Примеры решений контрольных работ

Л.И. Терехина, И.И. Фикс

1. **Контрольная работа № 2** Векторная алгебра

• **1**. Даны три вектора $\vec{a} = \{0; -1; 3\}$, $\vec{b} = \{3; -2; 1\}$, $\vec{c} = \{4; 0; -4\}$.
Требуется найти:

a) вектор $\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$, его модуль и направляющие косинусы, записать орт вектора $\vec{d}^{\,0}$

b) скалярное произведение векторов $(\vec{a} + \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{a})$

c) векторное произведение векторов $[(\vec{a} + \vec{c}) \times (\vec{b} - \vec{a})]$

d) смешанное произведение векторов $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$

Решение.

a) По правилам выполнения арифметических операций над векторами

$$\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c} = 2\{0; -1; 3\} - \{3; -2; 1\} + 3\{4; 0; -4\} = \{9; 0; -7\}$$

Координаты орта вектора равны отношению координат данного вектора к его модулю.

$$|\vec{d}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-7)^2} = \sqrt{130} \implies \vec{d}^{\,0} = \left\{ \frac{9}{\sqrt{130}}; 0; -\frac{7}{\sqrt{130}} \right\}$$

b) Сначала выполним операцию сложения векторов, а затем скалярное умножение (сумма произведений одноименных координат)

$\vec{a}+\vec{c}=\{0;-1;3\}+\{4;0;-4\}=\{4;-1;-1\}$

$\vec{b}-\vec{a}=\{3;-2;1\}-\{0;-1;3\}=\{3;-1;-2\}$

$(\vec{a}+\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=\{4;-1;-1\}\cdot\{3;-1;-2\}=$

$4\cdot 3+(-1)\cdot(-1)+(-1)\cdot(-2)=12+1+2=15.$

c) векторное произведение векторов находится по правилу

$$[(\vec{a}+\vec{c})\times(\vec{b}-\vec{a})]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -1 & -1\\ 3 & -1 & -2\end{vmatrix}=1\cdot\vec{i}-5\cdot\vec{j}-1\cdot\vec{k}=\{1;-5;-1\}$$

(определитель раскладываем по элементам первой строки).

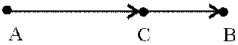
d) Произведение векторов, обозначаемое символом $([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})$, есть векторно–скалярное, т.е. смешанное произведение 3-х векторов. Оно вычисляется по правилу

$$([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})=\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}0 & -1 & 3\\ 3 & -2 & 1\\ 4 & 0 & -4\end{vmatrix}=0\cdot 8-1\cdot 16+3\cdot 8=8.$$

• **2**. Определить координаты точки C на отрезке AB, если $A(-2;2;4)$, $B(5;-3;-1)$ и $|AC|:|CB| = 4:3$.

Р е ш е н и е

Обозначим координаты точки $C(x_c;y_c;z_c)$ и составим два вектора



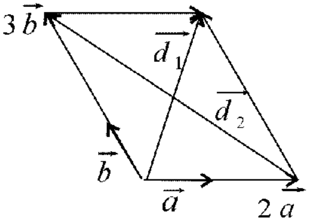
$\overrightarrow{AB} = \{7;-5;-5\}$, $\overrightarrow{CB} = \{5-x_c;\ -3-y_c;\ -1-z_c\}$.

Так как все точки лежат на одной прямой, то составленные векторы являются коллинеарными и, согласно известному отношению, в котором точка делит отрезок

$$\overrightarrow{CB} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AB} \Longrightarrow \{5-x_c;-3-y_c;-1-z_c\} = \frac{3}{7}\{7;-5;-5\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 5-x_c = 3 \\ -3-y_c = \dfrac{-15}{7} \\ -1-z_c = \dfrac{-15}{7} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_c = 2 \\ y_c = \dfrac{6}{7} \\ z_c = \dfrac{-8}{7} \end{cases} \Longrightarrow C\left(2;\frac{6}{7};\frac{-8}{7}\right).$$

• **3**. Найти модули векторов $(2\vec{a}+3\vec{b})$ и $(2\vec{a}-3\vec{b})$, если $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=3$, $(\vec{a},\hat{}\ \vec{b})=120^\circ$



Р е ш е н и е. Так как координаты векторов не даны, для нахождения длин воспользуемся общей формулой длины вектора $|\vec{a}=\sqrt{\vec{a}^2}$

Так как $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2=25$, $\vec{b}^2=|\vec{b}|^2=9$,

$(\vec{a}\vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 120^\circ=5\cdot 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{15}{2}$, то

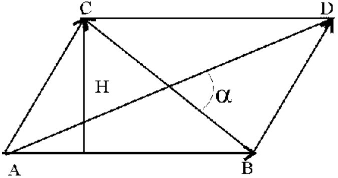
$$|2\vec{a}+3\vec{b}|=\sqrt{(2\vec{a}+3\vec{b})^2}=\sqrt{4\vec{a}^2+12(\vec{a}\vec{b})+9\vec{b}^2}=\sqrt{100-90+81}=\sqrt{91}$$

$$|2\vec{a}-3\vec{b}|=\sqrt{(2\vec{a}-3\vec{b})^2}=\sqrt{4\vec{a}^2-12(\vec{a}\vec{b})+9\vec{b}^2}=\sqrt{100+90+81}=\sqrt{271}$$

Замечание. Если на векторах $2\vec{a}$ и $3\vec{b}$ построить параллелограмм, то векторы $\vec{d}_1=2\vec{a}+3\vec{b}$ и $\vec{d}_2=2\vec{a}-3\vec{b}$ будут являться его диагоналями, а модули векторов $|2\vec{a}+3\vec{b}|$ и $|2\vec{a}-3\vec{b}|$ будут являться длинами диагоналей параллелограмма.

- **4**. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$:
  $A(-3;1;-4)$, $B(-2;4;3)$, $C(0;3;-4)$. Определить:
  - a) координаты четвертой вершины D,
  - b) длину высоты, опущенной из вершины D на сторону AB,
  - c) косинус острого угла между диагоналями AD и BC.

Р е ш е н и е



a) Координаты вершины D можно найти как координаты конца вектора $\overrightarrow{AD}$, который, согласно правилу сложения векторов, равен

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \{1;3;7\} + \{3;2;0\} = \{4;5;7\}$$

Если обозначить $D(x_D; y_D; z_D)$, то

$$\overrightarrow{AD} = \{x_D - x_A;\ y_D - y_A;\ z_D - z_A\} = \{x_D + 3;\ y_D - 1;\ z_D + 4\}.$$

И, следовательно:

$$\{x_D + 3;\ y_D - 1;\ z_D + 4\} = \{4;5;7\} \implies D(1;6;3).$$

b) длину высоты найдем через площадь параллелограмма;
с одной стороны

$$S_{\text{паралл.}} = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| = \left\| \begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 0 \end{array} \right\| = |\{-14; 21; -7\}| = 7\sqrt{14}.$$

С другой стороны

$$S_{\text{паралл.}} = |AB| \cdot H = H \cdot \sqrt{1+9+49} = H \cdot \sqrt{59}.$$

Таким образом: $\quad h \cdot \sqrt{59} = 7\sqrt{14} \quad \Longrightarrow \quad H = \dfrac{7\sqrt{14}}{\sqrt{59}}.$

c) Для нахождения косинуса угла между диагоналями воспользуемся формулой косинуса угла между векторами $\overrightarrow{AD} = \{4; 5; 7\}$ и $\overrightarrow{BC} = \{2; -1; -7\}$: $|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{90}$, $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{54}$, $(\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}) = 8 - 5 - 49 = -46$

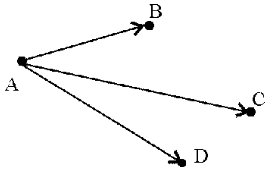
$$\cos\alpha = \pm \frac{(\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC})}{|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{BC}|} \pm \frac{-46}{\sqrt{90}\sqrt{54}}.$$

Так как требуется определить косинус острого угла (косинус острого угла больше нуля), то $\quad \cos\alpha = \dfrac{46}{\sqrt{90}\sqrt{54}}$

- **5**. Доказать, что четыре точки

$$A(-2;3;-2),\quad B(1;-3;-2),\quad C(-1;-2;3),\quad D(8;5;6)$$

лежат в одной плоскости. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.



Р е ш е н и е

Чтобы доказать, что четыре точки лежат в одной плоскости, следует на этих точках создать три различных вектора и установить их компланарность (смешанное произведение должно равняться нулю).

$$\overrightarrow{AB}=\{-9;-7;-3\},\quad \overrightarrow{AC}=\{1;-5;5\},\quad \overrightarrow{AD}=\{10;2;8\}$$

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)=\begin{vmatrix}-9 & -7 & -3\\ 1 & -5 & 5\\ 10 & 2 & 8\end{vmatrix}=450-294-156=0$$

Таким образом, векторы компланарны, и все четыре точки лежат в одной плоскости и являются вершинами некоторого четырехугольника. Для нахождения его площади разобьем его на два треугольника, площади которых найдем с помощью векторного произведения.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| = \left\| \begin{array}{rrr} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -9 & -7 & -3 \\ 1 & -5 & 5 \end{array} \right\| = |\{-50; -42; 52\}| =$$

$$\sqrt{6968} \approx 83.$$

$$S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2}|[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]| = \left\| \begin{array}{rrr} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -5 & 5 \\ 10 & 2 & 8 \end{array} \right\| = |\{-50; -42; 52\}| =$$

$$\sqrt{6968} \approx 83.$$

Площади треугольников оказались равными, что совсем не обязательно, и

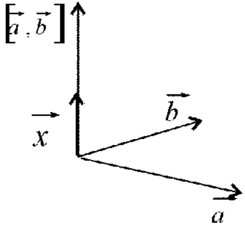
$$S_{ABCD} = 83 + 83 = 166.$$

• **6**. Даны векторы $\vec{a} = \{5; 2; -3\}$ и $\vec{b} = \{3; 0; -4\}$.
Найти вектор $\vec{x}$, если известно, что $\vec{x} \parallel \vec{a}$ и $(\vec{x}, \vec{b}) = 9$.
Р е ш е н и е
Из условия $\vec{x} \parallel \vec{a}$ следует,что

$$\vec{x} = k\vec{a} = k\{5; 2; -3\} = \{5k; 2k; -3k\}.$$

Из условия $(\vec{x}, \vec{b}) = 9$ следует, что
$\{5k; 2k; -3k\} \cdot \{3; 0; -4\} = 9 \implies 15k + 0 + 12k =$
$9 \implies 27k = 9 \implies k = 3.$
Таким образом: $\vec{x} = 3\{5; 2; -3\} = \{15; 6; -9\}.$

• **7**. Найти единичный вектор $\vec{x}$, который одновременно перпендикулярен векторам $\vec{a} = \{-1; 5; 3\}$ и $\vec{b} = \{4; -2; 2\}$, если $(\vec{x}\ {}^\wedge \vec{j}) > 90^\circ$.



Решение. Из условия, что вектор одновременно перпендикулярен двум векторам, следует, что он коллинеарен их векторному произведению, т.е.

$$\begin{cases} \vec{x} \perp \vec{a} = \{-1; 5; 3\} \\ \vec{x} \perp \vec{b} = \{4; -2; 2\} \end{cases} \Longrightarrow \vec{x} = k[\vec{a}, \vec{b}] =$$

$$= k \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 5 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \{15k; 14k; -18k\}.$$

Вектор $\vec{x}$ по условию единичный, т.е.
$|\vec{x}| = \sqrt{225k^2 + 196k^2 + 324k^2} = \pm\sqrt{745}k \approx \pm 27k = 1 \Longrightarrow$
$k_{1,2} = \pm\dfrac{1}{27}$.
Получаем два варианта ответа

$$\vec{x}_1 = \{15k_1; 14k_1; -18k_1\} = \left\{\frac{15}{27}; \frac{14}{27}; -\frac{18}{27}\right\},$$
$$\vec{x}_2 = \{15k_2; 14k_2; -18k_2\} = \left\{-\frac{15}{27}; -\frac{14}{27}; \frac{18}{27}\right\}.$$

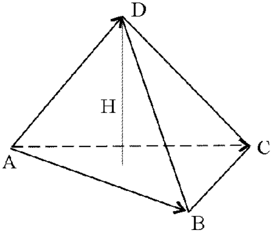
Согласно последнему условию $(\vec{x}\ {}^\wedge \vec{j}) > 90^0$, которое означает, что угол между искомым вектором и осью OY тупой, то есть вторая координата вектора должна быть отрицательной, поэтому окончательным вариантом ответа есть вектор

$$\vec{x} = \left\{-\frac{15}{27}; -\frac{14}{27}; \frac{18}{27}\right\}.$$

- **8**. В пирамиде $ABCD$ с вершинами в точках

$$A(-3;2;-1),\quad B(1;-2;4),\quad C(4;1;-3),\quad D(-3;4;1)$$

найти объем пирамиды и длину ее высоты, опущенной на грань ABC.



Р е ш е н и е

Найдем векторы трех ребер пирамиды

$\overrightarrow{AB} = \{4;-4;5\}$, $\overrightarrow{AC} = \{7;-1;-2\}$, $\overrightarrow{AD} = \{0;2;2\}$

Объем пирамиды можно найти как шестую часть модуля смешанного произведения векторов ее сторон

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{6}\left\| \begin{matrix} 4 & -4 & 5 \\ 7 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{6}\,|8+56+60| = \frac{124}{6} = \frac{62}{3}$$

Длину высоты пирамиды, опущенной на грань ABC, можно найти через полученное значение объема.

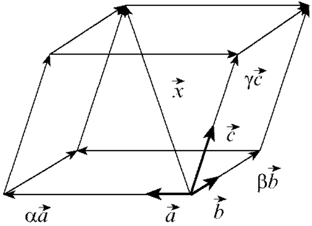
Зная, что $V_{\text{пир.}} = \dfrac{1}{3}\, S_{\text{осн.}} \cdot H$, имеем $\dfrac{1}{3}\, S_{\Delta ABC} \cdot H = \dfrac{62}{3}$.

Площадь основания найдем с помощью векторного произведения

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -4 & 5 \\ 7 & -1 & -2 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2}\, |\{13; 43; 24\}| = \frac{\sqrt{2594}}{2} \approx 25,5.$$

Таким образом: $\dfrac{1}{3} \cdot 25,5 \cdot H = \dfrac{62}{3} \quad \Longrightarrow \quad H = \dfrac{62}{25,5} \approx 2,4.$

- **9**. Доказать, что векторы $\vec{a} = \{4; -2; 1\}$, $\vec{b} = \{2; -1; 1\}$, $\vec{c} = \{3; -3; -2\}$ образуют базис и найти разложение вектора $\vec{x} = \{5; -4; -3\}$ в этом базисе.



Р е ш е н и е

Для того, чтобы доказать, что три вектора в пространстве образуют базис, достаточно установить, что они некомпланарны, т.е. их смешанное произведение не равно нулю. Проверим это

$$\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{c} = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 20 - 14 - 3 = 3 \neq 0.$$

Таким образом, вектор $\vec{x}$ можно разложить в этом базисе
$\vec{x} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} \Longrightarrow \{5; -4; -3\} =$
$\alpha\{4; -2; 1\} + \beta\{2; -1; 1\} + \gamma\{3; -3; -2\}$.
Уравнивая одноименные координаты векторов, получаем
систему уравнений для нахождения коэффициентов разложения

$$\begin{cases} 5 = 4\alpha + 2\beta + 3\gamma \\ -4 = -2\alpha - \beta - 3\gamma \\ -3 = \alpha + \beta - 2\gamma \end{cases} \qquad \Longrightarrow$$

$$\alpha = 2, \quad \beta = -3, \quad \gamma = 1.$$

Получаем искомое разложение

$$\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$$