Тема 1. «Уравнения с разделяющимися переменными»

1) $y^2dy + \operatorname{tg} x dx = 0$, $y(0) = 1$. **Ответ**: $y = \sqrt[3]{3\ln|\cos x| + C}$,
$y = \sqrt[3]{3\ln|\cos x| + 1}$.

2) $yy' + x = 0$, $y(0) = 1$. **Ответ**: $y = \pm\sqrt{C - x^2}$,
$y = \sqrt{1 - x^2}$.

3) $x^2dy + ydx = 0$ **Ответ**: $y = Ce^{1/x}$.

4) $y' = (2y+1)\cdot \operatorname{ctg} x$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$ **Ответ:** $y = 0{,}5(C\sin^2 x - 1)$,

$y = 0{,}5(4\sin^2 x - 1)$

5) $y' = \sqrt{y}$, $y(0) = 0$ **Ответ:** $y = \left(\dfrac{x+C}{2}\right)^2$, $y = 0$ – особое;

$y = \dfrac{x^2}{4}$, $y = 0$ – решение задачи Коши.

6) $x(y^2 - 4) - yy' = 0$. **Ответ:** $y = \pm\sqrt{Ce^{x^2} + 4}$.

7) $xdx + xydy + ydy + xydx = 0$, $y(0) = -2$.

Ответ: $(x+1)(y+1) = Ce^{x+y}$;
$(x+1)(y+1) = -e^{2+x+y}$

8) $y' + y = 1$ **Ответ:** $y = 1 - Ce^{-x}$

Тема 2. «Однородные уравнения»

1) $(x+y)dx - (x-y)dy = 0$ **Ответ**: $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right) - \ln\sqrt{x^2 + y^2} = C$.

2) $x^2dy + y^2dx = xydy$ **Ответ**: $\dfrac{y}{x} - \ln|y| = C \;\Rightarrow\; y = Ce^{\frac{y}{x}}$, $\forall C$.

3) $x^2y' + y^2 - xy = 0$ **Ответ**: $y = \dfrac{x}{\ln|x| + C}$.

4) $y' = \dfrac{y}{x} + \operatorname{ctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ **Ответ**: $y = \pm x \arccos\left(\dfrac{C}{x}\right) + 2\pi k x$.

5) $y' = \dfrac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x}$ **Ответ**: $\arcsin\left(\dfrac{y}{x}\right) = \operatorname{sgn} x \cdot \ln|x| + C$,
$y = \pm x$.

Тема 3. «Линейные уравнения первого порядка. Уравнения Бернулли»

1) $y' - y \operatorname{ctg} x = \sin x$ **Ответ**: $y = \sin x \cdot (x + C)$.

2) $y' \sin x - y = 1 - \cos x$. $y(\pi/2) = 0$ **Ответ**: $y = (C + x) \cdot tg(x/2)$,
$y = (x - \pi/2) \cdot tg(x/2)$.

3) $(1 - x)(y' + y) - \dfrac{1}{e^x} = 0$, $y(2) = 0$ **Ответ**: $y = e^{-x} \cdot (C - \ln|1 - x|)$,
$y = -e^{-x} \cdot \ln|1 - x|$.

4) $y' = \dfrac{1}{2x - y^2}$ **Ответ**: $x = e^{2y} \cdot \left[C + \dfrac{e^{-2y}}{2}\left(y^2 + y + \dfrac{1}{2}\right)\right]$

5) $y' + \dfrac{y}{x+1} = -\dfrac{1}{2} \cdot (x+1)^3 \cdot y^3$ **Ответ**: $y = \pm\sqrt{\dfrac{2}{C + (x+1)^2}} \cdot \dfrac{1}{x+1}$

6) $3xy' - 2y = \dfrac{x^3}{y^2}$ **Ответ**: $y = x^{2/3} \cdot \sqrt[3]{x + C}$.

7) $(xy + x^2 y^3) y' = 1$ **Ответ**: $x = \dfrac{e^{y^2/2}}{(2 - y^2) \cdot e^{y^2/2} + C}$

Тема 4. «Уравнения в полных дифференциалах»

1) $x(2x^2 + y^2) + y(x^2 + 2y^2)y' = 0$ **Ответ**: $x^4 + x^2y^2 + y^4 = C$.

2) $3x^2 - 2x - y + (2y - x + 3y^2)y' = 0$ **Ответ:** $x^3 - x^2 - xy + y^2 + y^3 = C$.

3) $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)dx + \left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{x}{y^2}\right)dy = 0$

Ответ: $\sqrt{x^2+y^2} + \ln|xy| + \dfrac{x}{y} = C$.

4) $\left(3x^2 \cdot \mathrm{tg}\, y - \dfrac{2y^3}{x^3}\right)dx + \left(\dfrac{x^3}{\cos^2 y} + 4y^3 + \dfrac{3y^2}{x^2}\right)dy = 0$

Ответ: $x^3 \cdot \mathrm{tg}\, y + \dfrac{y^3}{x^2} + y^4 = C$.

5) $\left(2x + \dfrac{x^2+y^2}{x^2 y}\right)dx = \dfrac{x^2+y^2}{xy^2}dy$ **Ответ**: $x^2 + \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = C$.

6) $\left(\dfrac{\sin 2x}{y} + x\right)dx + \left(y - \dfrac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy = 0$ **Ответ**: $\dfrac{\sin^2 x}{y} + \dfrac{x^2+y^2}{2} = C$

Тема 6. «Дифференциальные уравнения порядка n, допускающие понижение порядка»

1) $y^{(4)} = \cos^2 x$, $y(0) = 1/32$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1/8$, $y'''(0) = 0$.

Ответ: $y = \dfrac{x^4}{48} + \dfrac{\cos 2x}{32} + C_1 \dfrac{x^3}{6} + C_2 \dfrac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$, $\quad y = \dfrac{x^4}{48} + \dfrac{\cos 2x}{32} + \dfrac{x^2}{8}$.

2) $y'' = \sqrt{1 - x^2}$.

Ответ: $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \dfrac{1}{2}(t \sin t + \cos t) - \dfrac{2}{4} \cdot \dfrac{\cos^3 t}{3} + C_1 \sin t + C_2 \end{cases}$

3) $y'' \cdot \operatorname{ctg} x + y' = 2$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

Ответ: $y = 2x - C_1 \sin x + C_2$, $\quad y = 2x - 2\sin x + 2$.

4) $y'' - \dfrac{y'}{x-1} = x(x-1)$.

Ответ: $y = \dfrac{x^4}{8} + C_1 \cdot \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} - C_1 x + C_2$

5) $y'''(x-1) - y'' = 0$, $y(2) = 2$, $y'(2) = 1$, $y''(2) = 1$.

Ответ: $y = C_1 \cdot \dfrac{(x-1)^3}{6} + C_2 \cdot x + C_3$, $\qquad y = \dfrac{(x-1)^3}{6} + \dfrac{1}{2} \cdot x + \dfrac{5}{6}$.

6) $yy'' - (y')^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$. **Ответ**: $y = C_2 \cdot e^{C_1 x}$, $\qquad y = e^{2x}$.

7) $y'' = y'(1 + y')$. **Ответ**: $y = -\ln(C_1 - C_2 e^x)$.

8) $(y'')^2 + (y''')^2 = 1$. **Ответ**: $y = C_2 x + C_3 - \sin(C_1 \pm x)$.

9) $xy' \cdot \left[yy'' - (y')^2 \right] - y \cdot (y')^2 = x^4 y^3$. **Ответ**: $y = C_2 e^{\pm(1/3)(C_1 + x^2)^{3/2}}$.

10) $y^2 y''' - 3yy'y'' + 2(y')^3 + \dfrac{y}{x} \cdot \left[yy'' - (y')^2 \right] = 0$.

Ответ: $y = C_3 e^{x(0{,}5 \ln^2 x - C_1 \ln x + C_2)}$.

11) $(y'')^3-2y''-x=0$.

Ответ: $\begin{cases} x=t^3-2t \\ y=\dfrac{9}{28}t^7-\dfrac{9}{10}t^5+\dfrac{1}{3}(3C_1+2)t^3-2C_1t+C_2 \end{cases}$

Тема 7. «Линейные однородные дифференциальные уравнения порядка n»

Найти общее решение ЛОДУ с постоянными коэффициентами:

1) $y''-7y'+6y=0$. **Ответ**: $y=C_1e^{6x}+C_2e^{x}$.

2) $y'''-2y''+y'=0$. **Ответ**: $y=C_1+C_2e^{x}+C_3xe^{x}$.

3) $y''+4y=0$. **Ответ**: $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$.

4) $y''-4y'+13y=0$. **Ответ**: $y=e^{2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$.

5) $y'''+4y''+5y'=0$. **Ответ**: $y=C_1+e^{-2x}(C_2\cos x+C_3\sin x)$.

6) $y'''+6y''+11y'+6y=0$. **Ответ**: $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+C_3e^{-3x}$.

7) $y^{(4)}+4y'''+10y''+12y'+5y=0$.

Ответ: $y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}+e^{-x}(C_3\cos 2x+C_4\sin 2x)$.

8) $y^{(5)}-2y^{(4)}+2y'''-4y''+y'-2y=0$.

Ответ: $y=C_1e^{2x}+(C_2+C_3x)\cos x+(C_4+C_5x)\sin x$.

Тема 8. «Линейные неоднородные дифференциальные уравнения порядка n»

Найти решение ЛНДУ методом вариации произвольных постоянных:

1) $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$.

Ответ: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \cdot \ln\left|\cos x\right| + x \sin x$.

2) $y''' + y' = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$.

Ответ: $y = C_1 + \underbrace{(C_2 + 1)}_{C_2} \cos x + C_3 \sin x + \cos x \cdot \ln\left|\cos x\right| + x \sin x$.

3) $x^2 y'' + xy' + y = 2\sin(\ln x)$.

Ответ: $y = C_1 \cdot \cos(\ln x) + \underbrace{(C_2 + 0{,}5)}_{C_2} \cdot \sin(\ln x) - \ln x \cdot \cos(\ln x)$.

4) $(x+1)^3 y'' + 3(x+1)^2 y' + (x+1) y = 6 \ln(x+1)$.

Ответ: $y = \dfrac{C_1}{x+1} + C_2 \cdot \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} + \dfrac{\ln^3(x+1)}{x+1}$.

5*) $y'' - y' + ye^{2x} = xe^{2x} - 1$, $y_1 = \sin e^x$.

Ответ: $y = C_2 \sin e^x - C_1 \cos e^x + x$.

6) $(1 + x^2) y'' + xy' - y + 1 = 0$, $y_1 = x$.

Ответ: $y = C_1 \sqrt{1 + x^2} + C_2 x + 1$.

Тема 9. «Линейные неоднородные дифференциальные уравнения порядка n с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида»

Найти общее решение ЛНДУ с правой частью специального вида:

1) $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$.

Ответ: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{5} \cdot e^{4x}$.

2) $y''' - y' = -2x$.

Ответ: $y = C_1 + C_2 e^{x} + C_3 e^{-x} + x^2$.

3) $y'' - 8y' + 16y = (1 - x) \cdot e^{4x}$.

Ответ: $y = (C_1 + C_2 x) e^{4x} + \left(-\frac{x}{6} + \frac{1}{2} \right) \cdot x^2 \cdot e^{4x}$.

4) $y'' - y' - 2y = -20 \cos 2x$.

Ответ: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + 3 \cos 2x + \sin 2x$.

5) $y^{(4)} + 4y'' = 6(2x^2 + 2x + 1)$.

Ответ: $y = C_1 + C_2 x + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2}$.

6) $y'' + 2y' = 4e^{x} (\sin x + \cos x)$.

Ответ: $y = C_1 + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{5} \cdot e^{x} (6 \sin x - 2 \cos x)$.

7) $y'' + y = \cos x + \sin 2x$.

Ответ: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{x}{2} \cdot \sin x - \frac{1}{3} \sin 2x$.

8) $y^{(4)} - y = e^{x} + \cos 2x$.

Ответ: $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x + \frac{1}{4} x e^{x} + \frac{1}{15} \cos 2x$.

Указать структуру общего решения ЛНДУ:

9) $y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sin 2x$.

Ответ: $y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - 0{,}5 \cdot x \cos 2x)$.

10) $y'' + 2y' + y = x^2 \cdot e^{-x} \cos x$.

Ответ: $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + e^{-x}(-x^2 \cos x + 6 \cos x + 4x \sin x)$.

11) $y'' + 4y = x \sin 2x$.

Ответ: $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \dfrac{1}{8} \cdot x^2 \cos 2x + \dfrac{1}{16} \cdot x \sin 2x$.

12) $y^{(4)} + 4y'' + 4y = (x \cos 2x + \sin 2x) \cdot e^x$.

Ответ: $y = (C_1 + C_2 x) \cdot \cos(\sqrt{2}x) + (C_3 + C_4 x) \cdot \sin(\sqrt{2}x) +$
$+ e^x \left[(Ax + B) \cos 2x + (Cx + D) \sin 2x\right]$.