ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

№	Тип диф. уравнения	Вид уравнения	Признак уравнения	Метод решения уравнения	Результат применения метода
1	Уравнения с разделенными переменными	$M(x)dx + N(y)dy = 0$	Функция при dx зависит только от x, функция при dy зависит только от y.	Проинтегрировать каждое слагаемое в уравнении.	Общий интеграл $\int M(x)dx + \int N(y)dy = c$
2	Уравнения с разделяющимися переменными	$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$ или $y' = f_1(x)f_2(y)$; $(y' = \frac{dy}{dx})$.	Функции при дифференциалах распадаются на произведения функций, зависящих только от одной из переменных.	Разделить уравнение на произведение $N_1(y)M_2(x) \neq 0$.	Уравнение с разделенными переменными и общий интеграл: $\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = c$
3	Однородные уравнения	$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ или $y' = f(\frac{y}{x})$.	Уравнение не изменяет своего вида при замене x и y на tx и ty.	Сделать замену переменной $y = tx$, $y' = t'x + t$.	Уравнение с разделяющимися переменными относительно x и t: $t'x = f(t) - t$.
4	Линейные уравнения	$y' + p(x)y = q(x)$ $x' + p(y)x = q(y)$	Искомая функция и её производная входят в уравнение в первой степени и между собой не перемножаются.	Метод Бернулли $y = uv$ $y' = u'v + uv'$	Система двух ДУ с разделяющимися переменными $\begin{cases} v' + p(x)v = 0, \\ u'v = q(x). \end{cases}$
5	Уравнения Бернулли	$y' + p(x)y = q(x)y^m$ или $x' + p(y)x = q(y)x^m$.	Левая часть уравнения – такая же, как у линейного уравнения, а правая отличается на сомножитель: аргумент в степени m.	Метод Бернулли $y = uv$; $y' = u'v + uv'$	Система двух ДУ с разделяющимися переменными $\begin{cases} v' + p(x)v = 0, \\ u'v = q(x)u^m v^m. \end{cases}$

№	Тип дифф. уравнения	Вид уравнения	Признак уравнения	Метод решения уравнения	Результат применения метода
6	Уравнения в полных дифференциалах	$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$	Условие полного дифференциала $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$.	$\begin{cases} u = \int M(x,y)dx + \varphi(y) = c, \\ (\int M(x,y)dx)'_y + \varphi'(y) = N(x,y) \end{cases}$.	Общий интеграл.

ТВТ©ТПУВМ02

Дифференциальные уравнения высших порядков

№	Тип уравнения	Вид уравнения	Признак уравнения	Метод решения уравнения
1	Допускает понижение порядка	$y^{(n)} = f(x)$	Ур-ние записано явно относительно старшей производной; в правой части ур-ния ф-ция зависит только от *x*.	Последовательное понижение порядка производной *n*-кратным интегрированием $y = \underbrace{\int\int\ldots\int}_{n} f(x)\underbrace{dxdx\ldots dx}_{n} + c_1 \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} + c_2 \dfrac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + c_n$
2	Допускает понижение порядка	$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots y^{(n)}) = 0$	Уравнение не содержит явно искомой функции у и её первых производных до порядка *k-1* включительно	Понижение порядка уравнения на *k* единиц заменой переменной $y^{(k)} = p(x), \quad y^{(k+1)} = p'(x), \ldots, y^{(n)} = p^{(n-k)}(x)$.
3	Допускает понижение порядка	$F(y, y', \ldots y^{(n)}) = 0$	Уравнение не содержит явно независимой переменной *x*	Понижение порядка уравнения на единицу заменой переменной $y' = p(y),\ y'' = p\dfrac{dp}{dy},\ y''' = p(\dfrac{dp}{dy})^2 + p^2\dfrac{d^2p}{dy^2}$ и так далее.

ТВТ©ТПУВМ02

Линейные дифференциальные уравнения высшего порядка с постоянными коэффициентами

Однородное $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$, $a_i -$ *const*	Неоднородные $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$, $a_i -$ *const*
Характеристическое уравнение $a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0$, где $k_1, k_2, \ldots k_n$ –корни характеристического уравнения, $y = e^{kx}$ –решение	$y_{общ.р.л.н.у} = y_{общ.р.л.о.у.} + \tilde{y}_{частн.р.л.н.у}$

Случаи решения ДУ $y'' + py' + qy = 0$, $k^2 + pk + q = 0 -$ хар.у.	Частные решения	Общее решение	Свободный член $f(x)$ ЛНДУ	Частное решение $\tilde{y}$
$D > 0$, $k_1, k_2 -$ различные действительные корни	$y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$	$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$	**1.** $f(x) = P_n(x) e^{\alpha x}$ а) α – не корень хар.у. б) α – корень хар.у. кратности r	а) $\tilde{y} = e^{\alpha x}\left(A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n\right)$ б) $\tilde{y} = x^r e^{\alpha x}\left(A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n\right)$
$D = 0$, $k = k_1 = k_2 -$ корни кратные	$y_1 = e^{kx}$, $y_2 = xe^{kx}$	$y = c_1 e^{kx} + c_2 x e^{kx}$	**2.** $f(x) = e^{\alpha x}\left(P_l(x)\cos\beta x + Q_s(x)\sin\beta x\right)$ а) $\alpha \pm \beta i -$ не корень хар.у. б) $\alpha \pm \beta i -$ корень хар.у. кратности r	а) $\tilde{y} = e^{\alpha x}\left(\tilde{P}(x)\cos\beta x + \tilde{Q}(x)\sin\beta x\right)$ б) $\tilde{y} = x^r e^{\alpha x}\left(\tilde{P}(x)\cos\beta x + \tilde{Q}(x)\sin\beta x\right)$, где $\tilde{P}(x), \tilde{Q}(x)$ – многочлены степени $m = \max(l, s)$
$D < 0$, $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i -$ корни комплексные	$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$	$y = e^{\alpha x}\left(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x\right)$		

Метод Лагранжа

$y'' + py' + qy = f(x)$,

1) $y'' + py' + qy = 0$ - ОР ЛОДУ, $\Rightarrow$ $\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0, \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x) \end{cases}$ Решая систему, найдём $c_1'(x)$ и $c_2'(x)$. Далее находим $c_1(x)$, $c_2(x)$ и общее

2) $y = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2$ - ОР ЛНДУ линейного неоднородного уравнения $y(x)$.