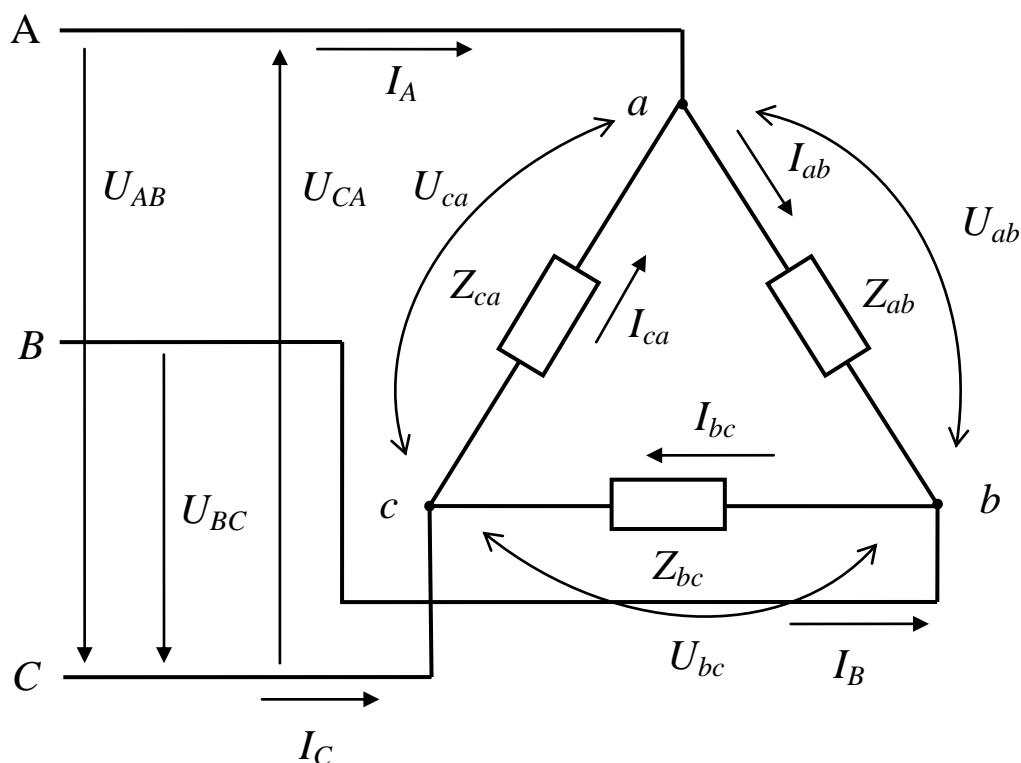


Рис. 3. Схема соединения трехфазной цепи треугольником

На электрической схеме:

$A - a, B - b, C - c$  – линейные провода;

$I_A, I_B, I_C$  – линейные токи;

$I_{ab}, I_{bc}, I_{ca}$  – фазные токи;

$U_{AB}, U_{BC}, U_{CA}$  – линейные напряжения;

$U_a, U_b, U_c$  – фазные напряжения;

$U_{nN}$  – напряжение между нейтральными точками;

$Z_a, Z_b, Z_c$  – сопротивления нагрузки в фазах.

1. Из схемы, представленной на рис. 3, видно, что при соединении «треугольником» *фазные напряжения*  $U_\phi$  (напряжения между началом и концом фаз) равны линейным напряжениям:

$$U_\phi = U_\Delta \quad (1)$$

2. При подключении нагрузки появляются токи в фазах нагрузки  $I_{ab}, I_{bc}, I_{ca}$ , которые называются *фазными*. Они могут быть найдены из следующих соотношений:

$$I_{ab} = \frac{U_{ab}}{Z_{ab}}, I_{bc} = \frac{U_{bc}}{Z_{bc}}, I_{ca} = \frac{U_{ca}}{Z_{ca}} \quad (2)$$

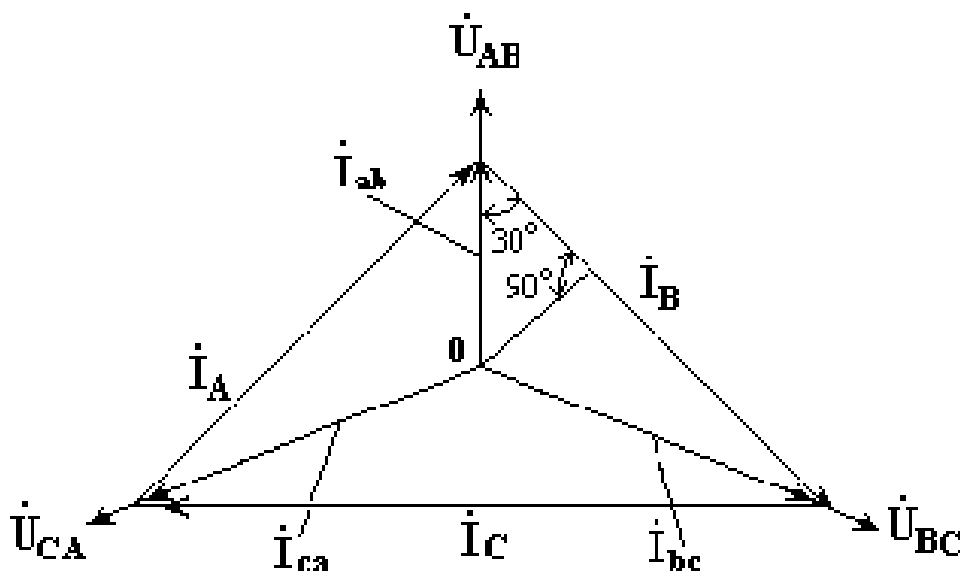
Условные положительные направления линейных и фазных напряжений, линейных и фазных токов показаны на рисунке 3 стрелками.

3. В соответствии с первым законом Кирхгофа, алгебраическая сумма токов в узле равна нулю. Поэтому, записав для узлов **а**, **в**, **с** первый закон Кирхгофа (смотри рис. 3), можно установить связь между линейными и фазными токами:

$$\begin{aligned} I_A &= I_{ab} - I_{ca}, & I_B &= I_{bc} - I_{ab}, & I_C &= I_{ac} - I_{bc}, \\ I_A + I_B + I_C &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Линейный ток равен геометрической разности соответствующих фазных токов.

4. Векторная диаграмма напряжений и токов показана на рис. 4. Из треугольников токов следует, что в симметричной трехфазной системе для действующих значений линейных и фазных токов справедливо соотношение



*Рис. 4. Векторная диаграмма соединения треугольником при симметричной нагрузке*

Из векторной диаграммы видно, что

$$\begin{aligned} I_L &= 2I_\phi \cdot \cos 30^\circ = 2I_\phi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \cdot I_\phi, \\ I_L &= \sqrt{3} I_\phi \text{ при симметричной нагрузке.} \end{aligned}$$

При симметричной нагрузке у всех фазных токов одинаковые действующие значения  $I_\phi$  и одинаковые сдвиги фаз  $\phi$  относительно соответствующих ЭДС или фазных напряжений.

Трехфазные цепи, соединенные звездой, получили большее распространение, чем трехфазные цепи, соединенные треугольником. Это объясняется тем, что, во-первых, в цепи, соединенной звездой, можно получить два напряжения: линейное и фазное. Во-вторых, если фазы обмотки электрической машины, соединенной треугольником, находятся в неодинаковых условиях, в обмотке появляются дополнительные токи, нагружающие ее. Такие токи отсутствуют в фазах электрической машины, соединенных по схеме "звезда". Поэтому на практике избегают соединять обмотки трехфазных электрических машин в треугольник.

#### 4. Мощность трехфазной цепи

Мощность трехфазной цепи складывается из мощностей отдельных фаз. Мощность каждой фазы определяется по аналогии с однофазными цепями переменного тока. Так, например, активная мощность фазы, независимо от способа соединения потребителя в звезду, или треугольник, определяется по следующей формуле

$$P_{\phi} = U_{\phi} I_{\phi} \cos \varphi_{\phi} = I_{\phi}^2 R_{\phi} \text{ Вт.}$$

Активная мощность трехфазной цепи

$$P = P_a + P_b + P_c \text{ Вт.}$$

Реактивная мощность одной фазы

$$Q_{\phi} = U_{\phi} I_{\phi} \sin \varphi_{\phi} = I_{\phi}^2 X_{\phi} = I_{\phi}^2 (X_{L\phi} - X_{C\phi}) \text{ ВАр.}$$

И для всей трехфазной цепи

$$Q = Q_a + Q_b + Q_c \text{ ВАр.}$$

Полная мощность трехфазной цепи

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \text{ ВА.}$$

Если мощности фаз равны между собой, т.е. нагрузка симметричная, то

$$P = 3P_{\phi} = 3U_{\phi} I_{\phi} \cos \varphi_{\phi},$$

$$Q = 3Q_{\phi} = 3U_{\phi} I_{\phi} \sin \varphi_{\phi}.$$

Учитывая соотношения для звезды

$$U_{\phi} = \frac{U_L}{\sqrt{3}} \text{ и } I_{\phi} = I_L$$

и для треугольника

$$U_{\phi} = U_L \text{ и } I_{\phi} = \frac{I_L}{\sqrt{3}},$$

для симметричной трехфазной цепи можно записать

$$P = \sqrt{3}UI \cos \varphi \text{ Вт},$$

$$Q = \sqrt{3}UI \sin \varphi \text{ ВАр},$$

$$S = \sqrt{3}UI \text{ ВА},$$

где  $U$  – линейное напряжение;

$I$  – линейный ток;

$\varphi$  – угол сдвига между напряжением и током фазы.

## 5. Методические указания к решению задач

Для пояснения методики решения задач на трехфазные цепи рассмотрим примеры решения задач.

### *Задача № 1: Расчет соединения звездой.*

В трехфазную четырехпроводную сеть  $f = 50$  Гц включили звездой несимметричную нагрузку: в фазу А – индуктивный элемент с индуктивностью  $L_a = 31,8$  мГн, в фазу В – резистор с сопротивлением  $R_b = 8$  Ом и емкостный элемент с емкостью  $C_b = 530$  мкФ, в фазу С – резистор с сопротивлением  $R_c = 5$  Ом. Линейное напряжение сети  $U_{ном} = 380$  В. Определить фазные токи  $I_a, I_b, I_c$ , активную мощность цепи  $P$ , реактивную мощность  $Q$ , полную мощность  $S$ . Построить векторную диаграмму токов и напряжений.

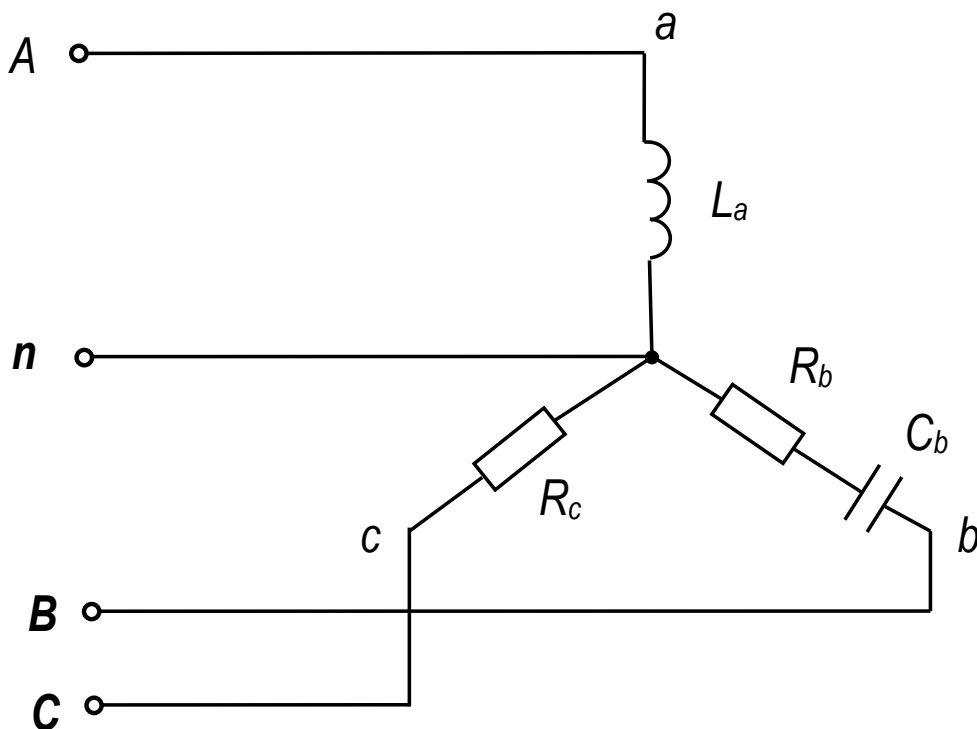


Рис. 5. Расчетная схема электрической цепи



## Решение.

Анализ цепи: на рисунке представлена схема трехфазной цепи по схеме звезда с нулевым проводом. В фазе А стоит идеальная индуктивность, значит, сдвиг фаз будет равен  $90^\circ$ . В фазе В имеется емкость, значит, сдвиг фаз будет отрицательным. В фазе С стоит активное сопротивление  $R$ , значит, сдвиг фаз будет равен  $0^\circ$ .

1. Определяем фазные напряжения.

В данной трехфазной цепи имеется нулевой провод, значит, фазные напряжения будут равны:  $U_a = U_b = U_c = U_\phi$ .

В четырехпроводной цепи при любой нагрузке фаз выполняется соотношение:

$$U_L = \sqrt{3}U_\phi,$$

и т.к.  $U_{ном} = U_L$ , то

$$U_a = U_b = U_c = \frac{U_{ном}}{\sqrt{3}} = \frac{380}{1,73} = 220 \text{ В.}$$

2. Определяем сопротивление индуктивного элемента в фазе А:

$$X_{La} = 2 \pi f L_a = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 31,8 \cdot 10^{-3} = 10 \text{ Ом.}$$

3. Определяем сопротивление емкостного элемента в фазе В:

$$X_{Cb} = \frac{1}{2\pi f C_b} = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 530 \cdot 10^{-6}} = 6 \text{ Ом.}$$

4. Определяем полное сопротивление.

в фазе А:  $Z_a = X_{La} = 10 \text{ Ом;}$

в фазе В:  $Z_b = \sqrt{R_b^2 + (-X_{Cb})^2} = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = 10 \text{ Ом;}$

в фазе С:  $Z_c = R_c = 5 \text{ Ом.}$

5. Находим фазные токи, применяя закон Ома для участка цепи:

$$I_a = \frac{U_a}{Z_a} = \frac{220}{10} = 22 \text{ А;}$$
$$I_b = \frac{U_b}{Z_b} = \frac{220}{10} = 22 \text{ А;}$$
$$I_c = \frac{U_c}{Z_c} = \frac{220}{5} = 44 \text{ А.}$$

6. Определяем активную мощность фазы А:

$$P_a = I_a^2 R_a = 0.$$

7. Определяем активную мощность фазы В:

$$P_b = I_b^2 R_b = 22^2 \cdot 8 = 3872 \text{ Вт.}$$

8. Определяем активную мощность фазы С:

$$P_c = I_c^2 R_c = 44^2 \cdot 5 = 9680 \text{ Вт.}$$

9. Активная мощность трехфазной цепи равна:

$$P = P_a + P_b + P_c = 0 + 3872 + 9680 = 13\,552 \text{ Вт.}$$

10. Определяем реактивную мощность в фазе А:

$$Q_a = I_a^2 X_{La} = 22^2 \cdot 10 = 4840 \text{ ВАр.}$$

11. Определяем реактивную мощность в фазе В:

$$Q_b = I_b^2 (-X_{Cb}) = 22^2 \cdot (-6) = -2904 \text{ ВАр.}$$

12. Реактивная мощность цепи:

$$Q = Q_a + Q_b + Q_c = 4840 - 2904 + 0 = 1936 \text{ ВАр, где}$$

$Q_c = 0$ , так как в фазе С нет реактивных элементов.

13. Полная мощность трехфазной цепи равна:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{13552^2 + 1936^2} = 13686 \text{ ВА} = 13,7 \text{ кВА.}$$

14. Векторная диаграмма строится в масштабе. Построение векторной диаграммы начинаем с построения векторов фазных напряжений, откладывая их относительно друг друга под углом  $120^\circ$ . (рис. 6). Масштаб по напряжению:

$$M_U = \frac{20\text{В}}{1\text{см}}$$

Для построения векторной диаграммы необходимо определить сдвиг фаз между током и напряжением в каждой фазе: в фазе «а» включена катушка индуктивности угол сдвига фаз  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , напряжение опережает ток на  $90^\circ$ , т.е. вектор напряжения вращается против часовой стрелки. Фаза «В» носит активно-емкостный характер, т.е. ток опережает напряжение на угол  $\varphi_b$ , который определяют через синус или тангенс

$$\sin \varphi_b = \frac{-X_{Cb}}{Z_b} = \frac{6}{10} = -0,6; \quad \varphi_b = -\arcsin 0,6. = -36,9^\circ.$$

Фаза «С» носит активный характер: сдвиг фаз между током и напряжением равен нулю,  $\varphi_c = 0$ . Векторы тока и напряжения совпадают по фазе.

Зададим масштаб по току:  $M_i = \frac{10A}{1cm}$ . Откладываем токи с учетом сдвига фаз и определяем ток в нейтральном проводе как векторную сумму фазных токов:

$$I_N = I_A + I_B + I_C.$$

$$I_N = 1,8 \text{ см} \cdot 10 \text{ A/см} = 18 \text{ A}$$

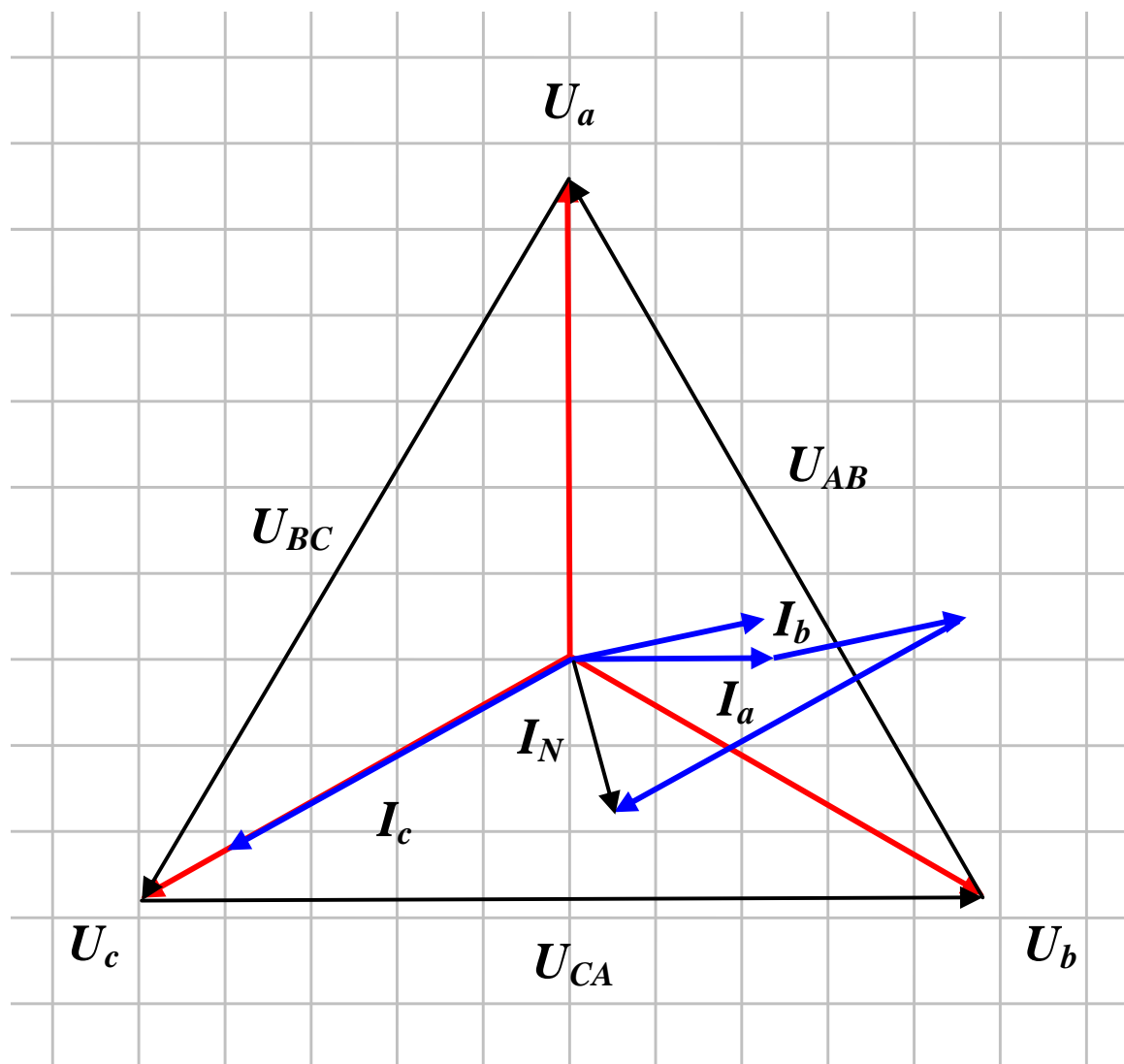


Рис. 6. Векторная диаграмма расчетной цепи

### Задача № 2: Расчет соединения треугольником.

В трехфазную сеть  $f = 50$  Гц включили треугольником несимметричную нагрузку: в фазу А – сопротивление  $R_{ab} = 12$  Ом, индуктивный элемент с индуктивностью  $L_{ab} = 31,8$  мГн и емкость  $C_{ab} = 1200$  мкФ, в фазу В – резистор с сопротивлением  $R_{bc} = 8$  Ом, и емкостный элемент с емкостью  $C_{bc} = 530$  мкФ, в фазу С – резистор с сопротивлением  $R_{ca} = 6$  Ом и индуктивность  $L_{ca} = 16,8$  мГн. Линейное напряжение сети  $U_{ном} = 220$  В. Определить фазные токи  $I_{ab}$ ,  $I_{bc}$ ,  $I_{ca}$ , активную мощность цепи  $P$ , реактивную мощность  $Q$ , полную мощность  $S$ . Построить векторную диаграмму токов и напряжений.

Начертим схему цепи:

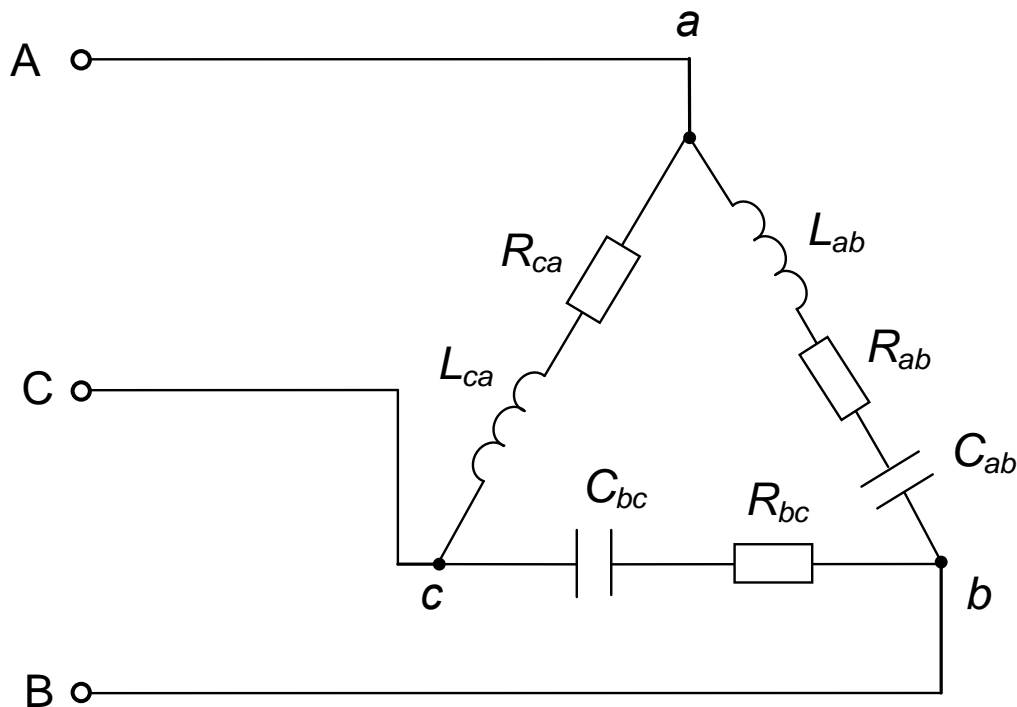


Рис. 7. Расчетная схема цепи

#### Решение.

1. Определяем фазные напряжения. В данной задаче представлена схема соединения треугольником, значит, линейные и фазные напряжения будут равны:  $U_L = U_{ab} = U_{bc} = U_{ca} = U_\phi = 220$  В.
2. Определяем сопротивление реактивных элементов в фазе А:

$$X_{Lab} = 2 \pi f L_{ab} = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 31,8 \cdot 10^{-3} = 10 \text{ Ом.}$$

$$X_{Cab} = \frac{1}{2\pi f C_{ab}} = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 530 \cdot 10^{-6}} = 6 \text{ Ом.}$$

3. Определяем сопротивление емкостного элемента в фазе В:

$$X_{Cbc} = \frac{1}{2\pi f C_{bc}} = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 1200 \cdot 10^{-6}} = \frac{1000}{376,8} = 2,7 \text{ Ом.}$$

4. Определяем сопротивление индуктивного элемента в фазе С:

$$X_{Lca} = 2 \pi f L_{ca} = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 31,8 \cdot 10^{-3} = 10 \text{ Ом.}$$

5. Определяем полное сопротивление в фазе А:

$$Z_{ab} = \sqrt{R_{ab}^2 + (X_{Lab} - X_{Cab})^2} = \sqrt{12^2 + (10 - 6)^2} = 12,7 \text{ Ом.}$$

6. Определяем полное сопротивление в фазе В:

$$Z_{bc} = \sqrt{R_{bc}^2 + (-X_{Cbc})^2} = \sqrt{8^2 + (-2,7)^2} = 8,4 \text{ Ом.}$$

7. Определяем полное сопротивление фазы С:

$$Z_{ca} = \sqrt{R_{ca}^2 + X_{Lca}^2} = \sqrt{6^2 + 10^2} = 11,7 \text{ Ом.}$$

8. Определяем сдвиг фаз в фазе А:

$$\varphi_{ab} = \arctg\left(\frac{X_{Lab} - X_{Cab}}{R_{ab}}\right) = \arctg\left(\frac{10 - 6}{12}\right) = \arctg 0,3333 = 18,4^\circ$$

9. Определяем сдвиг фаз в фазе В:

$$\varphi_{bc} = \arctg\left(\frac{X_{Lbc} - X_{Cbc}}{R_{bc}}\right) = \arctg\left(\frac{0 - 2,7}{8}\right) = -\arctg 0,3375 = -18,7^\circ$$

10. Определяем сдвиг фаз в фазе С:

$$\varphi_{ca} = \arctg\left(\frac{X_{Lca} - X_{Cca}}{R_{ca}}\right) = \arctg\left(\frac{10 - 0}{6}\right) = \arctg 1,6666 = 59^\circ$$

11. Находим фазные токи, применяя закон Ома для участка цепи:

$$I_{ab} = \frac{U_{ab}}{Z_{ab}} = \frac{220}{12,7} = 17,3 \text{ А;}$$

$$I_{bc} = \frac{U_{bc}}{Z_{bc}} = \frac{220}{8,4} = 26,2 \text{ А;}$$

$$I_{ca} = \frac{U_{ca}}{Z_{ca}} = \frac{220}{11,7} = 18,8 \text{ А.}$$

12. Определяем активную мощность фазы А:

$$P_{ab} = I_{ab}^2 R_{ab} = 17,3^2 \cdot 12 = 3591,5 \text{ Вт.}$$

13. Определяем активную мощность фазы В:

$$P_{bc} = I_{bc}^2 R_{bc} = 26,2^2 \cdot 8 = 5491,5 \text{ Вт.}$$

14. Определяем активную мощность фазы С:

$$P_{ca} = I_{ca}^2 R_{ca} = 18,8^2 \cdot 6 = 2120,6 \text{ Вт.}$$

15. Активная мощность трехфазной цепи равна:

$$P = P_a + P_b + P_c = 3591,5 + 5491,5 + 2120,6 = 11203,6 \text{ Вт} = 11,2 \text{ кВт.}$$

16. Определяем реактивную мощность в фазе А:

$$Q_{ab} = I_{ab}^2 X_{ab} = I_{ab}^2 (X_{Lab} - X_{Cab}) = 17,3^2 \cdot (10 - 6) = 1197,2 \text{ Вар.}$$

17. Определяем реактивную мощность в фазе В:

$$Q_{bc} = I_{bc}^2 (-X_{Cbc}) = 26,2^2 \cdot (-2,7) = -1853,4 \text{ Вар.}$$

18. Определяем реактивную мощность в фазе С:

$$Q_{ca} = I_{ca}^2 \cdot X_{Lca} = 18,8^2 \cdot 10 = 3534,4 \text{ Вар.}$$

19. Реактивная мощность цепи:

$$Q = Q_{ab} + Q_{bc} + Q_{ca} = 1197,2 - 1853,4 + 3534,4 = 2878,2 \text{ Вар.}$$

13. Полная мощность трехфазной цепи равна:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{11203,6^2 + (2878,2)^2} = 11569,4 \text{ ВА} = 11,6 \text{ кВА.}$$

13. Векторная диаграмма строится в масштабе (рис. 8):

а) Построение векторной диаграммы начинаем с построения векторов фазных напряжений  $U_{ab}$ ,  $U_{bc}$ ,  $U_{ca}$  откладывая их относительно друг друга под углом  $120^\circ$ . Задаем масштаб по напряжению  $M_U = \frac{50\text{В}}{1\text{см}}$ . Строим вектора фазных напряжений.

б) Для построения векторов тока необходимо знать сдвиг фаз между током и напряжением в каждой фазе (смотри п. 8-10). Зададим масштаб по току:

$$M_i = \frac{5\text{А}}{1\text{см}}. \text{ Строим фазные токи.}$$

с) Учитывая связь между фазными и линейными токами:

$I_A = I_{ab} - I_{ca}$ ,  $I_B = I_{bc} - I_{ab}$ ,  $I_C = I_{ac} - I_{bc}$ , строим вектора линейных токов.

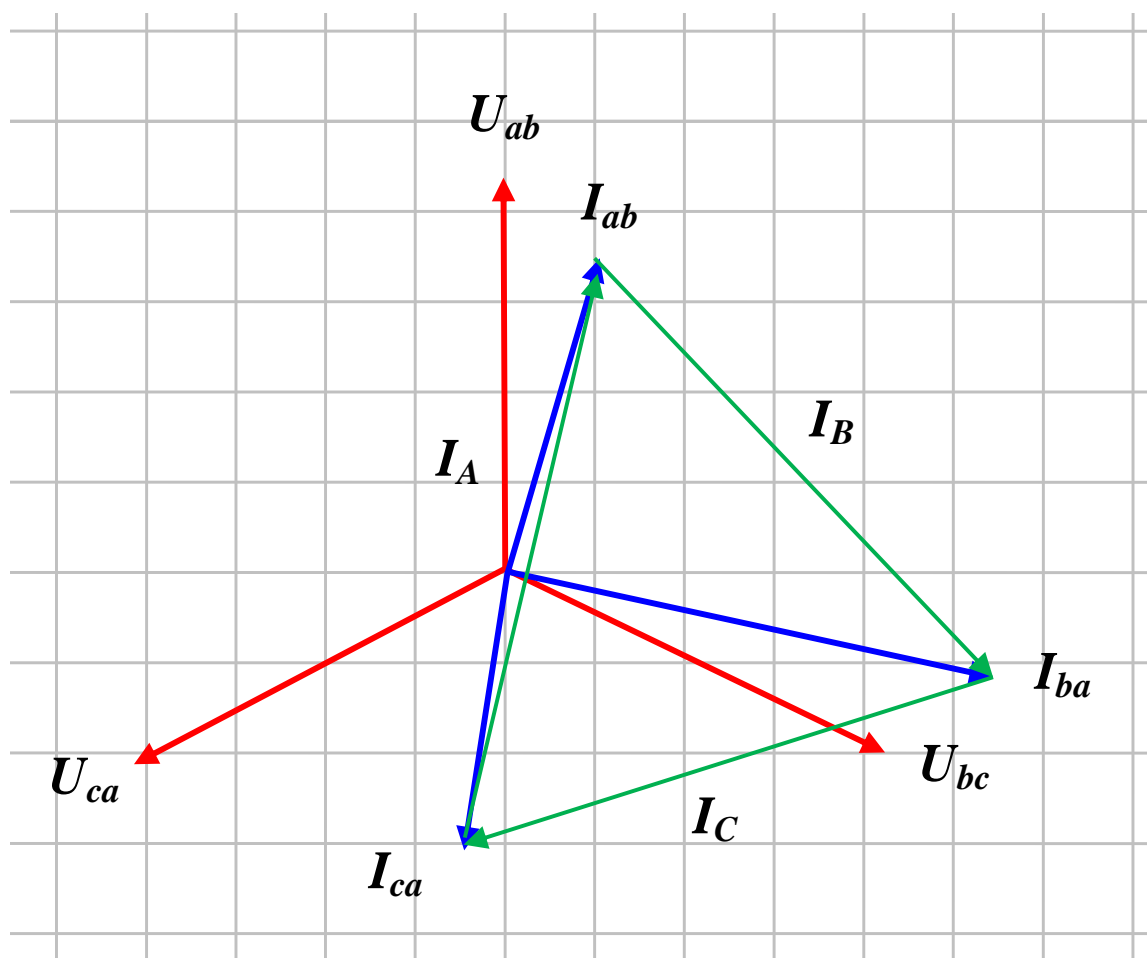


Рис. 8. Векторная диаграмма соединения треугольником

14. По векторной диаграмме, пользуясь масштабом, определяем линейные токи:

$$I_A = 6,8 \text{ см} \cdot 5 \text{ А/см} = 34 \text{ А},$$

$$I_B = 6,2 \text{ см} \cdot 5 \text{ А/см} = 31 \text{ А},$$

$$I_C = 6,3 \cdot 5 \text{ А/см} = 31,5 \text{ А}.$$

## **ПЕРЕЧЕНЬ РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**

### **Основная**

1. Касаткин А.С., Немцов М.В. Электротехника. – М.: Академия, 2005.
2. Волынский Б.А., Зейн Б.Н., Шатерников В.Е. Электротехника. М.: Энергоиздат, 1987.
3. Электротехника и электроника. Учебник для вузов. – В 3-х книгах / В.И. Киселев, А.И. Копылов, Э.В. Кузнецов и др. // Под ред. проф. В.Г. Герасимова. – М.: Энергоатомиздат, 1997.
4. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. – М.: Высшая школа, 1973.
5. Сборник задач по электротехнике и основам электроники / Под ред. В.Г. Герасимова – М.: Высшая школа. 1987.
6. Опадчий Ю.Ф., Глудкин О.П., Гуров А.И. Аналоговая и цифровая электроника. Учебник для вузов. – М.: Радио и связь, 1998.

### **Дополнительная**

7. Клауснитцер Г. Введение в электротехнику. – М.: Энергоиздат, 1985.
8. Траубе Е.С., Миргородский В.Г. Электротехника и основы электроники. – М.: Высшая школа, 1985.
9. Кузовкин В.А. Теоретическая электротехника. – М.: Логос, 2002.
10. Сборник задач по теории электрических цепей / Под ред. П.Н. Матханова и Л.В. Данилова. – М.: Высшая школа, 1980.
11. Миклашевский С.П. Промышленная электроника. – М.: Высшая школа, 1973.