Введение в анализ функции нескольких переменных

Л.И. Терехина, И.И. Фикс

Функции нескольких переменных

Лекция 1

До сих пор подробно изучалась теория функций одного независимого переменного. В действительности же чаще приходится иметь дело с такими ситуациями, когда изменение одной переменной связано с изменениями одновременно нескольких, не зависящих друг от друга, переменных. Ниже мы рассмотрим понятие функции нескольких переменных, область определения, дифференцирование, экстремум, в основном, для случая двух или трех независимых переменных. Однако эти же понятия можно практически почти слово в слово перенести на случай функции любого числа независимых переменных.

Определение

Если каждой паре $(x; y)$ из множества D по некоторому закону поставлено в соответствие значение переменной z из множества E, то переменную z будем называть функцией двух переменных и обозначать этот факт: $z = f(x; y)$ или $z = z(x; y)$. Множество D называется областью определения, а множество E – областью значений функции.

Функция двух независимых переменных может быть задана как явным $z = f(x; y)$, так и неявным образом $F(x; y; z) = 0$.

Определение

Выражение $F(x; y; z) = 0$ определяет неявную функцию $z = z(x; y)$, если справедливо тождественное равенство $F[x; y; z(x; y)] = 0$. Геометрическим представлением функции двух независимых переменных, т.е. ее графиком, всегда является некоторая поверхность.

Например, графиком функции $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ является верхняя половина сферической поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

Аналогичным образом вводится понятие функции трех, четырех и т. д. независимых переменных. Так, определение функции трех переменных:

Определение

Если каждой тройке $(x; y; z)$ из множества D по некоторому закону поставлено в соответствие значение переменной U из множества E, то переменную U будем называть функцией трех независимых переменных $x; y; z$ и обозначать этот факт: $U = f(x; y; z)$ или $U = f(M)$, где M – это точка в трехмерном пространстве с координатами $M(x; y; z)$. Множество D называется областью определения, а множество E – областью значений функции.

Так, например функция $f = \dfrac{q_1 q_2}{x^2 + y^2 + z^2}$ описывает величину кулоновской силы взаимодействия двух зарядов q_1, q_2, находящихся в вакууме на расстоянии $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ друг от друга.

Определение

При аналитическом способе задания функции, т.е. с помощью некоторого аналитического выражения, под областью определения функции понимают множество всех значений независимых переменных, при которых это выражение имеет смысл.

Для функции 2-х переменных область определения есть множество точек плоскости, ограниченное некоторой замкнутой линией (замкнутая, или закрытая область), или неограниченное (открытая область).

Задача 1.

Найти и графически проиллюстрировать области определения следующих функций:

- 1. $z = \ln(x - y^2 - 4)$.

Логарифмическая функция определена только для положительных значений аргумента, поэтому

$$x - y^2 - 4 > 0 \;\Rightarrow\; y^2 < (x - 4).$$

Область определения данной функции изображена на рис. 1. Граница области (парабола $y^2 = (x - 4)$) не входит в область и изображается пунктирной линией (область незамкнутая).

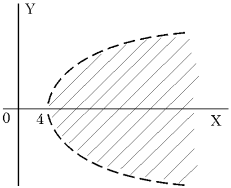

Рис. 1:

- 2. $z = \ln(x+y)$.
Рассуждая аналогично, получим: $y > -x$, т.е. область определения представляет собой часть плоскости, расположенную выше прямой $y = -x$, за исключением точек самой прямой $y = -x$ (рис. 2).

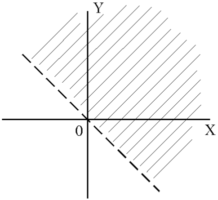

Рис. 2:

- 3. $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$.
Ясно, что функция определена только для неотрицательных значений подкоренного выражения. Следовательно, область определения опишется неравенством

$$16 - x^2 - y^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 \leq 16.$$

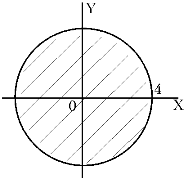

Рис. 3:

Это множество всех точек круга радиуса $r = 4$, включая границу (рис. 3). Область определения является замкнутой.

- 4. $z = \dfrac{1}{\sqrt{(x^2+y^2-1)(9-x^2-y^2)}}$.

а) Дробь определена при всех значениях переменных x и y, при которых знаменатель не обращается в нуль.

б) Подкоренное выражение должно быть строго положительным

$$(x^2+y^2-4)(9-x^2-y^2) > 0.$$

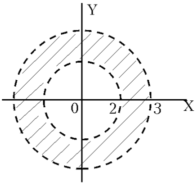

Рис. 4:

Произведение сомножителей положительно в двух случаях

$$1)\ \begin{cases} x^2+y^2-4>0, \\ 9-x^2-y^2>0; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x^2+y^2-4<0, \\ 9-x^2-y^2<0. \end{cases}$$

Первая система неравенств выполняется при условии $4 < x^2+y^2 < 9$, а неравенства второй системы одновременно не выполняются. Таким образом, областью определения служит кольцо $4 < x^2+y^2 < 9$, ограниченное окружностями с центром в начале координат и радиусами 2 и 3. Сами окружности не входят в область определения (рис. 4).

- 5. $z = \arcsin \dfrac{y}{x}$.

Функция $\arcsin(y/x)$ определена для тех значений x, для которых

$$\left|\frac{y}{x}\right| \leq 1 \;\; \Rightarrow \;\; -1 \leq \frac{y}{x} \leq 1, \;\; \Rightarrow \;\; -x \leq y \leq x.$$

Итак, границами области определения являются прямые $y = x$, $y = -x$ (рис. 5). В область определения не входит начало координат, так как в этой точке исходная функция не определена.

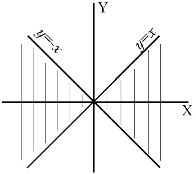

Рис. 5:

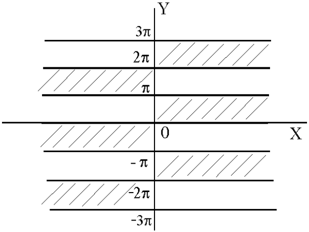

Рис. 6:

- 6. $z = \sqrt{x \cdot \sin y}$.

Для нахождения области определения необходимо решить неравенство $x \cdot \sin y \geq 0$. Оно допускает два решения

$$1) \begin{cases} x \geq 0, \\ \sin y \geq 0, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ 2\pi k \leq y \leq \pi + 2k\pi, \quad k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x \leq 0, \\ \sin y \leq 0, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \leq 0, \\ \pi + 2k\pi \leq y \leq 2\pi + 2k\pi, \quad k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots \end{cases}$$

Область определения состоит из полуполос (рис. 6.)

Функция двух или большего количества независимых переменных, как и функция одной переменной, есть **отображение** области определения функции D на область ее значений E.
Введем понятие графика функции многих переменных.
Геометрическим образом функции n независимых переменных $U = U(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ является множество всех точек $(n+1)$ мерного пространства $(x_1; x_2; \ldots; x_n; U)$, координаты которых удовлетворяют заданному соотношению $U = U(x_1; x_2; \ldots; x_n)$. В частности, геометрическим образом функции двух переменных $z = f(x; y)$ в трехмерном пространстве является поверхность.
Так, $z = x^2 + y^2$ – параболоид вращения,
$z = -\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ – нижняя полусфера,
$z = \sqrt{x}$ – верхняя часть параболического цилиндра.

Пусть функция $z = f(x;y)$ определена в области D и точка $M_0(x_0;y_0)$ – некоторая точка этой области.

Определение

Число A называется пределом функции $z = f(x;y)$ при стремлении точки $M(x;y)$ к точке $M_0(x_0;y_0)$, если для каждого сколь угодно малого числа $\epsilon > 0$ существует соответствующее число $\delta > 0$, что для всех точек M, удовлетворяющих неравенству $0 < |M_0M| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x;y) - A| < \epsilon$.

Этот факт записывается символически

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x;y) = A, \quad \text{или} \quad \lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0).$$

Условие $0 < |M_0M| < \delta$ означает, что точка M принадлежит δ-окрестности точки M_0.

Для функции нескольких переменных понятия бесконечно малой и бесконечно большой величин аналогичны этим же понятиям для функции одной переменной.

Для нахождения предела функции нужно, конечно, убедиться в том, что он существует, т.е. точка M_0 является точкой «сгущения» функции, а затем вычислить предел, подставив в выражение, стоящее под знаком предела, вместо текущих переменных их предельные значения. Так,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to\pi}} \frac{x\cos xy}{x^2-1} = \frac{2\cos 2\pi}{4-1} = \frac{2}{3}.$$

Однако не все так просто. Для функций одной переменной мы имели богатый арсенал приемов раскрытия неопределенностей всех видов. Для функций нескольких переменных чаще всего раскрыть неопределенности вообще не удается. Дело объясняется тем, что для существования предела необходимо, чтобы он не зависел от траектории, по которой точка M приближается к точке M_0. Если же величины пределов зависят от таких траекторий, то это значит лишь то, что предел не существует. Например, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

1) Будем приближаться к началу координат от соседней точки плоскости по лучу $y = kx$. В этом случае

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{kx^2}{x^2(1+k^2)} = \frac{k}{1+k^2}.$$

Величина предела зависит от величины k и изменяется в пределах $(-1/2; 1/2)$. Единого предела нет и, тем самым, предел не существует.

2) Если перейти к полярным координатам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ и приближаться к началу координат по спирали $\rho = k\varphi$, $\varphi \to 0$, $\rho \to 0$, то получим

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{\varphi\to 0} \frac{k^2\rho^2\sin\varphi\cos\varphi}{k^2\rho^2} = \lim_{\varphi\to 0} \sin\varphi\cos\varphi = 0.$$

В данном случае предел оказался не зависящим от k. Но в итоге мы всё равно можем утверждать, что предела нет.

Перейдем к понятию непрерывности функции. Пусть функция $z = f(x; y)$ определена в области D и $M_0(x_0; y_0)$ – некоторая внутренняя точка этой области.

Определение

Функция $z = f(x; y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0; y_0)$, если выполняется условие

$$\lim_{M \to M_0} f(x; y;) = f(x_0; y_0).$$

Определение

Функция $z = f(x; y)$ называется непрерывной в области, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Непрерывность функции в замкнутой области $(\overline{D})$ означает, что она непрерывна во всех точках области, включая и точки ее границы.

Переформулируем определение непрерывности функции на языке «приращений». Для этого
стремление точки $M(x;y)$ к точке $M(x_0;y_0)$ заменим
$x \to x_0, \quad y \to y_0$ или $x - x_0 = \Delta x \to 0, \quad y - y_0 = \Delta y \to 0$,
стремление функции $f(x;y) \to f(x_0;y_0)$ заменим
$\Delta z = f(x;y) - f(x_0;y_0) \to 0$.
Тогда условие непрерывности функции перепишется в виде

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0.$$

Тем самым, определение непрерывности функции можно сформулировать следующим образом (на языке «приращений»).

Определение

Функция $z = f(x; y)$ называется непрерывной в точке, или в области, если в этой точке, или в каждой точке области, бесконечно малым приращениям ее аргументов соответствует бесконечно малое приращение самой функции.

Непрерывность функции в точке требует существования предела функции в этой точке и поэтому функция $xy/(x^2 + y^2)$ не является непрерывной в точке $O(0; 0)$, так как предел функции в этой точке не определен.

- Функция $z - xy - y^3$ непрерывна на всей плоскости XOY, так как в любой точке M плоскости ее приращение

$$\Delta z = [(x + \Delta x)(y + \Delta y) - (y + \Delta y)^3] - [xy - y^3] =$$

$$= xy + x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y - y^3 + 3y^2\Delta y - 3y\Delta^2 y + \Delta^3 y - xy + y^3 =$$

$$= x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y + 3y^2\Delta y - 3y\Delta^2 y + \Delta^3 y \to 0$$

при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

- Функция $z = \dfrac{x + 2y - 1}{x^2 - y}$ будет непрерывной во всех точках,

кроме точек параболы $y = x^2$.

- Функция $z = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 - y^2}}$ будет непрерывной во всех точках,

кроме точек, принадлежащим прямым $y = \pm x$.

Сформулируем свойства непрерывных функций (аналогичные свойствам непрерывных функций одного аргумента).

Теорема

Алгебраическая сумма, произведение и частное непрерывных функций есть функция непрерывная (в случае частного функция, стоящая в знаменателе, не должна обращаться в 0 в предельной точке).

Теорема (Вейерштрасса)

Всякая непрерывная в замкнутой области функция достигает в этой области своего наибольшего и наименьшего значений.

Другими словами, если функция $z = f(x; y)$ непрерывна в замкнутой области $(\overline{D})$, то обязательно найдутся две точки M_1, M_2 внутри области или на ее границе, такие что $f(M_1) = f_{\text{наим}}$, $f(M_2) = f_{\text{наиб.}}$.

Теорема (Коши)

Непрерывная в области функция, переходя от одного своего значения к другому, необходимо пробегает каждое промежуточное значение.

Определение

Функция $z = f(x; y)$ *называется равномерно непрерывной в области* (D), *если для каждого* $\epsilon > 0$ *существует не зависящее от точки* M *число* $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ *такое, что выполняется неравенство* $|f(M) - f(M_0)| < \epsilon$ *для всех пар точек* M *и* M_0 *области, удовлетворяющих условию* $|M_0M| < \delta$.

Теорема (Кантора)

Если в ограниченной замкнутой области $(\overline{D})$ *функция* $f(x; y)$ *непрерывна, то она и равномерно непрерывна в этой области.*