Математика

Глава.
Операционное исчисление

§1. Оригинал и изображение.

Определение.

Пусть $f(t):\mathbb{R}\to\mathbb{C}$. ***Оригиналом*** *называется всякая комплексная функция* $f(t)$ *действительного аргумента* t, *удовлетворяющая следующим условиям:*

1) $f(t)$ *и ее производная* $f'(t)$ *определены и непрерывны на* $\mathbb{R}$, *за исключением может быть отдельных точек разрыва* I *рода, число которых на любом интервале конечно*;

2) $f(t)=0 \;\; \forall t<0$;

3) $f(t)$ *возрастает не быстрее показательной функции, т.е. существуют числа* $M>0$ *и* $s_0\geq 0$, *такие, что для всех* t

$$\left|\, f(t) \right| \leq Me^{s_0 t}$$

Число s_0, обладающее таким свойством, называют ***порядком роста функции*** ***$f(t)$***).

Пример. Определить, являются ли данные функции оригиналами:

1) $f(t)=\begin{cases}0, & \mathrm{t}<0,\\ e^{3t}\cos 2t, & \mathrm{t}\ge 0;\end{cases}$ 2) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{1}{1-t}, & t\ge 0.\end{cases}$

Пример. Единичная функция Хевисайда:

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Замечание.

Если для функции $\varphi(t)$ выполняются условия 1 и 3 определения 1, то функция $f(t) = \varphi(t) \cdot \eta(t)$ будет являться оригиналом.

В дальнейшем будем писать $\sin t$, $\cos t$ и подобные оригиналы, полагая, что операция умножения на $\eta(t)$ уже приведена, т.е. опускать множитель $\eta(t)$:

$$\sin t \cdot \eta(t),\ \cos t \cdot \eta(t) \text{ и т. д.}$$

Определение.

Пусть $f(t)$ *– оригинал.* ***Изображением функции*** $\boldsymbol{f(t)}$ *называется функция* $F(p)$ *комплексного переменного* $p = a + ib$*, определяемая равенством*

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-pt}\, dt.$$

Интеграл $\int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-pt}\, dt$ ***называется интегралом Лапласа***.

Операцию перехода от оригинала $f(t)$ к изображению $F(p)$ называют ***преобразованием Лапласа***.

Соответствие между оригиналом $f(t)$ и его изображением $F(p)$ символически записывают в виде

$$f(t) \div F(p).$$

В этом случае говорят, что оригинал $f(t)$ имеет изображение $F(p)$.

Операционным исчислением называется теория преобразования Лапласа.

Смысл введения изображения заключается в том, что с его помощью удастся упростить решение многих задач, в частности свести решение дифференциальных уравнений к решению простейших алгебраических уравнений. Зная изображение, можно найти оригинал или по заранее составленным таблицам «оригинал-изображение», или с помощью теорем, представленных ниже.

Теорема.

Функция $F(p) = \int_{0}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-pt}\, dt$ определена в полуплоскости

Re $p = a$ и является в этой полуплоскости аналитической функцией.

Возникают следующие вопросы:

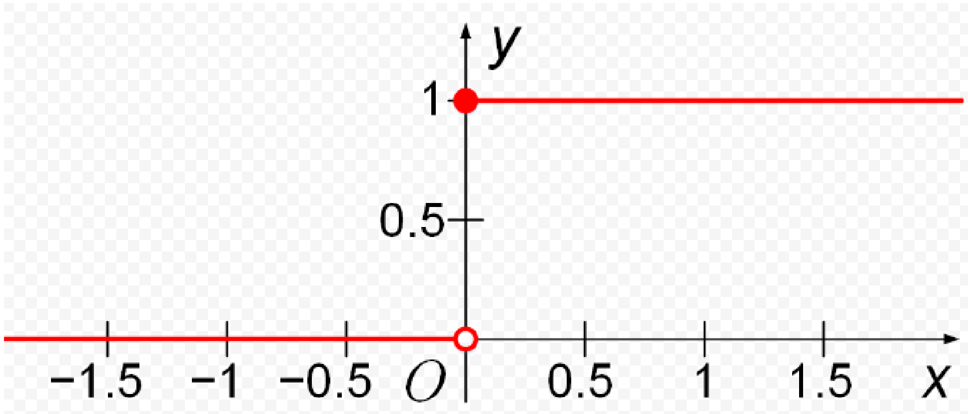
1. Для любой ли функции $F(p)$ существует функция $f(t)$, для которой $F(p)$ является изображением?

2. Если такая функция $f(t)$ существует, то является ли она единственной?

Теорема (теорема единственности). Преобразование Лапласа единственно в том смысле, что две функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$, имеющие одинаковые преобразования Лапласа, совпадают во всех точках непрерывности для всех $t \geq 0$.

Пример. Найти изображение *единичной функции Хевисайда*

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$



§2. Свойства преобразования Лапласа

Будем обозначать: $f(t)$, $g(t)$, $x(t)$,… – оригиналы,
$F(p)$, $G(p)$, $X(p)$,… – их изображения.

1. Линейность изображения.

Если $f(t)$, $g(t)$ – оригиналы, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, то $\alpha f(t) + \beta g(t)$ – оригинал и

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \risingdotseq \alpha F(p) + \beta G(p).$$

2. Теорема подобия.

Справедливо утверждение: $f(\alpha t) \risingdotseq \dfrac{1}{\alpha} F\left(\dfrac{p}{\alpha}\right), \quad \forall \alpha > 0$

3. Теорема запаздывания (оригинала)

Справедливо утверждение: $f(t-\alpha) \risingdotseq e^{-\alpha p} \cdot F(p)$.

3. Теорема запаздывания (или сдвига) оригинала.

Справедливо утверждение: $f(t-\alpha) \risingdotseq \mathrm{e}^{-\alpha p} \cdot F(p)$.

Замечание. Напомним, что

$$f(t) = f(t)\cdot\eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ f(t), & t \ge 0. \end{cases}$$

$$f(t-\alpha) = f(t-\alpha)\cdot\eta(t-\alpha) = \begin{cases} 0, & t-\alpha < 0; \\ f(t-\alpha), & t-\alpha \ge 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f(t-\alpha) = \begin{cases} 0, & t < \alpha; \\ f(t-\alpha), & t \ge \alpha. \end{cases}$$

4. Теорема смещения (запаздывания изображения).

Справедливо утверждение: $e^{\alpha t} \cdot f(t) \risingdotseq F(p - \alpha)$.

5. Дифференцирование оригинала

Теорема. Если $f(t) \risingdotseq F(p)$ и существуют производные функции $f(t)$, т.е. $f'(t)$, …, $f^{(n)}(t)$ – оригиналы, то для любого $k = 1, 2, \ldots, n$ имеет место равенство:

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n \cdot F(p) - p^{n-1} \cdot f(0) - p^{n-2} \cdot f'(0) - \ldots - p \cdot f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

В частности,

$$f'(t) \risingdotseq p \cdot F(p) - f(0),$$

$$f''(t) \risingdotseq p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) - f'(0).$$

Без доказательства

Таким образом, дифференцирование заменяется в пространстве изображений элементарным действием – умножением изображения на степень аргумента p с одновременным добавлением многочлена, коэффициентами которого являются «начальные значения» оригинала.

6. Дифференцирование изображения.

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$t \cdot f(t) \risingdotseq (-1) \cdot F'(p).$$

То есть сложная операция дифференцирования изображения заменяется в пространстве оригиналов совсем тривиальной операцией – умножением оригинала на независимую переменную, взятую с отрицательным знаком:

$$F'(p) \risingdotseq (-1) \cdot t \cdot f(t).$$

Следствие. Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то для любого $n \in N$ справедлива формула

$$t^n \cdot f(t) \risingdotseq (-1)^{(n)} \cdot F^{(n)}(p).$$

Без доказательства

7. Интегрирование оригинала.

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$,

то

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \div \frac{F(p)}{p}.$$

Таким образом, интегрированию оригинала соответствует в пространстве изображений деление изображения на p.

Замечание. Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то интеграл от оригинала является изображением.

8. Интегрирование изображения.

Теорема (об интегрировании изображения).

Пусть $f(t) \risingdotseq F(p)$.

Если функция $\frac{f(t)}{t}$ является оригиналом, то

$$\frac{f(t)}{t} \div \int_p^{\infty} F(p)dp.$$

Таким образом, интегрирование изображения равносильно делению оригинала на t.

Замечание. Будем считать, что функция $\frac{f(t)}{t}$ доопределена до непрерывной функции при $t = 0$.

Определение. Пусть $f(t)$ и $g(t)$ – оригиналы. ***Свёрткой двух функций $f(t)$ и $g(t)$*** называется функция $\varphi(t)$, определяемая равенством

$$\varphi(t) = \int_0^t f(t-\tau)\cdot g(\tau)d\tau.$$

Символически свёртку двух функций **обозначают** через знак звёздочка: $\boldsymbol{f(t) * g(t)}$.

Выражение $\boldsymbol{f(t) * g(t)}$ называют ***свёрткой двух функций***.

Операцию получения свёртки называют ***свёртыванием двух функций***.

Свертка обладает свойством коммутативности:

$$\boxed{f(t) * g(t) = g(t) * f(t).}$$

9. Умножение изображений

Теорема (Бореля, об умножении изображений).

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, $g(t) \risingdotseq G(p)$, то

$$f(t) * g(t) \risingdotseq F(p) \cdot G(p),$$

где

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau) \cdot g(\tau) d\tau.$$

Следствие (формула Дюамеля).

Справедлива формула: $f'(t) * g(t) + f(0) \cdot g(t) \risingdotseq p \cdot F(p) \cdot G(p)$, т.е.

$$\int_0^t f'(\tau) g(t-\tau)\, d\tau + f(0) \cdot g(t) \risingdotseq p \cdot F(p) \cdot G(p).$$

Таблица оригиналов и изображений

№	$f(t)$	$F(p)$
1	1	$\frac{1}{p}$
2	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$
3	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
4	$t^n e^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$
5	$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{p^2+\beta^2}$
6	$\cos \beta t$	$\frac{p}{p^2+\beta^2}$

№	$f(t)$	$F(p)$
7	$e^{\alpha t} \sin \beta t$	$\frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
8	$e^{\alpha t} \cos \beta t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
9	$t \sin \beta t$	$\frac{2p\beta}{(p^2+\beta^2)^2}$
10	$t \cos \beta t$	$\frac{p^2-\beta^2}{(p^2+\beta^2)^2}$
11	$sh \beta t$	$\frac{\beta}{p^2-\beta^2}$
12	$ch \beta t$	$\frac{p}{p^2-\beta^2}$

§3. Отыскание оригинала по изображению

Способ 1

Теорема (обращения).

Пусть $f(t)$ *– оригинал,* $f(t) \risingdotseq F(p)$. *Тогда в любой точке непрерывности функции* $f(t)$ *имеет место равенство*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C F(p) \cdot e^{pt} dp$$

где C – *любая прямая* $\mathrm{Re}\, p = a > s_0$.

***Замечание*.**

$$\int\limits_C F(p) \cdot e^{pt} dp = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_{a-bi}^{a+bi} F(p) \cdot e^{pt} dp = \int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i} F(p) \cdot e^{pt} dp$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i} F(p) \cdot e^{pt} dp$$

Способ 2

Изображение представляется в виде суммы более простых функций. Затем с помощью таблицы оригиналов и свойств преобразования Лапласа находят оригиналы для каждого слагаемого.

Способ 3

Изображение представляется в виде произведения двух изображений, оригиналы которых известны. Затем применяется теорема о свёртке.

Способ 4

Теорема (вторая теорема разложения).

Пусть функция $F(p)$ *удовлетворяет условиям*:

1) $F(p)$ *аналитична в полуплоскости* $\mathrm{Re}\,p > s_0$ (*где* s_0 – *некоторое неотрицательное число*);
2) *в полуплоскости* $\mathrm{Re}\,p < s_0$ *функция* $F(p)$ *имеет только конечное число полюсов* $p_1, p_2, \dots, p_n$;
3) $M(R) = \max\limits_{p \in C_R} \left| F(p) \right| \to 0$ *при* $R \to \infty$

   (*где* C_R – *дуга окружности* $|\,z\,| = R$, *лежащая в полуплоскости* $\mathrm{Re}\,p < s_0$);
4) *интеграл* $\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i} F(p) \cdot e^{pt}\,dp$ *сходится абсолютно для* $\forall a > s_0$.

Тогда оригиналом для функции $F(p)$ *является функция* $f(t) \cdot \eta(t)$, *где*

$$\boxed{f(t) = \sum_{k=1}^{n} \underset{p=p_k}{res} \left[F(p) \cdot e^{pt} \right]}$$

Замечание. Условиям этой теоремы удовлетворяют в частности функции вида

$$\frac{Q_m(p)}{Q_n(p)} \quad \text{и} \quad \frac{Q_m(p)}{Q_n(p)} \cdot e^{-\alpha p}$$

где $Q_m(p)$, $Q_n(p)$ – многочлены степени m и n соответственно, причем $m < n$.

Способ 5

Теорема (первая теорема разложения).

Если функция $F(p)$ *аналитична в окрестности* ∞ *и ее ряд Лорана в окрестности* ∞ *имеет вид*

$$F(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{p^k}$$

то оригиналом для функции $F(p)$ *является функция*

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(k-1)!} \cdot t^{k-1}$$

§4. Применение преобразования Лапласа

Метод решение задач математического анализа и других разделов математики с помощью преобразования Лапласа, называют ***операционным исчислением***.

1. Интегрирование линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Пример. Найти решение задачи Коши:

$$y' - y = 1, \quad y(0) = -1$$

В случае, если изображение для правой части $f(t)$ найти сложно, решение задачи

$$\left.\begin{aligned} y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(t), \\ y(0) = y'(0) = \ldots = y^{(n-1)}(0) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

можно выразить через решение задачи

$$\left.\begin{aligned} y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 1, \\ y(0) = y'(0) = \ldots = y^{(n-1)}(0) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Пусть $y(t)$ – решение уравнения (1), $y(t) \risingdotseq Y(p)$;
$y_1(t)$ – решение уравнения (2), $y_1(t) \risingdotseq Y_1(p)$;
$f(t) \risingdotseq F(p)$;

тогда $$Y(p) = p \cdot Y_1(p) \cdot F(p)$$

$\Rightarrow$ по формуле Дюамеля

$$\boxed{y(t) = y'_1(t) * f(t) = \int_0^t y'_1(t-\tau) f(\tau) d\tau = \int_0^t y'_1(\tau) f(t-\tau) d\tau}$$

2. Интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Пример. Найти решение задачи Коши:

$$\begin{cases} x' + y = 2e^t, \\ y' + x = 2e^t; \end{cases}$$

$$x(0) = y(0) = 1.$$

3. Решение интегральных уравнений типа свертки

Определение.

Уравнение вида

$$y(x) = f(x) + \int_0^x y(t)\cdot k(x-t)dt$$

где $f(x)$, $k(x)$ – известные функции, $y(x)$ – неизвестная функция, называется ***интегральным уравнением типа свертки***.

Пусть $y(x), f(x), k(x)$ – оригиналы,

$$y(t) \risingdotseq Y(p), \quad f(t) \risingdotseq F(p), \quad k(t) \risingdotseq K(p).$$

Тогда

$$Y(p) = \frac{F(p)}{1-K(p)}.$$