Примеры решений контрольных работ

Л.И. Терехина, И.И. Фикс

1. **Контрольная работа № 1** Линейная алгебра

- Решить матричное уравнение

$$X\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Выполним вначале умножение матриц на число и упростим уравнение. При умножении матрицы на число все ее элементы нужно умножить на это число. При сложении матриц складываются соответствующие элементы, т.е. элементы, стоящие на одинаковых местах в матрицах. При вычитании матриц также нужно вычитать соответствующие элементы.

$$X\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & -9 \end{pmatrix};$$

$$X\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}, \Rightarrow X\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

Тогда получим матричное уравнение вида $X \cdot A = B$, решение которого $X = B \cdot A^{-1}$, где A^{-1} – матрица, обратная матрице A. Итак,

$$X = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

Найдем A^{-1} по известной схеме:

1) $\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 4 = 10,$ 2) $A^* = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$

3) $A^{*\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ 4) $A^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{det(A)}} A^{*\mathsf{T}} = \dfrac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

Окончательно:

$$X = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 7 \cdot 3 + (-2) \cdot (-4) & 7 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 \\ 0 \cdot 3 + (-3) \cdot (-4) & 0 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 3 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}.$$

Здесь мы выполнили умножение двух матриц по следующему правилу: *При умножении матриц каждый элемент матрицы произведения получается как сумма произведений элементов строки первой матрицы на соответствующие элементы столбца второй матрицы.*

- Найти матрицу, обратную данной. Сделать проверку.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Решаем задачу согласно схеме:

1) Находим определитель данной матрицы (раскладываем по элементам первой строки)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 27 - 13 = 19$$

2) Составляем союзную матрицу, для чего на место каждого элемента матрицы ставим его алгебраическое дополнение

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -13 \\ -1 & 10 & -25 \\ -3 & 11 & -18 \end{pmatrix}$$

3) Транспонируем союзную матрицу

$$A^{*\text{т}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 9 & 10 & 11 \\ -13 & -25 & -18 \end{pmatrix}.$$

4) Записываем обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{A^{*\text{т}}}{\det(A)} = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 9 & 10 & 11 \\ -13 & -25 & -18 \end{pmatrix}.$$

5) Сделаем проверку

$$A^{-1}A = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 9 & 10 & 11 \\ -13 & -25 & -18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 19 & 0 & 0 \\ 0 & 19 & 0 \\ 0 & 0 & 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

При умножении получили единичную матрицу, значит, обратная матрица найдена верно.

- Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 2x - y + z = 4, \\ x + y - z = 2, \\ 2x - y + 3z = 6. \end{cases}$$

Матричный метод решения систем уравнений

1) Обозначим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

и перепишем систему и вид ее решения в матричной форме:

$A \cdot X = B \quad \Longrightarrow \quad X = A^{-1} \cdot B$ или

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \implies$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

2) Находим обратную матрицу $A^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -5 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

и решение системы $X = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -5 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Решить систему уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x - y + z = 4, \\ x + y - z = 2, \\ 2x - y + 3z = 6. \end{cases}$$

1) Выпишем расширенную матрицу системы и преобразуем ее:

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

2) Выписываем эквивалентную систему и ее решение

$$\begin{cases} x \quad +y \quad -z \quad = 2 \\ \quad\;\; -y \quad +z \quad = 0 \\ \qquad\qquad 2z \quad = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 2 - y + z \\ y = z \\ z = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

- Найти общее решение системы

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +3x_3 & +x_4 & -2x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & -x_4 & +x_5 & = & 1 \\ 3x_1 & +3x_2 & -3x_3 & -3x_4 & +4x_5 & = & 2 \\ 4x_1 & +5x_2 & -5x_3 & -5x_4 & +7x_5 & = & 3 \end{cases}$$

Решение. Записываем расширенную матрицу системы и выполняем необходимые линейные преобразования строк этой матрицы

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 & 3 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} -2 \cdot S_1 + S_2 \\ -3 \cdot S_1 + S_3 \\ -4 \cdot S_1 + S_4 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & -12 & -6 & 10 & 2 \\ 0 & 9 & -17 & -9 & 15 & 3 \end{array}\right) \sim \quad \begin{array}{c} -2 \cdot S_3 + S_3 \\ -3 \cdot S_2 + S_4 \end{array} \quad \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Делаем выводы: система совместна, так как ранг основной и расширенной матриц равны и равны трем, т.к. три строки матрицы линейно независимы, $\mathrm{R} \ = 3$. Далее, ранг матрицы меньше числа неизвестных, $\mathrm{Rang}\ A = 3 < n = 5$, поэтому система имеет бесконечное множество решений.

Выбираем базисный минор. Это должен быть минор третьего порядка, не равный нулю. Видно, что в качестве базисных следует взять 1-й, 2-ой и 3-й столбцы $M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. *Базисных* неизвестных будет три: $x_1,\ x_2,\ x_3$. *Свободных* неизвестных будет два: $x_4,\ x_5,$ так как $(n-R) = 5-3 = 2$.

Записываем эквивалентную систему, при этом базисные неизвестные остаются в левой части уравнений, а свободные переносятся с противоположным знаком в правую часть

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 - x_2 + 3x_3 = -x_4 + 2x_5 \\ 3x_2 - 7x_3 = 1 + 3x_4 - 5x_5 \\ x_3 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_1 - x_2 = x_4 + 2x_5 \\ 3x_2 = 1 + 3x_4 - 5x_5 \\ x_3 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 - (1/3 + x_4 - 5/3x_5) = x_4 + 2x_5 \\ x_2 = 1/3 + x_4 - 5/3\ x_5 \\ x_3 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_1 = -1/3 + 1/3x_5 \\ x_2 = 1/3 + x_4 - 5/3\ x_5 \\ x_3 = 0 \end{array} \right.$$

Итак, мы получили *общее решение системы*

$$X = \begin{pmatrix} 1/3 + 1/3\ x_5 \\ 1/3 + x_4 - 5/3\ x_5 \\ 0 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}.$$

- Найти ненулевые решения однородной системы

$$\begin{cases} x_1 & +4x_2 & +2x_3 & & -3x_5 & = 0 \\ 2x_1 & +9x_2 & +5x_3 & +2x_4 & +x_5 & = 0 \\ x_1 & +3x_2 & +x_3 & -2x_4 & -9x_5 & = 0 \end{cases}$$

Решение. Данная система уравнений называется однородной, так как все свободные члены равны нулю. Особенностью такой системы является то, что она всегда совместна, т.е. имеет решение. У всякой однородной системы есть нулевое решение, когда все неизвестные равны нулю. Такая ситуация реализуется, если ранг системы равен числу неизвестных. Наибольший интерес представляет нахождение ненулевых решений. Это возможно в том случае, когда ранг системы меньше числа неизвестных. Рассмотрим пример решения такой системы методом Гаусса.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 9 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} S_2 - 2S_1 \\ S_3 - S_1 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -6 \end{pmatrix} \sim S_3 + S_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Три строки матрицы линейно независимы, ранг матрицы равен трем: $\mathrm{Rang}\ A = 3$. Кроме того, $\mathrm{Rang}\ A = 3 < n = 5$, значит система имеет бесконечное множество решений.

Выбираем базисный минор. Его нужно составить из трех столбцов так, чтобы определитель 3-го порядка не равнялся нулю. Видно, что в качестве базисных следует взять 1-й, 2-ой и 5-й столбцы $\quad M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. *Базисных* неизвестных будет три: $x_1, \quad x_2, \quad x_5$. *Свободных* неизвестных будет два: $x_3, \quad x_4$, так как $(n - R) = 5 - 3 = 2$.

При составлении эквивалентной системы базисные неизвестные остаются в левой части уравнений, а свободные переносятся с противоположным знаком в правую часть

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_5 = -2x_3 \\ x_2 + 7x_5 = -x_3 - 2x_4 \\ x_5 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_2 = -2x_3 \\ x_2 = -x_3 - 2x_4 \\ x_5 = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 + 4(-x_3 - 2x_4) = -2x_3 \\ x_2 = -x_3 - 2x_4 \\ x_5 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 + 8x_4 \\ x_2 = -x_3 - 2x_4 \\ x_5 = 0 \end{cases}.$$

Неизвестное $x_5 = 0$ подставляем во второе уравнение, находим x_2 и подставляем найденные x_2 и x_5 в первое уравнение. Получаем решение, в котором базисные неизвестные выражены через свободные.

Итак, *ненулевые решения системы* $X = \begin{pmatrix} 2x_3 + 8x_4 \\ -x_3 - 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \\ 0 \end{pmatrix}$