

КАФЕДРА
В М М Ф

Л.И.ТЕРЕХИНА
И.И.ФИКС

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Сборник контрольных работ

для студентов 1-го и 2-го курсов ФТФ ТПУ
химических специальностей ФТФ ТПУ

Томск 2009

Линейная алгебра

1. Решить матричное уравнение

$$X \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Решить систему методом Крамера.

$$\begin{cases} x + 3y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + 5z = 2 \\ 3x + 5y + 8z = 3 \end{cases}$$

3. Решить системы методом Гаусса.

$$a) \begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x_1 + x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 0 \\ -2x_2 + x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 9x_4 - 5x_5 = 0 \end{cases}$$

Векторная алгебра

1. При каком λ векторы $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + \lambda\vec{k}$ и $\vec{b} = \lambda\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ перпендикулярны?

2. Найти внутренний угол B треугольника с вершинами

$$A(1; 7; 2), \quad B(5; -3; 3), \quad C(12; -1; -5).$$

3. Найти \vec{x} , если

$$\vec{x} \perp OZ, \quad \vec{x} \perp \vec{a} = \{8; -15; 3\} \quad |\vec{x}| = 5, \quad (\vec{x}, \vec{j}) < 0.$$

4. Вычислить $2\vec{i} [\vec{j}, \vec{k}] + 3\vec{j} [\vec{i}, \vec{k}] + 4\vec{k} [\vec{i}, \vec{j}]$.

5. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{p} = \vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{q} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$, если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 6$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$.

6. При каких значениях λ и μ точки

$$A(-1; 2; 1), \quad B(\lambda; 4; 2), \quad C(3; -2; \mu) \quad \text{лежат на одной прямой?}$$

7. Найти высоту AD треугольника с вершинами

$$A(2; -3; 1), \quad B(-3; 2; 5), \quad C(4; -1; 2).$$

8. Найти $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b})$, если $\vec{a} = \{3; -2; 1\}$, $\vec{b} = \{-2; 5; -1\}$.

Геометрия на плоскости

1. Найдите угол между прямыми

$$l_1: 2x - y + 4 = 0,$$

$$l_2: \frac{x}{4} = \frac{y-3}{-2}.$$

2. Вычислите расстояние от начала координат до прямой

$$\begin{cases} x = -3t \\ y = 4t + 5 \end{cases}.$$

3. Укажите угловой коэффициент любой прямой, составляющей с прямой $x = 3$ угол 45° .

4. Вершины треугольника расположены в точках

$$A(5; -1), \quad B(-2; 3), \quad C(0; -1).$$

Найдите абсциссу точки пересечения его медиан.

5. Какая из указанных точек $A(3; 1)$, $B(-2; 3)$, $C(-1; 7)$ принадлежит прямой

$$4x + y - 3 = 0 ?$$

6. Постройте прямую

$$\frac{x-2}{-2} = \frac{y}{3}$$

и вычислите площадь треугольника, который прямая отсекает от координатного угла.

7. Запишите уравнение прямой, которая проходит через точку $(4; -2)$ и составляет с осью OX угол 30° .

8. Сторона квадрата лежит на прямой $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$,

одна из его вершин расположена в точке $(5; -3)$. Найдите его площадь.

9. Запишите уравнение окружности, центр которой расположен в точке $(-3; 6)$, а радиус равен 5.

10. Найдите длину большой оси эллипса $2x^2 + 3y^2 = 6$.

11. Найдите расстояние от начала координат до вершины параболы $x + 2y^2 - 4y + 8 = 0$.

12. Найдите длину мнимой оси гиперболы $x^2 - 4y^2 = 1$.

13. Постройте линию

$$y = 2 - \sqrt{9 - x^2}.$$

14. Постройте линию

$$x = 2 + \sqrt{2y + 3}.$$

15. Постройте линию, заданную уравнением в полярных координатах $\rho = -\frac{\varphi}{\pi}$.

16. Постройте линию, заданную параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 4t^2 - 1. \end{cases}$$

Геометрия в пространстве

1. Запишите уравнение плоскости, проходящей через начало координат нормаль которой составляет с осями координат OX и OZ углы соответственно $\alpha = 45^\circ$, $\gamma = 45^\circ$.

2. Найдите координаты точки пересечения прямой $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{-4}$ с координатной плоскостью XOY.

3. Запишите параметрические уравнения прямой, проходящей через точку A(-3;2;4) параллельно оси OY.

4. Найдите расстояние от оси OX до плоскости $3y - z + 2 = 0$.

5. Запишите направляющий вектор прямой, заданной общими уравнениями

$$\begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ -y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$$

6. Найдите проекцию точки A(-1; 4; 3) на

прямую $\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = -3 \\ z = 5t - 3 \end{cases}$

7. Определите радиус окружности, являющейся линией пересечения поверхности

$$x^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} = 1 \quad \text{и плоскости} \\ z = -3.$$

8. Определите объем тела, ограниченного поверхностью

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4y = 0$$

9. Определите объем тела, ограниченного поверхностями

$$z^2 + y^2 = 2x^2, \quad x = 3$$

10. Найдите длину большой оси эллипсоида

$$3x^2 + 5y^2 + z^2 - 6x = 0.$$

11. Найдите расстояние от начала координат до вершины параболоида

$$3x + 4y^2 - 8y + 2z^2 = 0.$$

12. Постройте поверхность $z = \sqrt{1-y}$

Введение в анализ

1. Найти пределы

1	$\lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{9x^2 - 1}{\arcsin(1 - 3x)}$	5	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3 - \sqrt{x^2 + 5}}{\sqrt{3 + x} - 1}$
2	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 5x^2 + 2x + 2}$	6	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{3n + 2}{3n + 5} \right]^{3 - n}$
3	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{\sin 3x}$	7	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[n(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1}) \right]$
4	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 2)! + (n + 1)!}{4(n + 2)! + (n + 1)!}$	8	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 - 5x + 1}{(4x - 1)(2x + 1)}$

2. Найти нули следующих функций и определить порядок каждого.

1.	$f(x) = \ln(1 - \sqrt[5]{x^2} \cdot \operatorname{tg} \sqrt{x})$	2.	$f(x) = \sin^2 \left(3x + \frac{\pi}{2} \right)$
3.	$f(x) = 1 - \cos \frac{3x}{7}$	4.	$f(x) = \frac{(x^3 - 4x)^2}{3x + 5}$

3. Исследовать на непрерывность и построить эскиз графика функции

$$1) y = \frac{x^3}{2(x + 1)^2} \qquad 2) y = \frac{1}{2 + e^{\frac{3}{x+2}}}$$

Производные

1. Найти производные $y'(x)$ данных функций

$$1). y = \frac{1}{(\sqrt{x} + 1)^2} - \frac{\sqrt[3]{x}}{2x + 3} \quad 2). y = \frac{(2 + x + \sin^5 2x)^4}{\sqrt[3]{1 - x^2}}$$

$$3). y = \ln \operatorname{tg} \frac{x + 3}{\sqrt{5}} + 7^{\cos^3 2x} \quad 4). y = \ln \sqrt[6]{\frac{\cos^7(2x - 1) \cdot e^{-x^3}}{\ln x \cdot (\sqrt{x} + 3)^5}}$$

$$5). y = \left(2x + \frac{2}{x}\right)^{\operatorname{ctg}^3 x} \quad 6). \left(\frac{x}{y}\right)^2 - x \sqrt{y} = \arcsin 3x$$

2. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ для функций

$$1) y = e^{-x} \cdot (\cos 2x - 3 \sin 2x) \quad 2) \begin{cases} x = \frac{1 + t}{5t^2} \\ y = \frac{3}{5t^2} + \frac{2}{t} \end{cases}$$

3. Вычислить значение производной функции в указанной точке

$$1). y = \ln \sqrt{\frac{1 + \cos x}{\sin x}}, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$2). \begin{cases} x = 2 \ln \operatorname{ctg} t + 1 \\ y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t \end{cases} \quad t_0 = \frac{\pi}{4}$$

4. Найти dy и d^2y функции $y = \cos^2(x - 1)$

Приложения производной

1. Построить график функции. Если функция имеет экстремальные точки, а также точки перегиба, найти их координаты. При наличии асимптот записать их уравнения.

$$1) \quad y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$$

$$2) \quad y = x^{2/3} - (x^2 - 1)^{1/3}$$

$$3) \quad y = e^{2x} - x^2$$

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = x^2 + \frac{16}{x} - 16 \quad \text{в интервале} \quad [1; 4]$$

3. Найти пределы функций

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{8 \cos^3 x - 1}{x/2 - \pi/6}$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x e^{x/2}}{x + e^x}$$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$$

4. В круг радиуса R вписан равнобедренный треугольник. При каком соотношении сторон треугольник будет иметь наибольшую площадь.

Функции нескольких переменных

1. Найти и изобразить область определения функции:

$$z = \ln(y^2 - x - 2y + 6)$$

2. Найти частные производные z'_x и z'_y

1). $z = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right)$ 2). $z = \left(3x - \frac{1}{\ln y}\right)^5 + x^3 \cdot \operatorname{ctg} 2\sqrt{y}$

3. Найти частные производные сложных функций

1). $z = \ln \operatorname{tg} \frac{u}{v}$, $u = \operatorname{arctg}(x^2 y^3)$, $v = \sqrt[3]{2x - 4y}$

2). $z = e^{x \sin y}$, $x = \sqrt{t^2 + 1}$, $y = \frac{t}{t^2 + 1}$

3). $z = 4^{x+2y} + \frac{x+y}{2\sqrt{y}}$, $y = \operatorname{arctg} \sqrt[3]{x}$

4. Найти частные производные z'_x и z'_y неявной функции

$$\sin^2 z + 3xy - x^2 = 2y\sqrt{z-1}$$

5. Найти dz и d^2z для функции $z = \sin \sqrt{\frac{y}{x^3}}$

6. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

$$(z^2 - x^2) \cdot xyz - y^5 = 5 \quad \text{в точке } M_o(1; 1; z_o)$$

7. Исследовать на экстремум функцию $z = 2xy - 2x^2 - 4y^2$

Неопределенный интеграл

Найти неопределённые интегралы

1.
$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^{10} + 10}}$$

2.
$$\int \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^2 + 1} dx$$

3.
$$\int (5x - 2) e^{-7x} dx$$

4.
$$\int \operatorname{arctg} \sqrt{4x - 1} dx$$

5.
$$\int \frac{(3 - 2x) dx}{\sqrt{1 - 3 - x^2}}$$

6.
$$\int \frac{dx}{x^3 + 8x}$$

7.
$$\int \frac{\sqrt{x}}{1 - \sqrt[4]{x}} dx$$

8.
$$\int \frac{\sqrt{(4 - x^2)^3}}{x^4} dx$$

9.
$$\int \frac{dx}{2 - 4 \sin x + 5 \cos x}$$

10.
$$\int \operatorname{ctg}^3 5x dx$$

Определенный интеграл

1. Вычислить определённые интегралы.

1. $\int_0^1 \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} dx$

2. $\int_0^1 x \cdot \operatorname{arctg} x dx$

3. $\int_0^\pi \sin^4 x dx$

4. $\int_2^{2\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x^2} dx$

2. Оценить значение интеграла $\int_{-4}^0 \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 dx$

3. Найти среднее значение функции

$$y = \frac{x^2 + 3}{x - 2} \quad \text{в интервале } [3; 4]$$

4. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

1. $\int_{-\infty}^1 \frac{dx}{x^2 + 3x + 10}$

2. $\int_{-1}^0 \frac{x^2 dx}{\sqrt[5]{(1+x^3)^2}}$

5. Найти площадь фигуры Φ , ограниченной линиями:

$$: x = t^2, \quad y = 2t^2 - 1, \quad x = 0, \quad y = 1.$$

6. Вычислить длину дуги кривой: $L : \rho = a \sin(2\varphi)$.

Числовые ряды

1. Найти общий член ряда и проверить выполнение необходимого признака сходимости

$$\frac{2}{1} + \frac{5}{8} + \frac{10}{27} + \frac{17}{64} + \frac{26}{125} + \dots$$

2. Исследовать на сходимость ряды

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{3\pi}{n^3+1}}{\sqrt[4]{n}}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{4^{3n} \sqrt{2n+5}}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^{2n} \left(\frac{3+n}{\sqrt{n^2+5}} \right)$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{\arctg^2 n}}{n^2+1}$

3. Исследовать на ряды на абсолютную и условную сходимость

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^{-3n} \cdot e^{-n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+5}{\sqrt{3n \cdot 7^n}}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arctg^{5n} \left(\frac{3}{n+1} \right)$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{-\sqrt[3]{n+1}}}{\sqrt[3]{(n+1)^2}}$

Функциональные ряды

1. Найти интервалы сходимости функциональных рядов

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n} x^n}{\sqrt{n^3 + 1}} \quad 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n (x + 1)^n}{n!}$$
$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4} \sin^n(3x) \quad 4. \sum_{n=1}^{\infty} (1 - 4x^2)^n$$

2. Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x - x_0)$ функции

$$1. y = \cos^2(\pi x / 6), \quad x_0 = 3.$$
$$2. y = \ln(2 + x), \quad x_0 = 0$$
$$3. y = \frac{x - 1}{x + 1}, \quad x_0 = 0.$$

3. Вычислить интегралы с точностью не менее 0,01

$$1. \int_0^{0,1} \sin 8x^2 dx \quad 2. \int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{27 + x^3}} dx$$

4. Вычислить приближенно $\sqrt[3]{e}$, взяв три члена разложения в ряд Маклорена функции e^x , и оценить погрешность.

Дифференциальные уравнения 1-го порядка

Найти решения дифференциальных уравнений

1. $(y + y \ln x)dx + (y - xy)dy = 0$

2. $yy' + x = 1$

3. $y^2 dx + (x + e^{1/y}) dy = 0, \quad y(1) = 2$

4. $xy' - y = y \ln \frac{y}{x}$

5. $3x^2 e^y + (x^3 e^y - 3) y' = 0$

6. $y' - \frac{y}{x} - x = 0, \quad y(1) = 0$

7. $y' + xy = (1 + x)e^{-x}, \quad y(0) = 1$

8. $x^2 + y^2 + 2xyy' = 0$

Задача.

Моторная лодка двигаясь со скоростью 10 км/час. выключает мотор. Через 20 сек. скорость лодки уменьшилась до 6 км/час. Считая, что сила сопротивления воды движению лодки пропорциональна ее скорости, найти скорость лодки через 2 мин. после остановки мотора.

Дифф. уравнения высших порядков

Найти решения дифференциальных уравнений

1. $y \cdot y'' - (y')^2 = y^2 \cdot \ln x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$

2. $x(y'' + 1) + y' = 0$

3. $y'' + 2y' + 2y = \frac{e^{-x}}{\cos x}$

4. $y'' + 2y' + y = (18x + 8) \cdot e^{-x}$

5. $y'' + y' - 2y = 9 \cos x - 7 \sin x$

6. $y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4$

Решить систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 6x - 2y & x(0) = -2 \\ \dot{y} = 8x + 6y & y(0) = 0. \end{cases}$$

Комплексные числа и функции

1. Даны числа $z_1 = -5 + 3i$, $z_2 = 6 + i$. Вычислить:

1) $\frac{\bar{z}_1 - z_2}{z_2}$, 2) $\frac{z_1 \cdot z_2}{z_1 + z_2}$, 3) $\sqrt[3]{z_1 z_2^2}$, 4) $\ln z_1$, 5) $\cos z_2$.

Результаты вычислений представить в показательной и алгебраической формах.

2. Построить на комплексной плоскости линию, заданную уравнением $z \bar{z} = \sin(2 \arg z)$

3. Решить уравнение $z^2 + 4iz + 2 = 0$.

4. Найти коэффициент растяжения и угол поворота комплексной плоскости $z = x + iy$ в точке $z_0 = i$ при отображении функцией $f(z) = 3z^2 + (2 - i)z + 4 - 3i$.

5. Доказать, что функция $v(x; y) = 2y - e^{-y} \sin x$ может служить мнимой частью аналитической функции $f(z) = u + iv$ и найти эту функцию с точностью до постоянного слагаемого.

6. Вычислить интеграл $\int_{(L)} \frac{\ln z}{z} dz$,
где $L : \{ |z| = 2, 0 < \arg z < \pi/2 \}$

7. Вычислить, используя интегральную формулу Коши

$$\oint_{(L)} \frac{e^z - 1}{z(z - 2i)} dz, \quad \text{где } L : \begin{cases} 1) |z| = 1, 5; \\ 2) |z - 2i| = 1; \\ 3) |z| = 3. \end{cases}$$

Теория вероятностей

1. В колоде 36 карт. Какова вероятность, что после раздачи у игрока окажется три туза ?
 2. Имеется три спички, среди которых одна сломанная. Три человека по очереди тянут одну спичку. Найти вероятности вытащить сломанную спичку для каждого.
 3. Для сигнализации об аварии установлены три независимо работающих устройства. Вероятность того, что при аварии сработает первое устройство, равна 0.9, второе - 0.95, третье - 0.85. Найти вероятность того, что при аварии сработает
 - а) только одно устройство;
 - б) хотя бы одно устройство.
 4. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0.8. Сколько нужно произвести испытаний, чтобы с вероятностью 0.9 можно было ожидать, что событие появится не менее 5 раз ?
 5. Случайная величина X по "закону прямоугольного треугольника" в интервале $(0; a)$ с вершинами в точках $(0; 0)$, $(a; 0)$, $(2/a; 0)$. Требуется :
 - 1) найти функции распределения $f(x)$ и $F(x)$,
 - 2) построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$,
 - 3) вычислить математическое ожидание $M(X)$,
 - 4) вычислить дисперсию $D(X)$,
 - 5) найти среднеквадратическое отклонение $\sigma(X)$,
 - 6) вычислить вероятность попадания величины X в интервал $[a/2; a]$.
-