Приложение производных к исследованию функций

Лекции 1–6

Л.И. Терехина, И.И. Фикс

Курс: Высшая математика
Семестр 1, 2009 год
portal.tpu.ru

Теорема 1 (Ферма)

Если функция $y = f(x)$:
$1)$ *непрерывна в замкнутом промежутке $[a; b]$,*
$2)$ *в некоторой внутренней точке c этого промежутка достигает своего наибольшего или наименьшего значения,*
$3)$ *дифференцируема в этой точке,*
то производная функции в этой точке равна нулю: $f'(c) = 0$.

Доказательство. Проведем доказательство для случая, когда функция достигает во внутренней точке промежутка c своего наибольшего значения. Рассмотрим производную функции слева и справа от этой точки.

а) слева: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} = \dfrac{\ominus}{\ominus} = \oplus.$

Значение функции в точке c является наибольшим в интервале $[a; b]$, т.е. $f(c) > f(c+\Delta x)$ или $f(c+\Delta x) - f(c) < 0$; кроме того, приращение аргумента слева от точки c также отрицательно. Таким образом, слева от точки c производная функции положительна.

б) справа: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} = \dfrac{\ominus}{\oplus} = \ominus.$

Так как значение функции в точке c является функции в интервале $[a; b]$, значит, снова $f(c+\Delta x) - f(c) < 0$, а приращение аргумента справа от точки c положительно. Таким образом, слева от точки c производная функции отрицательна. Следовательно, переходя через точку c слева направо, производная сменила знак, поэтому по теореме Больцано–Коши о нулях функции имеем, что в точке c производная должна равняться нулю.

Геометрический смысл теоремы Ферма заключается в том, что, если функция удовлетворяет всем условиям теоремы, то касательная к графику функции в точке c проходит параллельно оси OX (рис. 1).

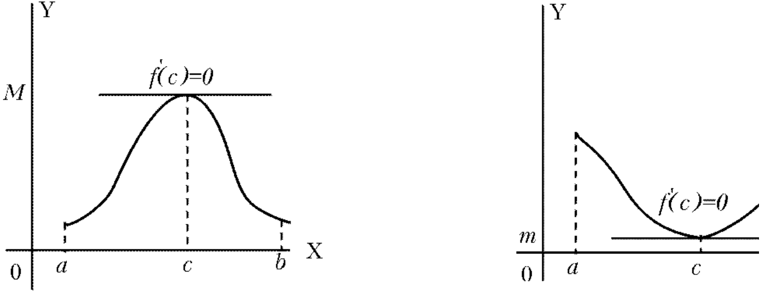
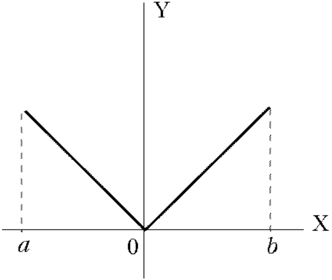


Рис. 1

Отметим, что если производная в точке, где функция достигает наибольшего или наименьшего значения, не существует, касательная к графику функции в этой точке может быть не определена. Примером такой функции может служить функция $y = |x|$. Хотя в точке $x = 0$ эта функция и достигает своего наименьшего значения, но производная в этой точке не существует и линия не имеет касательной в данной точке (рис. 2).



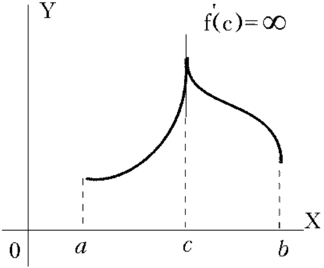


Рис. 2

Теорема 2

Ролля (о нулях производной)

Если функция $y = f(x)$*:*
$1)$ *непрерывна в замкнутом промежутке* $[a; b]$*,*
$2)$ *дифференцируема в открытом промежутке* $(a; b)$
и
$3)$ *имеет на концах интервала одинаковые значения* $f(a) = f(b)$*, то внутри интервала существует хотя бы одна точка* c*, производная функции в которой равна нулю:* $f'(c) = 0$*.*

Геометрический смысл теоремы Ролля заключается в том, что, если функция удовлетворяет всем условиям теоремы, то на дуге линии $y = f(x)$ между ее концами найдется хотя бы одна точка, в которой касательная проходит параллельно оси OX.

Доказательство. Так как функция непрерывна в замкнутом промежутке, то согласно теореме Вейерштрасса она достигает в этом промежутке своего наибольшего и наименьшего значений. Возможны две основные ситуации.
а) Наибольшее и наименьшее значения функция принимает на концах промежутка. Но по условию теоремы значения функции на концах интервала равны. Поэтому соединить их можно либо прямой линией, параллельной оси OX, и тогда во всех точках интервала производная функции будет равна нулю.
б) Наибольшее и наименьшее значения функция принимает во внутренних точках промежутка. Тогда, соединяя точки с одинаковыми значениями функции, мы обязательно проведем график функции так, что хотя бы один раз пройдем через наибольшее или наименьшее значения функции, а значит, выполнятся все условия теоремы Ферма, и в точках наибольшего или наименьшего значений функции производная будет равна нулю.

Условия и выводы теоремы проиллюстрированы на рисунках (рис. 3).

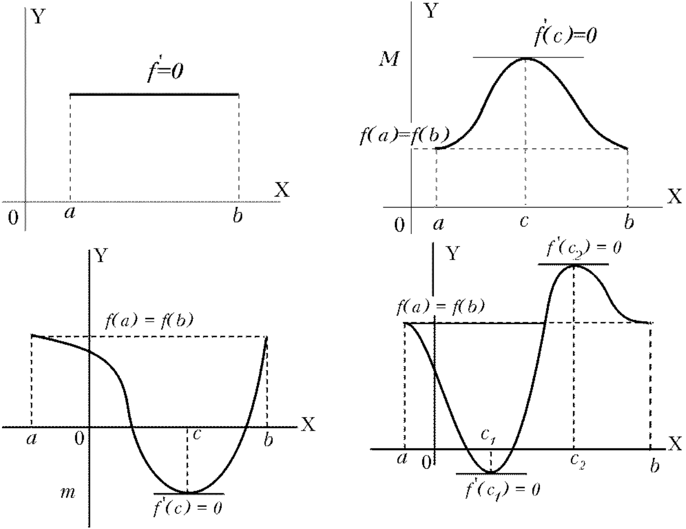


Рис. 3

Так же как и в теореме Ферма, в теореме Ролля обязательным условием является дифференцируемость функции во внутренних точках интервала. Нарушение этого условия (при выполнении остальных) означает наличие в интервале таких точек, в которых функция достигает наибольшего или наименьшего значений, но производная в этих точках не существует (рис. 4).

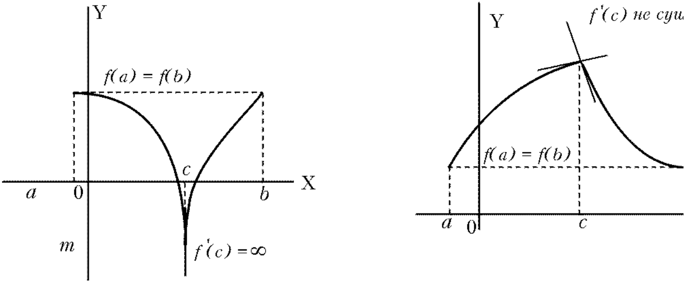


Рис. 4

Следствие из теоремы Ролля.
Если в теореме Ролля

$$f(a) = f(b) = 0,$$

то точки $x = a$, $x = b$ *называются нулями функции, и тогда, согласно теореме Ролля, между двумя нулями функции обязательно найдется хотя бы один нуль ее производной* (рис. 5).

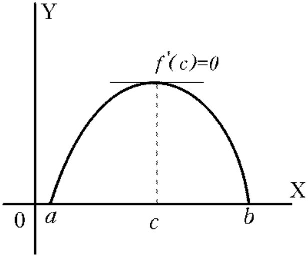


Рис. 5

Теорема 3 (Лагранжа)

(о конечных приращениях функции)
Если функция $y = f(x)$*:*
1) *непрерывна в замкнутом промежутке* $[a; b]$,
2) *дифференцируема в открытом промежутке* $(a; b)$,
то внутри интервала существует хотя бы одна такая точка c*, в которой имеет место равенство* $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ *— формула Лагранжа.*

Доказательство. Введем вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \cdot x.$$

Эта функция непрерывная и дифференцируемая так же, как и функция $f(x)$, т.е. она удовлетворяет всем условиям теоремы Лагранжа. Потребуем, чтобы она удовлетворяла условиям теоремы Ролля и найдем значение λ.

Итак, с одной стороны

$$\varphi(a) = \varphi(b) \quad \Longrightarrow \quad f(a) + \lambda \cdot a = f(b) + \lambda \cdot b,$$

$$f(b) - f(a) = -\lambda \cdot (b - a) \qquad \Longrightarrow \quad \lambda = -\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

С другой стороны, дифференцируя функцию $\varphi(x)$, получим

$$\varphi'(x) = f'(x) + \lambda.$$

Согласно теореме Ролля, в некоторой точке c промежутка $[a; b]$ производная должна равняться нулю:

$$\varphi'(c) = f'(c) + \lambda = 0.$$

Отсюда получаем, что значение λ равно

$$\lambda = -f'(c).$$

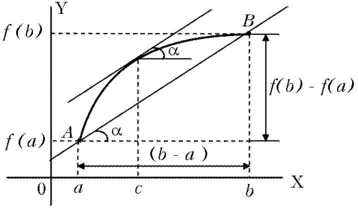
Приравнивая два выражения для λ, получим формулу Лагранжа

$$-\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = -f'(c) \quad \text{или} \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Геометрический смысл теоремы Лагранжа заключается в том, что, если функция удовлетворяет всем условиям теоремы, то на дуге линии $y = f(x)$ между ее концами найдется точка, в которой касательная проходит параллельно хорде, стягивающей концы дуги кривой (рис. 6).

Действительно, левая часть формулы $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ представляет собой тангенс угла наклона хорды AB, а правая часть формулы $f'(c)$ геометрически есть угловой коэффициент (тангенс угла наклона) касательной к графику функции в точке c.

Согласно теореме Лагранжа, эти значения равны, а значит, касательная и хорда параллельны.



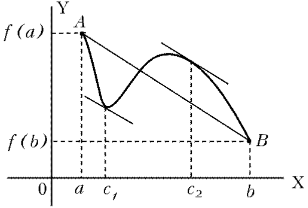


Рис. 6

Из теоремы Лагранжа можно получить одно важное следствие, которое широко используется в математическом анализе в доказательстве ряда теорем.

Формула конечных приращений

Запишем формулу Лагранжа в интервале $[x_0; x]$ (в окрестности точки x_0). Тогда $a = x_0$, $b = x$, и получим

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c), \quad \text{где} \quad c \in |x_0; x|.$$

Откуда имеем

$$\boxed{f(x) - f(x_0) = f'(c) \cdot (x - x_0),} \quad \text{или} \quad \boxed{\Delta f(x) = f'(c) \cdot \Delta x.}$$

Эта формула носит название *формулы конечных приращений* и выражает тот факт, что *конечному приращению аргумента соответствует конечное приращение функции.*

Приращение функции на интервале равно произведению производной в некоторой точке интервала на приращение независимой переменной.

Дифференцируемость функции во внутренних точках интервала является обязательным условием в теореме Лагранжа, так как при наличии в интервале точек, в которых функция не дифференцируема, может и не найтись точки, в которой имеет место формула Лагранжа, т.е. не найдется точки, в которой хорда параллельна касательной.

Пример 1

Удовлетворяет ли функция $y = \sqrt{x}$ в интервале $[4; 9]$ теореме Лагранжа? В случае положительного ответа найти точку c.

Решение. Найдем производную функции $y = \sqrt{x}$:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Видим, что функция дифференцируема в заданном интервале, так как единственная точка, в которой функция не дифференцируема $(x = 0)$ не принадлежит заданному интервалу. Из дифференцируемости функции следует и ее непрерывность в данном интервале. Итак, функция удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа. Запишем формулу Лагранжа для заданной функции:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \quad \frac{\sqrt{9} - \sqrt{4}}{9 - 4} = \frac{1}{2\sqrt{c}}, \Rightarrow \sqrt{c} = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{25}{4}.$$

Теорема 4 (Коши)

Если функции $y = f(x)$ и $g(x)$:
$1)$ *непрерывны в замкнутом промежутке $[a; b]$,*
$2)$ *дифференцируемы в открытом промежутке $(a; b)$,*
$3)$ *производная $g'(x) \neq 0$ во внутренних точках интервала,*
то внутри интервала существует хотя бы одна точка c, для которой имеет место равенство

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \text{— формула Коши.}$$

Доказательство. Введем вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \cdot g(x).$$

Эта функция непрерывная и дифференцируемая так же, как и функции $f(x)$ и $g(x)$, т.е. она удовлетворяет всем условиям теоремы Коши. Потребуем, чтобы она удовлетворяла условиям теоремы Ролля и найдем значение λ.

Итак, с одной стороны

$$\varphi(a) = \varphi(b) \quad \Longrightarrow \quad f(a) + \lambda \cdot g(a) = f(b) + \lambda \cdot g(b),$$

$$f(b) - f(a) = -\lambda \cdot [g(b) - g(a)] \quad \Longrightarrow \quad \lambda = -\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

С другой стороны, дифференцируя функцию $\varphi(x)$, получим

$$\varphi'(x) = f'(x) + \lambda \cdot g'(x).$$

Согласно теореме Ролля, в некоторой точке c промежутка $[a; b]$ производная должна равняться нулю:

$$\varphi'(c) = f'(c) + \lambda \cdot g'(c) = 0.$$

Отсюда получаем, что значение λ равно $\lambda = -\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Приравнивая два выражения для λ, получим формулу Коши

$$-\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = -f'(c) \quad \text{или} \quad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = f'(c).$$

Геометрический смысл теоремы Коши аналогичен геометрическому смыслу теоремы Лагранжа.

Правило Лопиталя

Рассмотрим вопрос о приложении производных к раскрытию неопределенностей. В ряде случаев при вычислении пределов, содержащих неопределенности вида $(0/0)$ и $\infty/\infty)$, может эффективно применяться правило Лопиталя, суть которого кратко можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема 5

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to x_0$ (или $x \to \infty$) совместно стремятся к нулю или к бесконечности. Если отношение их производных имеет предел (конечный или бесконечный), то отношение самих функций также имеет предел, равный пределу отношения производных.

Или кратко:

П р а в и л о Л о п и т а л я. *Предел отношения двух бесконечно малых или двух бесконечно больших функций равен пределу отношения производных этих функций, если он существует*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Предполагается, что функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны в некоторой окрестности точки x_0 знаменатель $g(x)$ обращается в ноль только в самой точке x_0, а также что производные в точке x_0 существуют и $g'(x_0) \neq 0$.

Доказательство. Рассмотрим для случая предела отношения двух бесконечно малых функций:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

Тогда, не нарушая равенства, можно записать

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} =$$

Применяя формулу конечных приращений, получим

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f'(c)\,(x - x_0)}{g'(c)\,(x - x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(Так как при $x \to x_0$ значение $c \in (x_0; x)$ тоже стремится к x_0.)

При использовании правила Лопиталя следует обратить внимание на следующее:
1. Перед тем как применить правило Лопиталя, необходимо твердо убедиться в наличии неопределенностей указанных видов.
2. Правило говорит о том, что нужно дифференцировать не всю дробь, а отдельно числитель и знаменатель.
3. К правилу Лопиталя имеет смысл обращаться в тех случаях, когда производные числителя и знаменателя находятся не слишком сложно и не приводят к громоздким выражениям.
4. Если после однократного применения правила Лопиталя, неопределенность сохранилась, то можно применять его повторно до тех пор, пока неопределенность не исчезнет, на каждом этапе проводя упрощение выражений.

Рассмотрим примеры.

Неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

- **1**. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x+1}{x^3-x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^3-2x+1)'}{(x^3-x)'}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2}{3x^2-1}=\dfrac{1}{2}.$

- **2**. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+15}-4}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2-\sqrt{x})'}{(\sqrt{x^2+15}-4)'}=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2x-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+15}}\cdot 2x}=\frac{2-\dfrac{1}{2}}{\dfrac{2}{2\sqrt{16}}}=\frac{3/2}{1/4}=6.$$

• **3**. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-6x+6\sin\ x}{x^5}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^3-6x+6\sin x)'}{(x^5)'}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-6+6\cos x}{5x^4}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(3x^2-6+6\cos x)'}{(5x^4)'}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x-6\sin x}{20x^3}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(6x-6\sin x)'}{(20x^3)'}=$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6-6\cos x}{60x^2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(6-6\cos x)'}{(60x^2)'}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6\sin x}{120x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6\cdot x}{120x}=\dfrac{1}{20}.$

При раскрытии неопределенностей следует сочетать применение правила Лопиталя с использованием таблицы эквивалентных бесконечно малых величин, чтобы упростить исходное выражение. Например, при решении пределов, включающих выражения вида $\operatorname{tg}^5 x,\ \sin^6 2x,\ \operatorname{ctg} x$, использование правило Лопиталя значительно упростится, если предварительно заменить их на эквивалентные

$$\text{при}\ \ x\to 0:\quad \operatorname{tg}^5 x\sim x^5,\quad \sin^6 2x\sim(2x)^6,\quad \operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x}\sim\frac{1}{x}.$$

Неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

• **4.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\operatorname{ctg}(x-2)}{\ln(x-2)}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=|x-2=t,\ t\to 0|=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\operatorname{ctg} t}{\ln t}=$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{(\operatorname{ctg}\ t)'}{(\ln t)'}=\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{-1}{\sin^2 t}}{\dfrac{1}{t}}=\lim_{t\to 0}\left(-\frac{t}{\sin^2 t}\right)=\lim_{t\to 0}\left(-\frac{t}{t^2}\right)=$$

$$=\lim_{t\to 0}\left(-\frac{1}{t}\right)=-\frac{1}{0}=-\infty.$$

Применение правила Лопиталя при раскрытии неопределенностей других видов требует предварительного преобразования исходного выражения.

Неопределенность вида $(\infty-\infty)$. Разность двух выражений в этих случаях нужно записать в виде дроби (чаще всего достаточно привести все выражение к общему знаменателю).

• **5**. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\cdot\ln x-x+1}{(x-1)\cdot\ln x}=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x\cdot\ln x-x+1)'}{((x-1)\cdot\ln x)'}=\lim_{x\to 1}\frac{1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-1}{\ln x+\frac{1}{x}(x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x\cdot\ln x}{x\ \ln x+x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x\cdot\ln x)'}{(x\ \ln x+x-1)'}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}}{1\cdot\ln x+x\frac{1}{x}+1}=\frac{0+1}{0+1+1}=\frac{1}{2}.$$

Неопределенность вида $(0\cdot\infty)$. В этих случаях также необходимо произведение записать в виде дроби, переведя одну из функций-сомножителей в знаменатель. Например,

- **6**. $\lim\limits_{x\to 1} \ln x\cdot\ln(x-1) = (0\cdot\infty) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x-1)}{(1/\ln x)} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) =$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(\ln(x-1))'}{(1/\ln x)'} = \lim_{x\to 1} \frac{\dfrac{1}{x-1}}{-\dfrac{1}{\ln^2 x}\cdot\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{\dfrac{1}{x-1}}{-\dfrac{1}{\ln^2 x}} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-\ln^2 x}{(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{-2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{1} = \frac{0}{1} = 0.$$

- **7**. $\lim\limits_{x\to +0} x^2\cdot\ln x = (0\cdot\infty) = \lim\limits_{x\to +0} \dfrac{\ln x}{(1/x^2)} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) =$

$$\lim_{x\to +0} \frac{(\ln x)'}{(1/x^2)'} = \lim_{x\to +0} \frac{1/x}{(-2/x^3)} = \lim_{x\to +0} \frac{x^3}{(-2x)} = \lim_{x\to +0} \frac{x^2}{-2} = 0.$$

Замечание

С помощью правила Лопиталя можно показать, что

$$\lim_{x\to+0} x^k \cdot \ln x = 0 \text{ для любого } k>0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^n \cdot e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \text{ для любого } n.$$

Знание этих соотношений в ряде случаев значительно упрощает раскрытие неопределенностей.

Неопределенности вида $(1^\infty),\ (0^0),\ (\infty^0)$. Для того чтобы можно было применить правило Лопиталя, используем равенство

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} \ln[f(x)]^{g(x)}} = e^{\lim\limits_{x\to x_0}[g(x)\cdot\ln f(x)]}.$$

Далее выражение, стоящее в показателе степени, следует записать в виде дроби, как это делалось в предыдущем случае. К полученному выражению применить правило Лопиталя. Можно при этих действиях упрощать выражение, используя эквивалентные б.м.в.

- **8**. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2} = (1^\infty) = e^{\lim\limits_{x\to 0}[(1/x^2)\cdot\ln(\cos x)]} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}} =$
$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\ln(\cos x))'}{(x^2)'}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(-\sin x)}{(\cos x\cdot 2x)}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(-x)}{(2x)}} = e^{-1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.
- **9**. $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+x)^{\sin x} = \left(0^0\right) = e^{\lim\limits_{x\to 0}[\sin x\cdot\ln(x^2+x)]} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x^2+x)}{1/\sin x}} =$
$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x^2+x)}{1/x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln'(x^2+x)}{(1/x)'}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(2x+1)/(x^2+x)}{(-1/x^2)}} =$
$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(-x^2)}{(x^2+x)}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(-x)}{(x+1)}} = e^0 = 1.$
- **10**. $\lim\limits_{x\to 0}(1/x)^{\operatorname{tg} x} = \left(\infty^0\right) = e^{\lim\limits_{x\to 0}[\operatorname{tg} x\cdot\ln(1/x)]} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(-\ln x)}{\operatorname{ctg} x}} =$
$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(-\ln x)'}{(\operatorname{ctg} x)'}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(-1/x)}{(-1/\sin^2 x)}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x}} =$
$= e^{\lim\limits_{x\to 0}(x)} = e^0 = 1.$

• **11**. $\lim\limits_{x\to\infty}(e^x+x)^{1/x}=(\infty^0)=e^{\lim\limits_{x\to\infty}[(1/x)\cdot\ln(e^x+x)]}=$

$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(e^x+x)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\ln(e^x+x))'}{(x)'}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(e^x+1)}{(e^x+x)}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(e^x+1)'}{(e^x+x)'}}=$

$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{(e^x+1)}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(e^x)'}{(e^x+1)'}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x}}=e^1=e.$

В заключение заметим, что есть случаи, когда предел отношения функций существует, но не может быть вычислен по правилу Лопиталя, так как не существует предел отношения производных. Например,

• $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-\sin x)}{x+\sin x}=1$, так как к б.б.в. $x\to\infty$ добавляется величина ограниченная, т.е. $|\sin x|\le 1$, и можно решить предел, пренебрегая слагаемым $\sin x$ и в числителе и в знаменателе.

Если же решать этот предел, формально применяя правило Лопиталя, то получим

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-\sin x)'}{(x+\sin x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$ не существует,

так как при изменении $\cos x$ от -1 до $+1$ величина предела будет разной, а предел, как известно, должен быть единственным. Итак, в данном случае предел не может быть вычислен по правилу Лопиталя.

Исследование функции является одним из важнейших приложений теории пределов, непрерывности функции и производных. При анализе функции и построении ее графика чаще всего оказывается недостаточно знать только такие простейшие свойства функций, как монотонность, четность, нечетность, периодичность, нули функции, а строить весь график по произвольным точкам слишком нерационально. Поэтому для получения полной картины поведения функции привлекаются теория пределов и непрерывности функции для нахождения асимптот кривой, производные первого и второго порядков для отыскания точек экстремума и перегиба, определения интервалов возрастания , убывания, выпуклости и вогнутости функции.

Схема полного исследования функции содержит следующие этапы:

1. Нахождение области определения функции.
2. Нахождение асимптот графика функции (вертикальных и наклонных).
3. Нахождение точек экстремума функции, интервалов монотонности с использованием первой производной.
4. Нахождение точек перегиба и интервалов выпуклости и вогнутости с применением второй производной функции.
5. Анализ простейших свойств функции для получения дополнительной информации (четности, (нечетности) функции, ее периодичности, определение точек пересечения с осями координат и некоторых дополнительных точек графика функции (при необходимости)).

Рассмотрим сначала отдельные элементы исследования функции, а затем и полное исследование с построением эскиза графика функции.

Область определения функции

Задачу на исследование любой функции необходимо начинать с нахождения области ее определения.

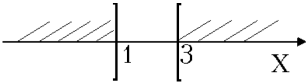
Как известно, при аналитическом способе задания функции $y = f(x)$ (т.е. с помощью формул) под областью определения $D(y)$ понимают совокупность значений аргумента, при которых функция имеет смысл. Геометрически область определения функции одной переменной представляет собой интервал на оси OX (может быть и вся числовая ось).

Рассмотрим примеры нахождения области определения функции.

• **1**. Областью определения следующих функций является вся числовая ось, т.е. $D(y): x \in (-\infty; +\infty)$, так как эти функции не содержат дробей, знаменатель которых обращался бы в ноль в какой-либо точке, нет отрицательных значений выражений под знаком корня четной степени, под знаком логарифмической функции и т. д., а именно эти моменты и надо учитывать при нахождении области определения функции

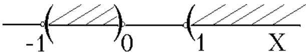
$$\begin{array}{lll} y=(x+3)\cdot e^{-3x}, & y=e^{2x-x^2}, & y=x^3-\dfrac{x^4}{4}, \\ y=x\cdot\sqrt[3]{(x-2)^5}, & y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}, & y=\sqrt{x^2+4}, \\ y=x-\operatorname{arctg} x, & y=x+\sin 3x, & y=\ln(x^2+9). \end{array}$$

- **2**. $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$.



Очевидно, что область определения
$D(y)$ находится из условия: $x^2 - 4x + 3 \geq 0$.
Находим корни квадратного трехчлена и
записываем его в виде $(x-1)(x-3) \geq 0$. Откуда следует, что
$D(y) : x \in (-\infty;\ 1] \cup [3;\ +\infty)$.

- **3**. $y = \ln\left(x - \dfrac{1}{x}\right)$.



Очевидно, что область определения $D(y)$
находится из условий

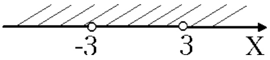
$$\begin{cases} x - \dfrac{1}{x} > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x} > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x} > 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

На числовой прямой отметим значения $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ и
определим знак дроби в каждом интервале. Выделяем те
интервалы, в которых дробь положительна, и учтем, что $x \neq 0$,
$x \neq \pm 1$.
Область определения $D(y) : x \in (-1; 0) \cup (1;\ +\infty)$.

- **4**. $y = \dfrac{x-1}{x^2-9}$.

Из области определения функции исключаем значения $x = -3$, $x = 3$, при которых знаменатель дроби $(x^2 - 9) = (x-3)(x+3)$ обращается в ноль. Итак,

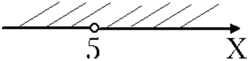
$D(y) : x \in (-\infty; -3) \cup (-3; +3) \cup (3; +\infty)$.



- **5**. $y = \operatorname{arctg} \dfrac{4}{x-5}$.

Из области определения функции исключаем значение $x = 5$, при котором знаменатель дроби обращается в ноль. Итак,

$D(y) : x \in (-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$.



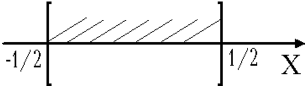
- **6**. $y = \arcsin 2x - 5x$.

Аргумент арксинуса по абсолютной величине не должен превышать единицы

$$| \, 2x \, | \leq 1, \quad \Rightarrow \quad -1 \leq 2x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad -1/2 \leq x \leq 1/2.$$

Таким образом, функция определена в интервале

$D(y) : x \in \left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2} \right]$.



Монотонность функции на интервале

Одной из характеристик поведения функции на интервале является ее монотонность, т.е. возрастание или убывание функции в этом интервале.

Напомним, что функция $y = f(x)$ называется *возрастающей на интервале* $[a; b]$, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции, т.е. для $x_1 > x_2$ имеем $f(x_1) > f(x_2)$.

Функция $y = f(x)$ называется *убывающей на интервале* $[a; b]$, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, т.е. для $x_1 > x_2$ имеем $f(x_1) < f(x_2)$.

Монотонность функции определяется знаком первой производной функции в этом интервале.

Достаточные условия монотонности функции

Если функция непрерывна в замкнутом интервале $[a; b]$ и дифференцируема во всех внутренних точках, то

1) *Если производная $f'(x)$ внутри интервала всюду положительна, то функция $f(x)$ в интервале $[a; b]$ возрастает.*

2) *Если производная $f'(x)$ внутри интервала всюду отрицательна, то функция $f(x)$ в интервале $[a; b]$ убывает.*

3) *Если производная $f'(x)$ внутри интервала всюду равна нулю, то функция $f(x)$ в интервале $[a; b]$ не изменяется (есть константа).*

Итак,

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{если } y'(x) > 0 & \forall x \in (a; b), & \text{то функция возрастает;} \\ \text{если } y'(x) < 0 & \forall x \in (a; b), & \text{то функция убывает.} \end{array}}$$

Доказательство. Возьмем значения x_1 и $x_2 \in [a; b]$, т.е. $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ и применим к интервалу $[x_1; x_2]$ формулу конечных приращений

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1).$$

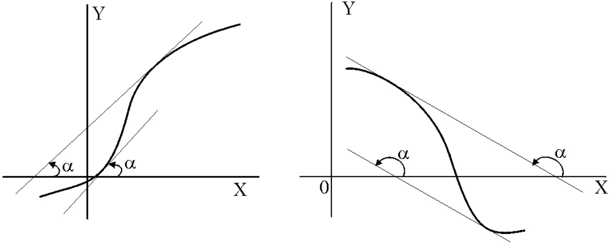
Поскольку $(x_2 - x_1) > 0$, то при условии $f'(c) > 0$ получим

$$f(x_2) > f(x_1) \quad \text{для } x_2 > x_1,$$

т.е. большему значению аргумента соответствует большее значение функции, а значит, по определению, функция возрастает.
А при условии $f'(c) < 0$ получим $f(x_2) < f(x_1)$ для $x_2 > x_1$, т.е. большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, значит функция убывающая.

Геометрическая иллюстрация

На участках возрастания касательные к графику функции образуют острый угол с положительным направлением оси OX и угловой коэффициент касательной положительный, а значит, и производная на этом участке положительна, так как $y'(x) = k_{\text{кас}} = \operatorname{tg}\alpha > 0$.



На участках убывания касательные к графику функции образуют тупой угол с положительным направлением оси OX и угловой коэффициент касательной отрицательный, а значит, и производная на этом участке отрицательная, так как $y'(x) = k_{\text{кас}} = \operatorname{tg}\alpha < 0$.

Понятие экстремума

Пусть дана функция $y = f(x)$ и точка $x = x_0$ – некоторая внутренняя точка области определения функции $D(y)$.

Определение

Функция имеет в точке $x = x_0$ м а к с и м у м, если значение функции в этой точке является наибольшим по сравнению со значениями функции в соседних точках, т.е. $f(x_0) \geq f(x)$.

Определение

Функция имеет в точке $x = x_0$ м и н и м у м, если значение функции в этой точке является наименьшим по сравнению со значениями функции в соседних точках, т.е. $f(x_0) \leq f(x)$.

Определение

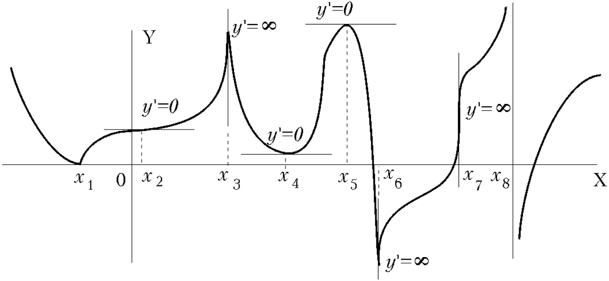
Функция имеет в точке $x = x_0$ э к с т р е м у м , если она имеет в этой точке максимум (max) *или минимум* (min).

Необходимое условие существования экстремума

Теорема 6

Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум, то ее первая производная в этой точке равна нулю $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Если функция имеет в точке x_0 экстремум, то ее значение в этой точке является наибольшим или наименьшим значением функции в некоторой окрестности точки x_0. Тогда, если функция дифференцируема в окрестности этой точки, то она будет удовлетворять всем условиям теоремы Ферма, а значит, в точках, где функция достигает этих значений производная будет равна нулю. Отметим, что сформулированное условие необходимо расширить. Для того, чтобы сформулировать все необходимые условия экстремума функции в точке, рассмотрим рисунок.



На рисунке представлен график некоторой непрерывной функции, имеющей в точках x_1, x_3, x_5 максимум, а в точках x_4, x_6 минимум. Из рисунка видно, что в точках экстремума касательная к графику функции проходит

либо горизонтально, в этом случае угловой коэффициент касательной равен нулю ($k_{\text{кас}} = y'(x_4) = y'(x_5) = 0$),

либо вертикально, тогда угловой коэффициент касательной равен бесконечности ($k_{\text{кас}} = y'(x_3) = y'(x_6) = \infty$),

либо касательная не определена ($y'(x_1)$ не существует).

Из рисунка также видно, что горизонтальное или вертикальное расположение касательной к графику функции в какой-либо точке еще не означает, что в точке обязательно будет экстремум.
Так, в точке x_2 касательная проходит горизонтально и $y'(x_2) = 0$, но экстремума нет. В точке x_7 касательная проходит вертикально и $y'(x_7) = \infty$, но экстремума также нет.
Обратим внимание, что в точках экстремума x_1, x_3, x_4, x_5, x_6 функция меняет свое поведение:
слева от точки max функция возрастает и $y' > 0$,
справа убывает и $y' < 0$;
слева от точки min функция убывает и $y' < 0$,
справа возрастает и $y' > 0$.
В точках x_2, x_7, где экстремума нет, поведение функции не меняется. Проходя через эти точки функция остается либо возрастающей, либо убывающей. Не меняется и знак производной.

Необходимые условия существования экстремума

Для того чтобы непрерывная в точке x_0 *и ее окрестности функция* $y = f(x)$ *имела в этой точке экстремум,* ***необходимо****, чтобы первая производная функции* $y'(x)$ *в этой точке либо обращалась в ноль* $y'(x_0) = 0$*, либо в бесконечность, или не существовала* $y'(x_0) = \infty$.

Точки из области определения функции, в которых $y' = 0$*;* $y' = \infty$*,* y' *не существует, называются* **критическими.**

1-ое достаточное условие существования экстремума

Как уже было показано, выполнение необходимых условий еще не означает, что в критической точке будет экстремум. Поэтому нужны еще достаточные условия существования экстремума функции.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна и дифференцируема в окрестности точки x_0 (дифференцируемость в самой точке не требуется).

Теорема 7

Если при переходе через критическую точку x_0 слева направо первая производная функции меняет свой знак с $\oplus$ на $\ominus$, то в этой точке существует максимум max.
Если при переходе через критическую точку x_0 слева направо первая производная функции меняет свой знак с $\ominus$ на $\oplus$, то в точке существует минимум min.
(Если знак производной в критической точке не меняется, то экстремума в этой точке нет.)

Доказательство. Пусть слева от критической точки x_0 производная $f'(x) > 0$, а справа от точки x_0 производная $f'(x) < 0$. Покажем, что в точке max.
Запишем формулу конечных приращений в окрестности критической точки

$$f(x) - f(x_0) = f'(c) \cdot (x - x_0).$$

Рассмотрим знак разности $f(x) - f(x_0)$ слева и справа от точки x_0.

а) слева: $(x - x_0) < 0$, $f'(c) > 0$ (по условию).
Значит,

$$f(x) - f(x_0) = \oplus \cdot \ominus = \ominus,$$

т.е. $f(x) - f(x_0) < 0$, или $f(x) < f(x_0)$.
б) справа $(x - x_0) > 0$, $f'(c) < 0$ (по условию).
Значит,

$$f(x) - f(x_0) = \ominus \cdot \oplus = \ominus,$$

т.е. $f(x) - f(x_0) < 0$, или $f(x) < f(x_0)$.
Итак, слева и справа от точки x_0 значения функции меньше, чем в точке x_0, поэтому значение функции в этой точке является наибольшим значением функции в рассматриваемой окрестности, т.е. в точке max.

Схема исследования функции $y = f(x)$ на экстремум

1) Находим область определения функции с целью выявления точек разрыва.

2) Находим первую производную функции $y'(x)$ и из условий: $y' = 0$; $y' = \infty$, y' не существует, находим координаты критических точек (точек возможного экстремума функции).

3) Наносим критические точки и точки разрыва функции (если они есть) на числовую прямую и определяем знак первой производной $y'(x)$ в окрестности каждой критической точки (строим график знаков первой производной). При этом определятся интервалы возрастания и убывания функции.

4) Делаем вывод о наличии экстремума в каждой критической точке по смене знака первой производной.

5) Вычисляем значение функции в критических точках и наносим их на координатную плоскость и указываем характер поведения функции (вид экстремума).

Примеры. Исследовать функции на экстремум.

- **1**. $y = (1 - x^2)^3$.

1) Область определения функции $D(y): x \in (-\infty;\ +\infty)$.

2) Находим первую производную:

$$y' = [(1 - x^2)^3]' = 3 \cdot (1 - x^2)^2 \cdot (-2x) = -6x(1 - x^2)^2.$$

Находим критические точки:

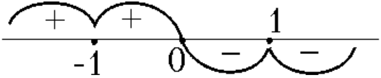
$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad -6x(1 - x^2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -1.$$

Точек, в которых $y'(x)$ не существует, нет.

3) Наносим точки $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$ на числовую прямую и определяем знак $y'(x)$ в окрестностях этих точек:

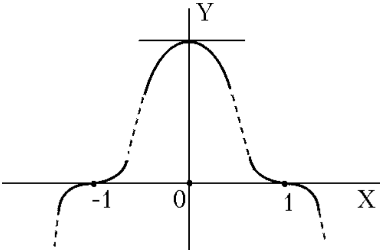
$$\begin{array}{lll} x = -1: & \text{слева}: \ y'(-2) = \oplus, & \text{справа}: \ y'(-1/2) = \oplus \\ x = 0: & \text{слева}: \ y'(-1/2) = \oplus, & \text{справа}: \ y'(+1/2) = \ominus \\ x = 1: & \text{слева}: \ y'(+1/2) = \ominus, & \text{справа}: \ y'(+2) = \ominus. \end{array}$$

Строим график знаков первой производной:



4) Выводы: При переходе через точку $x = 0$ производная сменила знак с $\oplus$ на $\ominus$, поэтому в точке $x = 0 - \max$.
В окрестности точек $x = -1$ и $x = 1$ знак производной не изменился, т.е. в этих точках экстремума нет.
Интервал возрастания функции: $x \in (-\infty;\ 0)$.
Интервал убывания функции: $x \in (0;\ +\infty)$.
5) Вычисляем значение функции во всех критических точках:

$$y(-1) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0$$



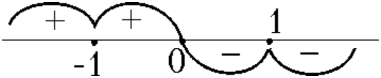
и наносим эти точки на координатную плоскость. Поскольку производная в критических точках $y' = 0$, касательная к графику функции проходит горизонтально и в точке $x = 0$ экстремум «гладкий».

- **2**. $y = x^3 \cdot e^x$.

1) $D(y) : x \in (-\infty;\ +\infty)$.
2) Находим первую производную:
$y' = 3x^2 \cdot e^x + x^3 \cdot e^x = x^2 \cdot e^x \cdot (x+3)$.
Определяем критические точки:
$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 \cdot e^x \cdot (x+3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0, \quad x_2 = -3.$
Точек, в которых $y'(x)$ не существует, нет.
3) Наносим точки $x_1 = 0$, $x_2 = -3$ на числовую прямую и определяем знак $y'(x)$ в окрестностях этих точек:

$$\begin{array}{lll} x = -3: & \text{слева}: \ y'(-4) = \ominus, & \text{справа}: \ y'(-2) = \oplus, \\ x = 0: & \text{слева}: \ y'(-1) = \oplus, & \text{справа;} \ y'(+1) = \oplus. \end{array}$$

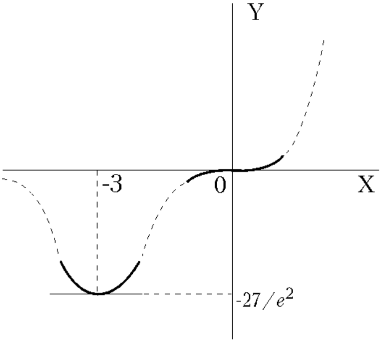
Строим график знаков первой производной:



4) Выводы: При переходе через точку $x=-3$ производная сменила знак с $\ominus$ на $\oplus$, поэтому в точке $x=-3$ – min.
В окрестности точки $x=0$ знак производной не изменился, т.е. в этой точке экстремума нет.
Интервал возрастания функции: $x \in (0;\ +\infty)$.
Интервал убывания функции: $x \in (-\infty;\ 0)$.
5) Вычисляем значение функции во всех критических точках:

$$y(-3)=\frac{-27}{e^3}\approx -1,4, \qquad y(0)=0$$

и наносим эти точки на координатную плоскость. Поскольку производная в критических точках $y'=0$, касательная к графику функции проходит горизонтально и в точке $x=-3$ экстремум «гладкий».



- **3**. $y = 3(x-1)^3 \cdot \sqrt[3]{x^2}$.

1) $D(y) : x \in (-\infty;\ +\infty)$.

2) Находим первую производную: $[3(x-1)^3 \sqrt[3]{x^2}]' =$

$$= 3\left[3(x-1)^2 \sqrt[3]{x^2} + (x-1)^3 \frac{2}{3} x^{-1/3}\right] = 3(x-1)^2 \left[\frac{9\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{x} + 2(x-1)}{3\sqrt[3]{x}}\right] =$$

$$= 3(x-1)^2 \frac{9x + 2x - 2}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{(11x-2)(x-1)^2}{\sqrt[3]{x}}.$$

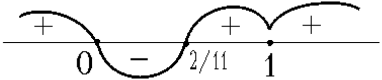
Находим критические точки.

$y' = 0 \ \Rightarrow \ (11x-2)(x-1)^2 = 0 \ \Rightarrow \ x_1 = 2/11,\ x_2 = 1.$

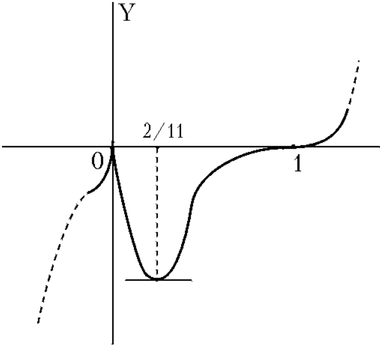
$y' = \infty \quad \Rightarrow \quad x_3 = 0.$

3) Наносим критические точки на числовую прямую и определяем знак $y'(x)$ в окрестностях этих точек:

$x = 0:$	слева : $y'(-1) = \oplus$,	справа : $y'(1/11) = \ominus$,
$x = 2/11:$	слева : $y'(1/11) = \ominus$,	справа : $y'(3/11) = \oplus$,
$x = 1:$	слева : $y'(3/11) = \oplus$,	справа : $y'(+2) = \oplus$.



4) Выводы: При переходе через точку $x = 0$ производная сменила знак с $\oplus$ на $\ominus$, поэтому в точке $x = 0 - \max$.
При переходе через точку $x = 2/11$ производная сменила знак с $\ominus$ на $\oplus$, поэтому в точке $x = 2/11 - \min$.
В окрестности точки $x = 1$ знак производной не изменился, значит, в этой точке экстремума нет. Интервалы возрастания функции: $x \in (-\infty;\ 0) \cup (2/11; \infty)$. Интервал убывания функции: $x \in (0; 2/11)$:
5) Вычисляем значение функции во всех критических точках:
$y(0) = 0, \quad y(2/11) \approx -0.5, \quad y(1) = 0$
и наносим эти точки на координатную плоскость. Поскольку производная в критических точках $y'(2/11) = y'(1) = 0$, касательная к графику функции проходит горизонтально и в точке $x = 2/11$ экстремум «гладкий». В точке $x = 0$ производная $y' = \infty$ и максимум имеет пикообразный характер.



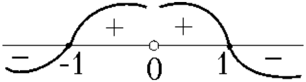
- **4**. $y = \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x^3}$.

1) $D(y) : x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2) Находим критические точки: $y' = -\dfrac{3}{x^2} + \dfrac{3}{x^4} = \dfrac{3(1-x^2)}{x^4}$.

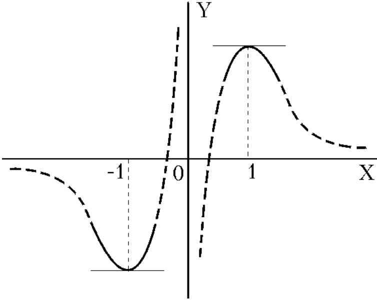
$y' = 0 \;\Rightarrow\; (1-x^2) = 0 \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \pm 1$.
$y' = \infty \;\Rightarrow\; x^4 = 0 \;\Rightarrow\; x_3 = 0 \notin D(y)$.

3) График знаков производной:



4) Выводы: в точке $x_1 = 1$ — max, в точке $x_2 = -1 -$ min. Причем оба экстремума «гладкие», так как $y'(\pm 1) = 0$. В точке $x_3 = 0$ экстремума нет, это точка разрыва. Функция возрастает в интервале $x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$. Функция убывает в интервале $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

5) Значение функции в точках: $y(1) = 2$, $y(-1) = -2$.



- **5**. $y = x \cdot \ln x + x$.

1) $D(y): x \in (0;\ +\infty)$.

Вычислим предел функции в граничной точке области определения $x = 0$:

$$\lim_{x\to+0}(x\ln x + x) = \lim_{x\to+0}\left(\frac{\ln x}{1/x} + 0\right) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+0}\frac{(\ln x)'}{(1/x)'} =$$

$$= \lim_{x\to+0}\frac{1/x}{(-1/x^2)} = \lim_{x\to+0}\frac{-x^2}{x} = \lim_{x\to+0}(-x) = 0.$$

2) Находим критические точки:

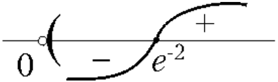
$y' = (x\ln x + x)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} + 1 = \ln x + 2.$

$y' = 0 \ \Rightarrow\ \ln x + 2 = 0 \ \Rightarrow\ \ln x = -2 \ \Rightarrow\ x_1 = e^{-2}.$

$y' = \infty \ \Rightarrow\ \ln x = \infty \ \Rightarrow\ x_2 = 0 \notin D(y).$

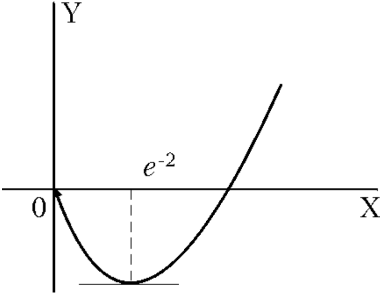
Предел производной в граничной точке области определения равен бесконечности.

3) График знаков производной:



4) Выводы: в точке $x_1 = e^{-2}$ — «гладкий» min, в точке $x_2 = 0$ экстремума нет. График функции подходит к этой точке очень круто. Функция возрастает в интервале $x \in (1/e^2;\ +\infty)$. Функция убывает в интервале $x \in (0;\ 1/e^2)$.

5) Значение функции в критической точке $y(e^{-2}) \approx -0,135$.



Наибольшее и наименьшее значения функции на интервале

Согласно теореме Вейерштрасса, непрерывная в замкнутом промежутке функция достигает в нем своего наибольшего и наименьшего значений. Наибольшим (наименьшим) значением может являться значение функции в одной из точек max (min) в этом промежутке или значение функции на концах промежутка. Поэтому для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции в интервале необходимо найти точки экстремума функции, принадлежащие этому интервалу, и сравнить значения функции в этих точках и на концах промежутка.

Задача. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2\sin x - \sin 2x$ в интервале $[\,0;\ \dfrac{3\pi}{2}\,]$.

Решение.

1) Находим критические точки функции

$y' = (2\sin x - \sin 2x)' = 2\cos x - 2\cos 2x = 2(\cos x + 1 - 2\cos^2 x)$.

$$y' = 0 \;\text{ при }\; \begin{array}{l} \cos x = 1 \quad \to \; x = 2\pi n \\ \cos x = -1/2 \quad \to \; x = \pm 2\pi/3 + 2\pi n. \end{array}$$

2) В данный нам промежуток входят только точки:

$x = 0, \quad x = 2\pi/3, \quad x = 4\pi/3.$

3) Вычисляем значения функции $y = 2\sin x - \sin 2x$ в критических точках и на концах промежутка

$y(0) = 0, \quad y(2\pi/3) \approx 2.58, \quad y(4\pi/3) \approx -2.58 \quad y(3\pi/2) = -2.$

Сравнивая полученные значения, получаем:

$y(2\pi/3) \approx 2.58$ – наибольшее значение функции,

$y(4\pi/3) \approx -2.58$ – наименьшее значение функции в интервале.

Выпуклость, вогнутость кривой. Точки перегиба
Понятия выпуклости, вогнутости кривой

Определение

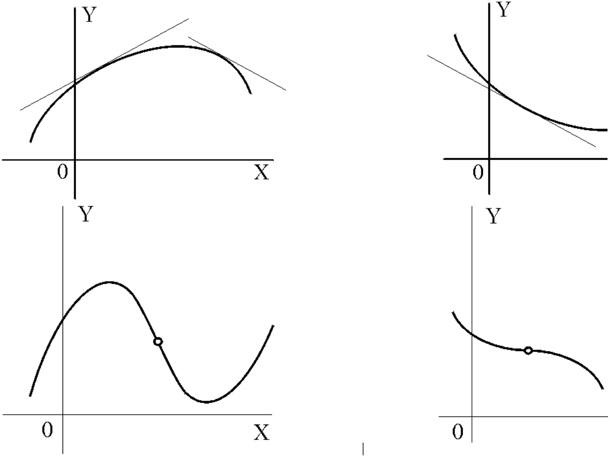
Кривая называется в ы п у к л о й в интервале, если все ее точки лежат ниже любой касательной, проведенной к этой кривой в данном интервале.

Определение

Кривая называется в о г н у т о й в интервале, если все ее точки лежат выше любой касательной, проведенной к этой кривой в данном интервале.

Определение

Точки на кривой, разделяющие участки выпуклости и вогнутости, называются точками перегиба.



Если информацию об интервалах возрастания и убывания функции, наличии точек экстремума мы получаем из первой производной функции, то информацию об интервалах выпуклости, вогнутости и точках перегиба можно получить только из второй производной функции.

Достаточные условия выпуклости и вогнутости

Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в интервале $[a; b]$, тогда:

если вторая производная функции $y''(x) < 0 \ \ \forall x \in [a; b]$, то линия, являющаяся графиком функции $y = f(x)$, *выпукла* в данном интервале,

если вторая производная функции $y''(x) > 0 \ \ \forall x \in [a; b]$, то линия, являющаяся графиком функции $y = f(x)$, *вогнута* в данном интервале.

Доказательство проведем для случая выпуклости кривой. Это значит, что во всем интервале $f''(x) < 0$.

По определению, все точки кривой должны лежать ниже точек касательной, проведенной к кривой в интервале. Можно записать

$$y_{\text{касат.}} = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0), \quad y_{\text{кривой}} = f(x).$$

Составим разность $y_{\text{кривой}} - y_{\text{касат.}}$ и определим знак этой разности:

$$y_{\text{кривой}} - y_{\text{касат.}} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot (x - x_0) =$$

$$= f'(c_1) \cdot (x - x_0) - f'(x_0) \cdot (x - x_0) =$$

Для разности $f(x) - f(x_0)$ мы применили формулу конечных приращений. Значение $c_1 \in [x_0; x]$. Далее

$$= f'(c_1) \cdot (x - x_0) - f'(x_0) \cdot (x - x_0) = [f'(c_1) - f'(x_0)] \cdot (x - x_0) =$$

$$= f''(c_2) \cdot (c_1 - x_0) \cdot (x - x_0).$$

Для разности $[f'(c_1) - f'(x_0)]$ мы также применили формулу конечных приращений. Значение $c_2 \in [_1; x_0]$. Итак, $y_{\text{кривой}} - y_{\text{касат.}} = f''(c_2) \cdot (c_1 - x_0) \cdot (x - x_0)$.

Рассмотрим знак этой разности слева и справа от точки x_0.
а) слева: $(x - x_0) < 0$, $(c_1 - x_0) < 0$, $f''(c_2) < 0$,

$$y_{\text{кривой}} - y_{\text{касат.}} = \ominus \cdot \ominus \cdot \ominus = \ominus.$$

Это значит, что $y_{\text{кривой}} < y_{\text{касат.}}$.
б) справа: $(x - x_0) > 0$, $(c_1 - x_0) > 0$, $f''(c_2) < 0$,

$$y_{\text{кривой}} - y_{\text{касат.}} = \oplus \cdot \oplus \cdot \ominus = \ominus.$$

Это значит, что $y_{\text{кривой}} < y_{\text{касат.}}$.
Итак, слева и справа от точки x_0 выполняется неравенство

$$y_{\text{кривой}} < y_{\text{касат.}},$$

т.е. точки кривой лежат ниже точек касательной и, согласно определению, кривая выпукла.

Необходимые и достаточные условия существования точек перегиба

Теорема 8

Для того чтобы точка с абсциссой x_0 являлась точкой перегиба графика функции $y = f(x)$
необходимо, *чтобы вторая производная функции в этой точке $y''(x_0) = 0$ либо $y''(x_0) = \infty$, либо $y''(x_0)$ не существовала;*
достаточно, *чтобы вторая производная функции при переходе через эту точку меняла свой знак.*

Схема нахождения точек перегиба

1) Находим область определения функции $D(y)$.
2) Находим первую и следом вторую производные функции и из условий $y''(x_0) = 0$, $y''(x_0) = \infty$, $y''(x_0)$ не существует определяем абсциссы точек возможного перегиба.
3) Наносим абсциссы полученных точек и точек разрыва функции (если они есть) на числовую ось и определяем знак второй производной в окрестностях каждой из этих точек.
4) По смене знака второй производной делаем вывод о наличии или отсутствии перегиба в отмеченных точках.
5) Вычисляем значения функции в отмеченных точках.

Замечание

Параллельно отысканию точек перегиба по знаку второй производной определяем интервалы выпуклости и вогнутости кривой $y = f(x)$.

Замечание

Точки, в которых функция терпит разрыв, или граничные точки области определения не могут являться точками перегиба.

Замечание

Само по себе определение интервалов выпуклости и вогнутости без других исследований не может дать представления о графике функции, так как кривая может быть выпуклой или вогнутой, но при этом быть либо возрастающей, либо убывающей. Также и возрастание и убывание функции нельзя точно показать на графике, не зная как, выпукло или вогнуто ведет себя при этом кривая.

Примеры. Найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции и точки перегиба.

- **1**. $y = \dfrac{x}{x^2+4}$.

1) Область определения функции $D(y): x \in (-\infty;\ +\infty)$.

2) $y' = \dfrac{(x^2+4) - x\cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \dfrac{4-x^2}{(x^2+4)^2}$.

$$y'' = \left(\frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}\right) = \frac{-2x(x^2+4)^2 - (4-x^2)2(x^2+4)2x}{(x^2+4)^4} =$$

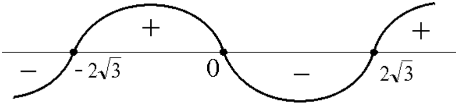
$$= \frac{-2x(x^2+4) - 4x(4-x^2)}{(x^2+4)^3} = \frac{2x^3-24x}{(x^2+4)^3} = \frac{2x(x^2-12)}{(x^2+4)^3}.$$

$y'' = 0 \ \Rightarrow\ x_1 = 0,\ \ x_2 = +\sqrt{12} = 2\sqrt{3},\ x_3 = -2\sqrt{3}$.

Точек, в которых $y'' = \infty$, нет.

3) Наносим точки $x_1,\ x_2,\ x_3$ на числовую прямую и определяем знак второй производной в окрестности каждой из них, так же, как мы делали это при исследовании на экстремум.

Строим график знаков y'':



4) Выводы: при переходе через каждую из отмеченных точек вторая производная сменила знак, т.е. изменился характер поведения функции с выпуклости на вогнутость и наоборот.
Точки с абсциссами $x_1 = 0$, $x_2 = 2\sqrt{3}$, $x_3 = -2\sqrt{3}$ являются точками перегиба.
Интервалы выпуклости графика: $x \in (-\infty;\ -2\sqrt{3}) \cup (0;\ 2\sqrt{3})$.
Интервалы вогнутости графика: $x \in (-2\sqrt{3};\ 0) \cup (2\sqrt{3};\ +\infty)$.
5) Находим ординаты точек перегиба:

$$y(0) = 0; \quad y(2\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{8} \approx 0.2; \qquad y(-2\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{8} \approx -0.2.$$

- **2**. $y = \ln \dfrac{x+1}{x+2}$.

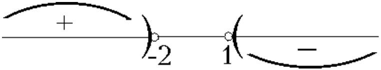
1) $D(y):\ x \in (-\infty;\ -2) \cup (-1;\ +\infty)$.

2) $y' = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}, \qquad y'' = \dfrac{-(2x+3)}{(x+1)^2(x+2)^2}$.

$y'' = 0$ при $x_1 = -3/2 \notin D(y)$,

$y'' = \infty$: при $x_2 = -1 \notin D(y), \quad x_3 = -2 \notin D(y)$.

3) Таким образом, график функции не имеет точек перегиба. Для определения интервалов выпуклости и вогнутости нанесем на числовую прямую граничные точки области определения. Строим график знаков y'':



4) Интервал выпуклости: $x \in (-1;\ +\infty)$.

Интервал вогнутости: $x \in (-\infty;\ -2)$.

Вторая производная функции используется не только для нахождения интервалов выпуклости и вогнутости кривой и точек перегиба, но и для определения экстремума функции.

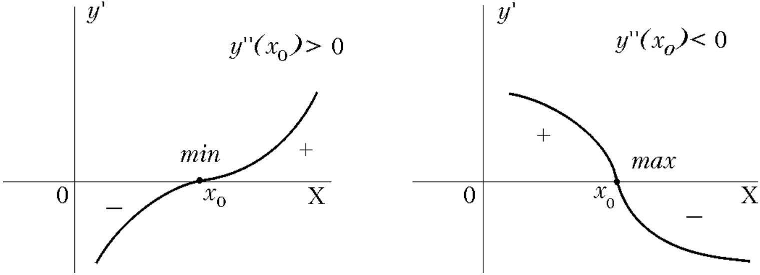
Второе достаточное условие экстремума

Пусть $f(x)$ – функция, непрерывная вместе со своими производными 1-го и 2-го порядка в окрестности точки x_0. Тогда имеет место следующий признак существования экстремума.

> Если в точке x_0 $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) \neq 0$,
> то точка x_0 есть точка экстремума функции.
> При этом:
> если $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка максимума;
> если $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка минимума.

Действительно, если $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) \neq 0$, т.е. либо $f''(x_0) > 0$, либо $f''(x_0) < 0$. Так как знаки неравенств строгие, вторая производная сохраняет свой знак и в окрестности критической точки. Это значит, что первая производная является возрастающей или убывающей функцией, и при этом при переходе через критическую точку меняет свой знак.

А это обстоятельство, согласно первому достаточному условию, является признаком обязательного наличия экстремума в критической точке.



Замечание

Отметим, что использовать указанное условие можно только в случае, если в критической точке первая производная равна нулю, а вторая производная не равна нулю. В других ситуациях этот признак не работает.

Применение второго достаточного условия экстремума удобно при решении смысловых задач физики и геометрии.

Задачи на экстремум

Отметим, что при решении таких задач нужно по условию задачи составить аналитическое выражение для функции, с помощью которой одна величина выражается через другую, а затем исследовать эту функцию на экстремум.

Задача 1. Реакционный аппарат имеет форму закрытого цилиндра. Найти радиуса основания цилиндра так, чтобы при заданном объеме V на его изготовление ушло минимальное количество материала.

Решение. Пусть R – радиус основания, H – высота цилиндра.

Тогда объем $V = S_{\text{осн.}} \cdot H = \pi R^2 H$.

При изготовлении аппарата материал расходуется на образование стенок (боковой поверхности цилиндра) и двух оснований: верхнего и нижнего. Запишем выражение для полной поверхности такого цилиндра

$$F_{\text{полн.}} = 2\pi RH + 2\pi R^2 = 2\pi(R^2 + RH).$$

Мы получили выражение, содержащее две неизвестных величины. Исключим одну из них, например H, используя формулу для объема

$$H = \frac{V}{\pi R^2}. \quad \text{Тогда} \quad F_{\text{полн.}} = 2\pi\left(R^2 + R\frac{V}{\pi R^2}\right) = 2\pi R^2 + \frac{2V}{R}.$$

Полная поверхность, таким образом, есть функция только одной переменной R, так как величина V задана. Из условия равенства нулю производной этой функции мы определим, какой радиус соответствует минимальной полной поверхности, а значит, и минимальному расходу материала на изготовление аппарата. Итак,

$$F'_{\text{полн.}} = 4\pi R - \frac{2V}{R^2} = 0 \;\Rightarrow\; 2\pi R^3 = V \;\Rightarrow\; R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Высота цилиндра найдется из соотношения

$$2\pi R^3 = V = \pi R^2 H \quad \Rightarrow \quad H = 2R.$$

Вторая производная функции $F_{\text{полн.}}$:

$F'' = 4\pi + \dfrac{4V}{R^3} > 0,$ так как $R > 0$ и $V > 0$,

поэтому полученное значение R соответствует наименьшей полной поверхности а, значит, и наименьшему расходу материала.

Задача 2 (Нахождение максимальной скорости окисления окиси азота)

Газовая смесь состоит из окиси азота и кислорода. Требуется найти концентрацию кислорода, при которой содержащаяся в смеси окись азота окисляется с максимальной скоростью.

Решение. Известно, что в условиях практической необратимости скорость реакции окисления

$$2NO + O_2 = 2NO_2$$

выражается формулой $v = kx^2y$, где x – концентрация NO, y – концентрация O_2, k – константа.

Скорость реакции записана как функция двух переменных: x и y. Необходимо исключить одну из них, выразив x через y или наоборот. Ясно, что если суммарная концентрация реагирующих веществ равна 100%, т.е. $x + y = 100$, то концентрация кислорода равна $y = 100 - x$. Тогда скорость реакции

$v = kx^2y \quad \Rightarrow \quad v = kx^2 \cdot (100 - x) = k(100x^2 - x^3)$.

Найдем первую производную и приравняем ее к нулю:

$v' = k(200x - 3x^2) = 0, \quad v' = kx(200 - 3x)$.

Отсюда получаем два значения: $x_1 = 0, x_2 = 200/3 = 66{,}7$.

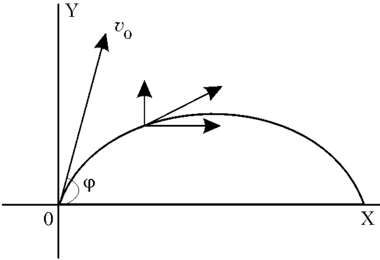
Чтобы определить, какое из полученных значений x соответствует максимальной скорости окисления, найдем вторую производную и определим ее знак при каждом значении x:

$$v'' = k(200 - 6x).$$

Очевидно, что при $x_1 = 0$ $v'' > 0$, а при $x_2 = 66{,}7$ $v'' < 0$. Поэтому максимальная скорость окисления соответствует концентрации окиси азота, равной 66,7 %, а кислорода соответственно 33,3 %. Отношение концентраций $y : x = 1 : 2$.

Задача 3. С начальной скоростью v_0 под углом φ к горизонту выпущено ядро. При каком угле φ дальность полета S будет наибольшей (сопротивлением воздуха пренебречь).

Разложим движение тела на две составляющие: вертикальную с начальной скоростью $v_{oy} = v_0 \sin\varphi$ и горизонтальную $v_{ox} = v_0 \cos\varphi$. Горизонтальное движение является равномерным, так как сопротивлением воздуха мы пренебрегаем, и поэтому путь, который пролетит ядро $S = v_{ox} T$, где T – полное время полета ядра.



Вертикальное движение подчиняется закону равноускоренного движения. Во время подъема $v_y = v_{oy} - gt$.
В наивысшей точке вертикальная компонента скорости равна нулю и этому моменту соответствует время $t = v_{oy} g$.
Столько же времени тело будет падать, поэтому полное время полета $T = 2v_{oy}/g$.
Следовательно, расстояние, которое пролетит ядро

$$S = v_{ox} T = v_{ox} \frac{2v_{oy}}{g} = v_0 \cos\varphi \frac{2v_0 \sin\varphi}{g} = \frac{v_0^2}{g} 2\sin\varphi \cdot \cos\varphi = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\varphi.$$

Мы получили функцию $S(\varphi)$. Исследуем ее на экстремум:

$$S'(\varphi) = \frac{v_0^2}{g} 2\cos 2\varphi = 0, \qquad 2\varphi = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Покажем, что полученное значение угла соответствует максимальной дальности полета. Найдем вторую производную и определим ее знак при $\varphi = \pi/4$.

$$S''(\varphi) = -\frac{v_0^2}{g} 4\sin 2\varphi \quad S''(\pi/4) = -\frac{v_0^2}{g} 4\sin(\pi/2) = -4\frac{v_0^2}{g} < 0.$$

Ответ: наибольшее расстояние ядро пролетит, если будет пущено под углом 45° к горизонту.

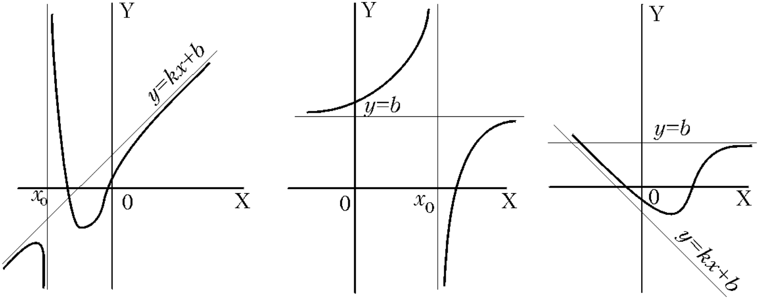
Асимптоты

Определение

Прямая называется **асимптотой** *данной кривой, если расстояние от текущей точки кривой до прямой стремится к нулю при удалении точки по кривой в бесконечность.*

Асимптоты делятся на два типа:

1. Вертикальные асимптоты (a).
2. Наклонные асимптоты (b, c) (частным случаем наклонных являются горизонтальные асимптоты (d, e)).



Нахождение вертикальных асимптот

Определение

Вертикальная прямая $x = x_0$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов функции равен бесконечности:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \pm\infty \quad \text{или} \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \pm\infty.$$

Эта ситуация возможна, если точка x_0 является либо точкой бесконечного разрыва функции (точкой разрыва 2-го рода) либо граничной точкой области определения, в которой функция обращается в бесконечность.

Схема нахождения вертикальной асимптоты:

1. Находим область определения функции.
2. Если точка x_0 является точкой разрыва функции или граничной точкой области определения, то находим односторонние пределы функции при $x \to x_0 - 0$ и $x \to x_0 + 0$.
3. Если хотя бы один из односторонних пределов окажется равным бесконечности, то прямая $x = x_0$ является вертикальной асимптотой графика функции.

Схема нахождения наклонной асимптоты

Предположим, что уравнение $y = kx + b$ является уравнением наклонной асимптоты графика функции $y = f(x)$. Получим формулы для нахождения параметров k и b.

Поскольку по определению асимптоты расстояние произвольной точки кривой до асимптоты стремится к нулю при удалении точки по кривой в бесконечность, то можно записать

$$\lim_{x\to\infty} |f(x) - (kx + b)| = 0.$$

Здесь $f(x)$ есть ордината графика функции, а $(kx + b)$ – ордината касательной. Преобразуем это выражение:

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right) = 0.$$

Очевидно, что выражение в скобках должно равняться нулю, кроме того,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{b}{x} = 0.$$

Итак, остается

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - k\right) = 0.$$

Откуда получаем выражение для определения параметра k

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Тогда из выражения $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - kx - b] = 0$ находим

$$b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - kx].$$

В ряде случаев предел функции зависит от того, к $+\infty$ или к $-\infty$ стремится x, поэтому различают правую и левую наклонную асимптоты.

Для левой асимптоты	Для правой асимптоты
$k = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$,	$k = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$,
$b = \lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - kx]$,	$b = \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - kx]$.

Заметим, что сначала находят угловой коэффициент k наклонной асимптоты, а затем свободный член b. Если хотя бы один из этих параметров окажется равным бесконечности или не будет существовать, то делается вывод об отсутствии соответствующей наклонной асимптоты.

Если угловой коэффициент $k = 0$, то возможно существование *горизонтальной* асимптоты, уравнение которой

$$y = b, \quad \text{причем} \quad b = \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

Замечание. *В тех случаях, когда предел не зависит от того, стремится x к $(+\infty)$ или к $(-\infty)$, получаем одну наклонную асимптоту*

$$y = kx + b, \quad k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx].$$

Примеры. Найти все асимптоты графиков функций.

- **1**. $y = \dfrac{3x^2 + x + 2}{x - 4}$.

а) Ищем вертикальные асимптоты. В область определения функции не входит точка $x = 4$: $D(y) : x \in (-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$.
Исследуем характер разрыва функции в точке $x = 4$. Для этого найдем односторонние пределы

$$\lim_{x\to4-0} \frac{3x^2 + x + 2}{x - 4} = \frac{48 + 4 + 2}{4 - 0 - 4} = \frac{54}{-0} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to4+0} \frac{3x^2 + x + 2}{x - 4} = \frac{48 + 4 + 2}{4 + 0 - 4} = \frac{54}{+0} = +\infty.$$

Вывод: в точке $x = 4$ функция терпит бесконечный разрыв и $x = 4$ – уравнение вертикальной асимптоты.

б) Находим уравнение наклонной асимптоты. Пусть $y = kx + b$ есть искомое уравнение асимптоты. Тогда:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2 + x + 2}{(x-4)x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{3x^2 + x + 2}{x-4} - 3x\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 + x + 2 - 3x(x-4)}{x-4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2 + x + 2 - 3x^2 + 12x}{x-4} =$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{13x + 2}{x-4} = 13.$$

Итак, уравнение наклонной асимптоты $y = 3x + 13$.

Рассмотрим примеры, в которых следует различать левые и правые асимптоты.

- **2**. $y = \sqrt{x^2+1}$.

а) Вертикальных асимптот нет, т.к. $D(y):\ x \in (-\infty;\ +\infty)$.

б) Наклонные асимптоты $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = |1 \lim_{x\to\pm\infty} \frac{|\,x\,|}{x} = \begin{cases} -1, & x \to -\infty \\ +1, & x \to +\infty. \end{cases}$$

Так как угловой коэффициент предполагаемой наклонной асимптоты различен для $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$, находим отдельно.
Для *левой* асимптоты:

$$b = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+1} + x\right) = (\infty - \infty) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}-x} = \frac{x^2+1-x^2}{-x-x} = 0.$$

Так как $k = -1$, $b = 0$, то уравнение левой наклонной асимптоты $y = -x$.

Для *правой* наклонной асимптоты:

$$b = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - kx] = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = (\infty - \infty) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)}{\sqrt{x^2+1} + x} = \frac{x^2+1-x^2}{x+x} = 0.$$

Так как $k = +1$, $b = 0$, то уравнение левой наклонной асимптоты $y = x$.

- **3**. $y = 3x - \operatorname{arctg} 2x$.

а) Вертикальных асимптот нет, т.к. область определения функции $D(y) : x \in (-\infty;\ +\infty)$.

б) Находим параметры наклонных асимптот:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x - \operatorname{arctg} 2x}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(3 - \frac{\operatorname{arctg} 2x}{x}\right) = 3,$$

так как $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{x} = \dfrac{\pm\pi/2}{\pm\infty} = 0,$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - kx] = \lim_{x\to\pm\infty}(3x - \operatorname{arctg} 2x - 3x) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}(-\operatorname{arctg} 2x) = \lim_{x\to\pm\infty} -\operatorname{arctg}(\pm\infty) = -(\pm\pi/2) = \mp\pi/2.$$

Так как $k = 3$, $b = \mp\pi/2$, то уравнения наклонных асимптот левой $y = 3x + \pi/2$, правой $y = 3x - \pi/2$.

Схема полного исследования функции

1. Область определения функции.

Фиксируем множество значений x, при которых выражение, определяющее функцию, имеет смысл.

а) Вертикальные асимптоты

Прямая $x = x_0$ есть вертикальная асимптота графика функции, если точка $x = x_0$ является точкой бесконечного разрыва функции, т.е. если хотя бы один из односторонних пределов

$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \pm\infty$ или

$\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \pm\infty$.

б) Наклонные

Если существуют пределы

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ и

$\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - kx] = b$,

то прямая $y = kx + b$ есть левая наклонная асимптота. графика функции.

Аналогичные пределы при $x \to +\infty$ определяют параметры правой наклонной асимптоты.

3. Интервалы монотонности. Экстремум.

Функция возрастает (убывает) в интервале, в котором $y' > 0$ $(y' < 0)$.

Условия $\begin{cases} y'(x) = 0 \\ y'(x) = \infty, \end{cases}$ где $x \in D(y)$, определяют критические точки (точки возможного экстремума).

Функция имеет в критической точке максимум (минимум), если $y'(x)$ при переходе через эту точку слева направо меняет свой знак с $\oplus$ на $\ominus$ (с $\ominus$ на $\oplus$).

4. Интервалы выпуклости, вогнутости. Точки перегиба

Кривая вогнута в интервале, в котором $y'' > 0$.

Кривая выпукла в интервале, в котором $y'' < 0$.

Условия $\begin{cases} y''(x) = 0 \\ y''(x) = \infty, \end{cases}$ где $x \in D(y)$, определяют точки возможного перегиба.

График функции имеет в точке перегиб, если $y''(x)$ при переходе через эту точку меняет свой знак.

5. Простейшие свойства функции: четность, нечетность, периодичность, нули функции и т.п.

Примеры. Провести полное исследование и построить графики функций.

- **1**. $y = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$.

1) $D(y)$: очевидно, что функция терпит разрыв в точках $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$: $D(y) : x \in (-\infty;\ -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3};\ \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3};\ +\infty)$.
2) Асимптоты.
а) Вертикальные.
Исследуем характер разрывов. Найдем односторонние пределы, для чего перепишем функцию в виде $y = x^3/(\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x)$:

$$\lim_{x \to -\sqrt{3}-0} \frac{x^3}{(\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x)} = \lim_{x \to -\sqrt{3}-0} \frac{-3\sqrt{3}}{(2\sqrt{3}) \cdot (-0)} = +\infty.$$

$$\lim_{x \to -\sqrt{3}+0} \frac{x^3}{(\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x)} = \lim_{x \to -\sqrt{3}+0} \frac{-3\sqrt{3}}{(2\sqrt{3}) \cdot (+0)} = -\infty.$$

$$\lim_{x \to \sqrt{3}-0} \frac{x^3}{(\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x)} = \lim_{x \to \sqrt{3}-0} \frac{3\sqrt{3}}{(+0) \cdot (2\sqrt{3})} = +\infty.$$

$$\lim_{x \to \sqrt{3}+0} \frac{x^3}{(\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x)} = \lim_{x \to \sqrt{3}+0} \frac{3\sqrt{3}}{(-0) \cdot (2\sqrt{3})} = -\infty.$$

В точках $x = \pm\sqrt{3}$ функция терпит бесконечный разрыв, поэтому прямые $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$ – вертикальные асимптоты.
б) Наклонные асимптоты $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{(3-x^2)\cdot x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{-x^3} = -1.$$

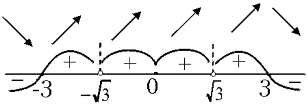
$$b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{3-x^2} + x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + 3x - x^3}{3 - x^2} = 0.$$

Уравнение наклонной асимптоты $y = -x$.
3) Экстремум:

$$y' = \left(\frac{x^3}{3-x^2}\right)' = \frac{3x^2(3-x^2) - x^3(-2x)}{(3-x^2)^2} = \frac{-x^2(x^2-9)}{(3-x^2)^2}.$$

$y' = 0$ при $x_1 = 0$, $x_2 = \pm 3$, $y' = \infty$ при $x = \pm\sqrt{3} \notin D(y)$.

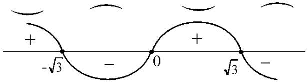
График знаков y':



В точке $x_1 = 0$ экстремума нет, в точке $x_2 = -3$ – «гладкий» min, в точке $x_3 = 3$ – «гладкий» max (рис. *a*).
Значения функции в точках: $y(0) = 0$, $y(-3) = 4{,}5$; $y(3) = -4{,}5$.

4) Точки перегиба: $y'' = \left(\dfrac{-x^2(x^2-9)}{(3-x^2)^2}\right)' = \dfrac{6x(x^2+9)}{(3-x^2)^3}$.

$y'' = 0$ при $x = 0$, $y'' = \infty$ при $x = \pm\sqrt{3} \notin D(y)$.

График знаков y'': 

точка $x = 0$ являются точкой перегиба.
Значение функции в этой точке $y(0) = 0$.
Точки $x = \pm\sqrt{3}$ не являются точками перегиба, хотя, с формальной стороны, вторая производная меняет в них свой знак. Точки разрыва функции не могут выступать ни в роли экстремальных точек, ни в роли точек перегиба.

5) Отметим, что данная функция является нечетной, и ее график симметричен относительно начала координат: