Примеры решений контрольных работ

Л.И. Терехина, И.И. Фикс

- **1**. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $A(4;-1)$

    a) параллельно прямой $x-3y+7=0$;

    b) перпендикулярно прямой $\dfrac{x+2}{-3}=\dfrac{y+1}{2}$;

    c) под углом 45^o к прямой $3y-2=0$.

Построить эти прямые в системе координат. Записать вектор нормали $\vec{N}$, направляющий вектор $\vec{s}$ и угловой коэффициент k для каждой прямой.

Р е ш е н и е

а) Вектор нормали данной прямой $x-3y+7=0$, $\vec{N}=\{1;-3\}$. Так как искомая прямая параллельна данной, то вектор нормали данной может служить и вектором нормали искомой прямой $\vec{N}=\{A;B\}=\{1;-3\}$.

Фиксированная точка на искомой прямой дана $M_0(x_0;y_0)=A(4;-1)$.

Воспользуемся уравнением прямой через точку $M_0(x_0;y_0)$ с нормальным вектором $\vec{N}=\{A;B\}$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \implies$$
$$1\cdot(x-4)-3\cdot(y+1)=0 \implies x-3y-7=0.$$

Для полученной прямой: вектор нормали $\vec{N}=\{1;-3\}$, направляющий вектор (надо поменять местами координаты вектора нормали и у одной сменить знак) $\vec{s}=\{3;1\}$, угловой коэффициент (надо записать уравнение в виде $y=kx+b$):

$$y=\frac{1}{3}\,x-\frac{7}{3}, \quad \implies \quad k=\frac{1}{3}.$$

b) Прямая задана в канонической форме и ее направляющий вектор $\vec{s}_1 = \{-3; 2\}$. Он может служить вектором нормали искомой прямой, т.к. прямые перпендикулярны. Таким образом, имея точку $(4; -1)$ и вектор нормали $\vec{N}_2 = \{-3; 2\}$, записываем уравнение прямой

$$-3(x-4)+2(y+1) = 0, \implies 3x-2y-14 = 0 \quad \implies y = \frac{3}{2}x-7$$

Вектор нормали прямой $\vec{N} = \{-3; 2\}$,
направляющий вектор $\vec{s} = \{2; 3\}$,
угловой коэффициент $k = 3/2$.

c) Данная прямая $y - 2 = 0$ является горизонтальной и составляет с осью OX угол 0°. Под углом 45° к ней через заданную точку можно провести две прямые, одна прямая будет составлять с осью OX угол 45° и, следовательно, ее угловой коэффициент $k = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$, а другая прямая будет составлять с осью OX угол 135° и, следовательно, ее угловой коэффициент $k = \operatorname{tg} 135^\circ = -1$. Используем уравнение прямой через точку с угловым коэффициентом

$$l_1: \quad y - y_0 = k(x - x_0) \implies y + 1 = 1 \cdot (x - 4) \implies x - y - 5 = 0$$

$$l_2: \quad y - y_0 = k(x - x_0) \implies$$

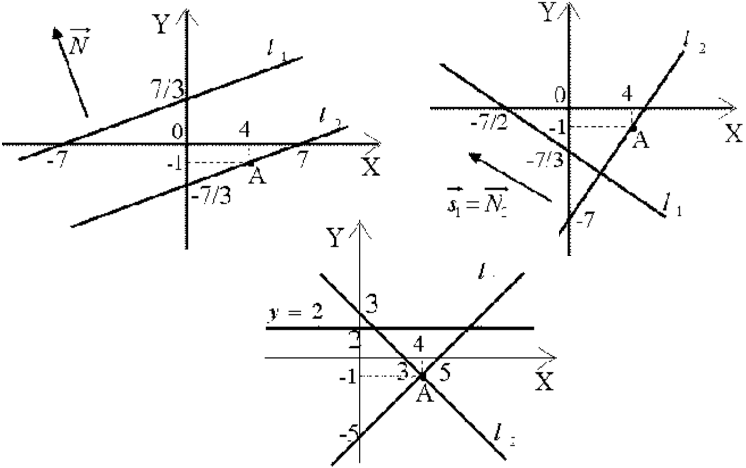
$$y + 1 = -1 \cdot (x - 4) \implies x + y - 3 = 0$$

Вектор нормали прямой $\vec{N} = \{1; -1\}$,

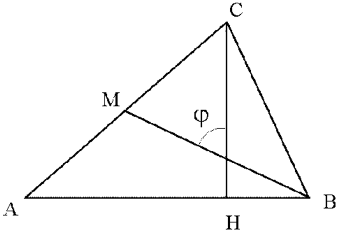
направляющий вектор $\vec{s} = \{1; 1\}$,

угловой коэффициент $k = \pm 1$.

Для построения прямых в системе координат можно найти точки пересечения с осями координат, взяв сначала $x = 0$ и по уравнению вычислить y, а затем взять $y = 0$ и вычислить соответствующее значение x.



• **2**. Даны вершины треугольника
$A(-2;0)$, $B(3;-1)$, $C(4;-2)$.
Составить: a) уравнение стороны AB и найти ее длину,
b) уравнение медианы BM и найти ее длину,
c) уравнение высоты CH и найти ее длину,
d) косинус угла между медианой BM и высотой CH.



Р е ш е н и е.

a) Для составления уравнения стороны AB воспользуемся уравнением прямой через две точки

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \Longrightarrow$$

$$\frac{x+2}{3+2}=\frac{y-0}{-1-0} \Longrightarrow$$

$$\frac{x+2}{5}=\frac{y}{-1} \Longrightarrow x+5y+2=0.$$

Длину стороны AB найдем как расстояние между двумя точками:

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}==\sqrt{5^2+(-1)^2}=\sqrt{26}$$

b) Вектор медианы треугольника равен полусумме векторов его сторон, т.е.

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\{-5; 1\} + \{1; -1\}) = \{-2; 0\}$$

Длина медианы есть модуль вектора медианы

$|BM| = |\overrightarrow{BM}| = \sqrt{4 + 0} = 2$

Направляющему вектор медианы $\overrightarrow{BM} = \{-2; 0\}$ будет соответствовать вектор нормали медианы $\overrightarrow{N}_{BM} = \{0; 2\}$

c) Уравнение высоты CH найдем как уравнение прямой через точку $M_0 = C(4; -2)$ с вектором нормали $\vec{N}_{CH} = \overrightarrow{AB} = \{5; -1\}$

$$5(x-4) - (y+2) = 0 \implies 5x - y - 22 = 0$$

Чтобы найти длину высоты CH, воспользуемся формулой вычисления расстояния от точки C до стороны AB. Согласно этой формуле нужно координаты точки C подставить в уравнение прямой AB вместо $x_1, \ \ y_1$ и разделить на длину вектора нормали прямой AB

$$h = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{|\vec{N}|} = \frac{|1 \cdot 4 + 5 \cdot (-2) + 2|}{\sqrt{26}} = \frac{4}{\sqrt{26}}.$$

d) Косинус угла между медианой BM и высотой CH найдем как косинус угла между их нормальными векторами $\vec{N}_1 = \vec{N}_{BM} = \{0; 2\}, \quad \vec{N}_2 = \vec{N}_{CH} = \{5; -1\}$,

$$\cos\varphi = \frac{\vec{N}_1 \vec{N}_2}{|\vec{N}_1||\vec{N}_2|} = \frac{5 \cdot 0 + (-1) \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{26}} = \frac{-2}{2 \cdot \sqrt{26}} = -\frac{1}{\sqrt{26}}$$

Таким образом, мы нашли косинус тупого угла.

- **3**. Даны две прямые

$l_1 : 3x - y - 4 = 0, \quad l_2 : \begin{cases} x = -t + 5 \\ y = 2t - 3 \end{cases}$

Найти: a) точку пересечения прямых,
b) косинус угла между прямыми,
c) уравнения биссектрис углов между прямыми.

Р е ш е н и е

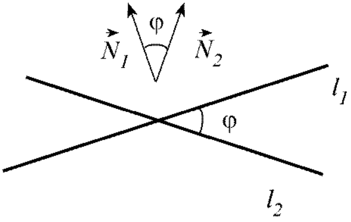
a) Точкой пересечения прямых является решение системы

$$\begin{cases} 3x - y - 4 = 0 \\ x = -t + 5 \\ y = 2t - 3 \end{cases} \Longrightarrow 3(-t + 5) - (2t - 3) - 4 = 0 \Longrightarrow$$

$$-5t + 14 = 0 \Longrightarrow t = \frac{14}{5}$$

$$x = -\frac{14}{5} + 5 = \frac{21}{5} = 4,2 \quad y = \frac{28}{5} - 3 = \frac{13}{5} = 2,6 \qquad M(4,2;\ 2,6)$$

b) Косинус угла между прямыми найдем как косинус угла между их нормальными векторами:



Для L_1 : $\quad \vec{N}_1 = \{3; -1\}$.

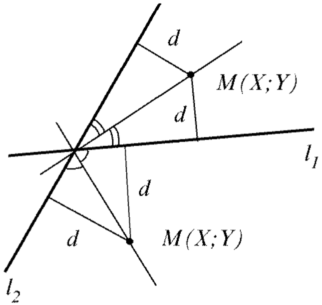
Для L_2 известен направляющий вектор $\vec{s} = \{-1; 2\} \implies \vec{N}_2 = \{2; 1\}$.

$$\cos\varphi = \frac{\vec{N}_1 \vec{N}_2}{|\vec{N}_1||\vec{N}_2|} =$$

$$= \frac{6-1}{\sqrt{9+1}\sqrt{4+1}} = \frac{5}{\sqrt{50}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \varphi = 45^\circ$$

c) Для составления уравнения биссектрисы угла между прямыми, а таковых две (острого и тупого угла), воспользуемся свойством, что любая точка биссектрисы равноудалена от сторон угла, т.е. от прямых, а также формулой для вычисления расстояния от точки $M_1(x_1; y_1)$ до прямой $Ax + By + C = 0$:



$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Приведем уравнение l_2 к общему виду

$$\begin{cases} x = -t + 5 \\ y = 2t - 3 \end{cases} \implies t = 5 - x \implies y = 2(5 - x) - 3 \implies 2x + y - 7 = 0$$

Итак, если $M(x; y)$ произвольная (текущая) точка биссектрисы, то

$$\frac{|3x-y-4|}{\sqrt{10}}=\frac{|2x+y-7|}{\sqrt{5}} \Longrightarrow |3x-y-4|=\sqrt{2}|2x+y-7| \Longrightarrow$$

$$\begin{matrix} 3x-y-4=\sqrt{2}(2x+y-7) \\ 3x-y-4=-\sqrt{2}(2x+y-7) \end{matrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{matrix} (3-2\sqrt{2})x-(1+\sqrt{2})y-4+7\sqrt{2}=0 \\ (3+2\sqrt{2})x-(1-\sqrt{2})y-4-7\sqrt{2}=0 \end{matrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{matrix} 0{,}2x-2{,}4y+7{,}2=0 \\ 5{,}8x+0{,}4y-15{,}2=0 \end{matrix}$$

Нетрудно заметить, что полученные уравнения биссектрис определяют перпендикулярные прямые.

- **7**. Построить фигуру, заданную неравенствами

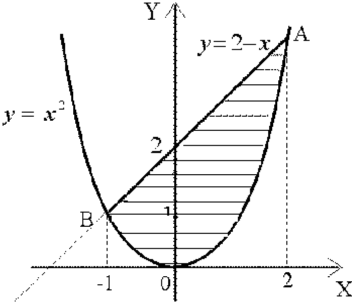
1) $\begin{cases} y \geq x^2, \\ y - x \leq 2. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y \leq 1 - x, \\ y \leq 1 + x \\ x \leq 3y. \end{cases}$

Р е ш е н и е

1) Строим границы области: параболу $y = x^2$ и прямую $y = x + 2$. Точки пересечения $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ находим, приравнивая левые части этих уравнений

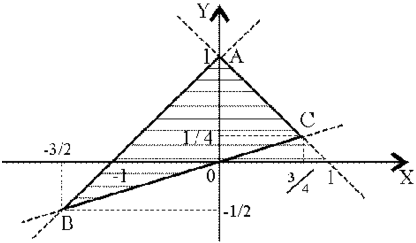
$$x^2 = x + 2, \qquad x^2 - x - 2 = 0.$$

Искомая область расположена выше параболы, т.к. $y \geq x^2$, и ниже прямой, т.к. $y \leq x + 2$.



2) Строим три прямые, являющиеся границами области:
$y = 1 - x, \quad y = 1 + x, \quad y = x/3.$

Находим точки пересечения каждой из трех пар прямых и затем, выделяем треугольную область, ограниченную всеми прямыми, учитывая, что она должна лежать выше прямой $y = x/3$, но ниже прямых $y = 1 - x, \quad y = 1 + x$ в соответствие со знаками неравенств в условии задачи.



Нахождение точек пересечения пар прямых:

1) $y = 1 - x, \quad y = 1 + x \implies 1 - x = 1 + x \implies 2x = 0,$
$(x = 0, \quad y = 1)$

2) $y = 1 - x, \quad y = x/3 \implies 1 - x = x/3 \implies (4x)/3 = 1,$
$(x = 3/4, \quad y = 1/4)$

3) $y = 1 + x, \; y = x/3 \implies 1 + x = x/3 \implies (2x)/3 = -1,$
$(x = -3/2, \quad y = -1/2)$