

Математика

Глава. Теория рядов

Преподаватель – доцент, к.п.н.
Ефремова О.Н.

§ 1. Числовые ряды

Пусть задана числовая последовательность $\{u_n\}$

Определение. Выражение вида

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

называют **числовым рядом**.

При этом, члены последовательности $\{u_n\}$ называются **членами ряда** (u_n – **общий член**).

Если, начиная с некоторого номера N , для членов ряда справедливо равенство

$$u_N = u_{N+1} = u_{N+2} = \dots = 0,$$

то ряд называют **конечным**. В противном случае ряд называется **бесконечным**.

Ряд $\sum u_n$ называют

- **знакоположительным**, если $u_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$;
- **знакоотрицательным**, если $u_n \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}$;
- **знакопостоянным**, если он знакоположительный или знакоотрицательный;
- **знакопеременным**, если он содержит бесконечное число как положительных, так и отрицательных членов.

Для ряда $\sum u_n$ запишем последовательность

$$S_1 = u_1, \quad S_2 = u_1 + u_2, \quad \dots, \quad S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n, \quad \dots$$

Числа S_1, S_2, \dots, S_n называют **частичными суммами ряда** $\sum u_n$.

Определение. Ряд $\sum u_n$ называется **сходящимся**, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм $\{S_n\}$.

При этом, число $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ называют **суммой ряда** $\sum u_n$.

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \nexists$) то говорят, что ряд $\sum u_n$ **расходится** и не имеет суммы.

Если S – сумма ряда $\sum u_n$, то записывают: $\sum u_n = S$.

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots$$

*ряд геометрической
прогрессии*

Будет ли этот ряд сходиться? $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = ?$

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = \begin{cases} a \frac{1 - q^n}{1 - q}, & \text{если } q \neq 1, \\ a \cdot n, & \text{если } q = 1. \end{cases}$$

1. $|q| < 1$ $n \rightarrow \infty \Rightarrow q^n \rightarrow 0 \Rightarrow S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1 - q} \Rightarrow$
ряд сходится

2. $|q| > 1$ $n \rightarrow \infty \Rightarrow q^n \rightarrow \infty \Rightarrow S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty \Rightarrow$
ряд расходится

3. $q = -1$ $S_n = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ четное,} \\ a, & \text{если } n \text{ нечетное.} \end{cases} \Rightarrow$ ряд расходится

4. $q = 1$ $S_n = an$ $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty \Rightarrow$ ряд расходится

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots$$

*ряд геометрической
прогрессии*

ряд сходится при $|q| < 1$ $S = \frac{a}{1-q}$

ряд расходится при $|q| \geq 1$

Основные задачи теории рядов:

- 1) Определить, сходится или расходится заданный ряд
(говорят: «*исследовать ряд на сходимость*»)
- 2) Найти сумму сходящегося ряда.

Найти точное значение суммы S сходящегося ряда удается редко. Обычно полагают $S \approx S_n$, где n выбирают так, чтобы

$$|R_n| = |S - S_n| < \varepsilon \quad (\varepsilon \text{ заранее задано}).$$

Число R_n называют *остатком ряда*.

Свойства числовых рядов

Теорема 1. Поведение ряда относительно сходимости не изменится, если добавить (отбросить) конечное число членов ряда.

Теорема 2.

Если ряд $\sum u_n$ сходится и его сумма равна U ,

ряд $\sum v_n$ сходится и его сумма равна V ,

то а) ряд $\sum c u_n$ – сходится и его сумма равна cU ($\forall c \in \mathbb{R}$);

б) ряд $\sum (u_n \pm v_n)$ – сходится и его сумма равна $U \pm V$.

Следствие

1) Если $\sum u_n$ расходится, то $\forall c \neq 0$ ($c \in \mathbb{R}$) ряд $\sum c u_n$ – тоже расходится.

2) Если ряд $\sum u_n$ сходится, а ряд $\sum v_n$ расходится, то ряд $\sum (u_n \pm v_n)$ – расходится.

Теорема 3 (необходимый признак сходимости ряда).

Если ряд $\sum u_n$ сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Следствие (достаточное условие расходимости ряда)

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, то ряд $\sum u_n$ расходится.

Замечание. Если условие $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ выполнено, то о сходимости ряда ничего сказать нельзя. Ряд может как сходиться, так и расходиться.

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

гармонический ряд

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, но ряд расходится

Теорема 4 (закон ассоциативности для сходящихся рядов).

Пусть ряд $\sum u_n$ сходится и его сумма равна U

Если сгруппировать члены этого ряда, **НЕ ИЗМЕНЯЯ ИХ ПОРЯДКА**, то полученный в результате этого ряд будет сходиться и иметь ту же сумму U .

Признаки сходимости знакоположительных рядов

Теорема (первый признак сравнения).

Пусть $\sum u_n$ и $\sum v_n$ – знакоположительные ряды, причем

$$u_n \leq v_n \text{ для всех } n.$$

Тогда

- 1) если ряд $\sum v_n$ сходится, то и ряд $\sum u_n$ тоже сходится;
- 2) если ряд $\sum u_n$ расходится, то и ряд $\sum v_n$ тоже расходится.

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{Сравним с гармоническим рядом:} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ – расходится} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ – тоже расходится}$$

Теорема (второй признак сравнения).

Пусть $\sum u_n$ и $\sum v_n$ – знакоположительные ряды.

Если при $n \rightarrow \infty$ существует **конечный и отличный от нуля** предел отношения их общих членов, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = k \neq 0,$$

то ряды $\sum u_n$ и $\sum v_n$ ведут себя одинаково по отношению к сходимости.

Пример.

$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ Сравним с гармоническим рядом: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \left(\frac{0}{0} \right) = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{ведут себя одинаково}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ – расходится} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} \text{ – тоже расходится}$$

Эталонные ряды, которые используются в признаках сравнения:

а) **гармонический** ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – расходится;

б) **обобщенный гармонический** ряд (ряд **Дирихле**)
 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ – $\begin{cases} \text{сходится, если } \alpha > 1, \\ \text{расходится, если } \alpha \leq 1. \end{cases}$

в) ряд **геометрической прогрессии**

$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ – $\begin{cases} \text{сходится, если } |q| < 1, \\ \text{расходится, если } |q| \geq 1. \end{cases}$

Теорема (признак Даламбера).

Пусть $\sum u_n$ – знакоположительный ряд и существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell.$$

Тогда

- а) если $\ell < 1$, то ряд сходится;
- б) если $\ell > 1$, то ряд расходится;
- в) если $\ell = 1$, то вопрос о сходимости ряда остается открытым.

Пример.

Исследовать на сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \cdot n!}{n^n}$$

Теорема (признак Коши).

Пусть $\sum u_n$ – знакположительный ряд и существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell.$$

Тогда

- а) если $\ell < 1$, то ряд сходится;
- б) если $\ell > 1$, то ряд расходится;
- в) если $\ell = 1$, то вопрос о сходимости ряда остается открытым.

Пример.

Исследовать на сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$$

Замечания.

- 1) В обеих теоремах случай $\ell = \infty$ включается в $\ell > 1$.
- 2) В ходе доказательства признаков Даламбера и Коши показывается, что если $\ell > 1$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$$

Теорема (интегральный признак Коши).

Пусть $\sum u_n$ – знакоположительный ряд,

$f(x)$ – непрерывная, неотрицательная, монотонно убывающая на $[c; +\infty)$ (где $c \in \mathbb{N}$, $c \geq 1$) функция такая, что

$$f(n) = u_n \quad (\text{для любого } n = 1, 2, 3 \dots).$$

Тогда несобственный интеграл $\int_c^{+\infty} f(x) dx$ и ряд $\sum_{n=c}^{\infty} u_n$

ведут себя одинаково относительно сходимости.

Пример.

Исследовать на сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad (\alpha > 1)$$

Признак сходимости знакопеременных рядов

Рассмотрим частный случай знакопеременных рядов.

Определение. Ряд, у которого любые рядом стоящие члены имеют противоположные знаки, называется **знакопеременным**.

Будем считать, что 1-й член знакопеременного ряда положителен.

⇒ знакопеременный ряд имеет вид:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots (-1)^{n+1} u_n + \dots = \sum (-1)^{n+1} \cdot u_n,$$

где $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$$

Теорема (признак сходимости Лейбница).

Пусть знакочередующийся ряд $\sum (-1)^{n+1} \cdot u_n$ удовлетворяет условиям:

1) члены ряда монотонно убывают по абсолютной величине, т.е.

$$u_1 > u_2 > \dots > u_n > \dots,$$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Тогда ряд $\sum (-1)^{n+1} \cdot u_n$ сходится, причем его сумма S положительна и не превосходит первого члена ряда.

Пример.

Исследовать на сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Замечания.

- 1) Ряд $\sum(-1)^{n+1} \cdot u_n$ будет сходиться и в том случае, когда условие 1 теоремы Лейбница выполняется, начиная с некоторого номера N . Но утверждение о сумме ряда в этом случае не будет иметь места.
- 2) Если ряд $\sum(-1)^{n+1} \cdot u_n$ удовлетворяет условиям теоремы Лейбница, то погрешность, получаемая при замене суммы ряда S его частичной суммой S_n , не превосходит модуля первого отбрасываемого члена, т.е.

$$|R_n| = |S - S_n| < u_{n+1}$$

- 3) Если ряд $\sum(-1)^{n+1} \cdot u_n$ не удовлетворяет 2-му условию теоремы Лейбница, то он расходится (т.к. не выполнено необходимое условие сходимости).

Если ряд $\sum(-1)^{n+1} \cdot u_n$ удовлетворяет 2-му условию теоремы Лейбница, но не удовлетворяет ее 1-му условию, то о сходимости ряда ничего сказать нельзя.

Абсолютная и условная сходимость знакопеременных рядов

Пусть $\sum u_n$ – знакопеременный ряд.

Рассмотрим ряд $\sum |u_n|$.

Теорема (признак абсолютной сходимости).

Если ряд $\sum |u_n|$ сходится, то ряд $\sum u_n$ тоже сходится.

Замечание. Признак абсолютной сходимости достаточный, но не необходимый. Т.е. существуют сходящиеся знакопеременные ряды $\sum u_n$, для которых $\sum |u_n|$ – расходится.

Определение. Ряд $\sum u_n$ называют **абсолютно сходящимся**, если его ряд модулей $\sum |u_n|$ сходится.

*Если ряд $\sum u_n$ – сходится, а его ряд модулей $\sum |u_n|$ – расходится, то ряд $\sum u_n$ называют **условно сходящимся**.*

Пример.

Исследовать на сходимость ряд:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(\sqrt{n} + (-1)^{n+1})^4}$$

Теорема (признак сходимости Лейбница).

Пусть знакочередующийся ряд $\sum (-1)^{n+1} \cdot u_n$ удовлетворяет условиям:

1) члены ряда монотонно убывают по абсолютной величине, т.е.

$$u_1 > u_2 > \dots > u_n > \dots,$$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Тогда ряд $\sum (-1)^{n+1} \cdot u_n$ сходится, причем его сумма S положительна и не превосходит первого члена ряда.

Теорема (признак абсолютной сходимости).

Если ряд $\sum |u_n|$ сходится, то ряд $\sum u_n$ тоже сходится.

Определение. Ряд $\sum u_n$ называют **абсолютно сходящимся**, если его ряд модулей $\sum |u_n|$ сходится.

Если ряд $\sum u_n$ – сходится, а его ряд модулей $\sum |u_n|$ – расходится, то ряд $\sum u_n$ называют **условно сходящимся**.

Теорема (о перестановке членов ряда).

а) Если ряд $\sum u_n$ сходится абсолютно, то ряд, полученный из него в результате перестановки членов, также сходится абсолютно и имеет ту же сумму.

б) Если ряд $\sum u_n$ сходится условно, то можно так переставить члены ряда, что сумма получившегося ряда будет равна любому, заранее заданному числу.

Более того, можно так переставить члены ряда, что получившийся ряд будет расходиться (**теорема Римана**).

Теорема.

Если ряды $\sum u_n$ и $\sum v_n$ сходятся абсолютно, то ряд $\sum(\alpha u_n \pm \beta v_n)$ тоже сходится абсолютно ($\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$).

Следствие.

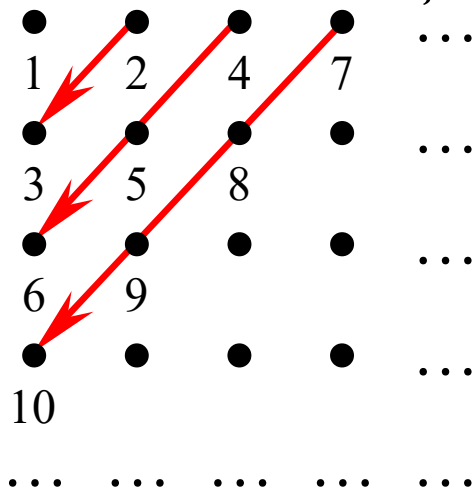
Если ряд $\sum u_n$ – сходится абсолютно,
 $\sum v_n$ – сходится условно,
то ряд $\sum(\alpha u_n \pm \beta v_n)$ сходится условно ($\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$).

Пусть даны два ряда: $\sum u_n$ и $\sum v_n$.

Составим таблицу из всевозможных парных произведений членов этих рядов:

u_1v_1	u_1v_2	u_1v_3	...	u_1v_n	...
u_2v_1	u_2v_2	u_2v_3	...	u_2v_n	...
u_3v_1	u_3v_2	u_3v_3	...	u_3v_n	...
.....					

Определение. *Произведением рядов $\sum u_n$ и $\sum v_n$ называют ряд, составленный из элементов таблицы в следующем порядке:*



Итак: $\sum u_n \cdot \sum v_n = u_1v_1 + \underbrace{u_1v_2 + u_2v_1}_{\dots} + \underbrace{u_1v_3 + u_2v_2 + u_3v_1}_{\dots} + \dots$

Теорема (о сходимости произведения рядов).

Пусть ряды $\sum u_n$ и $\sum v_n$ сходятся абсолютно и их суммы равны U и V соответственно.

Тогда ряд $\sum u_n \cdot v_n$ тоже сходится абсолютно и его сумма равна $U \cdot V$.

Теорема (признак Дирихле).

Пусть 1) последовательность $\{a_n\}$ монотонна и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$;

2) последовательность частичных сумм ряда $\sum b_n$ ограничена.

Тогда ряд $\sum a_n \cdot b_n$ – сходится .

Теорема (признак Абеля).

Пусть 1) $\{a_n\}$ монотонная и ограниченная;

2) ряд $\sum b_n$ – сходится.

Тогда ряд $\sum a_n \cdot b_n$ – сходится

§ 2. Функциональные ряды

Пусть задана последовательность функций $\{f_n(x)\}$ с общей областью определения D .

Определение. Выражение вида

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

называют **функциональным рядом**.

Пусть $x_0 \in D$. Рассмотрим числовой ряд $\sum f_n(x_0)$.

Если ряд $\sum f_n(x_0)$ сходится, то говорят, что **ряд** $\sum f_n(x)$ **сходится в точке** x_0 .

Множество $D_1 = \{ x_0 \in D \mid \sum f_n(x_0) \text{ — сходится} \}$

называют **областью сходимости функционального ряда** $\sum f_n(x)$.

Функция $f(x)$, определенная на множестве D_1 и такая, что ее значение в любой точке $x_0 \in D_1$ совпадает с суммой числового ряда $\sum f_n(x_0)$, называется **суммой функционального ряда** $\sum f_n(x)$ (**1-е определение суммы функционального ряда**).

Построим последовательность

$$S_1(x) = f_1(x), \quad S_2(x) = f_1(x) + f_2(x), \quad \dots,$$
$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x), \quad \dots$$

Функции $S_1(x)$, $S_2(x)$, \dots , $S_n(x)$ называются **частичными суммами ряда** $\sum f_n(x)$.

Множество $D_2 = \{ x_0 \in D \mid \{S_n(x_0)\} \text{ —сходится} \}$

называют **областью сходимости функциональной последовательности** $\{S_n(x)\}$.

Функция $f(x)$, определенная на D_2 и такая, что $f(x_0)$ совпадает с пределом последовательности $\{S_n(x_0)\}$ ($\forall x_0 \in D_2$), называется **пределом функциональной последовательности** $\{S_n(x)\}$.

Но $S_n(x_0)$ – частичная сумма числового ряда $\sum f_n(x_0)$.

\Rightarrow а) $D_1 = D_2$;

б) Предел функциональной последовательности $\{S_n(x)\}$ есть сумма ряда $\sum f_n(x)$

(2-е определение суммы функционального ряда).

Пример.

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$$

Зафиксировав x_0 , мы получаем ряд геометрической прогрессии:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_0^{n-1}$$

Этот ряд сходится при $|x_0| < 1$.

То есть областью сходимости является интервал: $(-1, 1)$.

$$\text{Сумма ряда: } f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Основные задачи теории функциональных рядов:

1) *Определить область сходимости функционального ряда*

Область сходимости функционального ряда D_1 находится с помощью признаков сходимости числовых рядов.

2) *Найти сумму функционального ряда (в области сходимости).*

Сумму ряда обычно находят только приближенно.

Полагают $f(x) \approx S_n(x)$, где n выбирают так, чтобы
 $|f(x) - S_n(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in D_1$ (ε заранее задано).

3) *Определить, какие из свойств конечных сумм функций будут верны и для функциональных рядов, которые представляют собой бесконечные суммы.*

Многие свойства конечных сумм сохраняются для так называемых равномерно сходящихся рядов.

Возьмём точку x_0 из области сходимости: $x_0 \in D_1$.

Тогда последовательность частичных сумм:

$$S_1(x_0), S_2(x_0), \dots, S_n(x_0), \dots$$

сходится к некоторому числу $f(x_0)$.

По определению предела последовательности это означает, что для $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n > N$ выполняется

$$|S_n(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

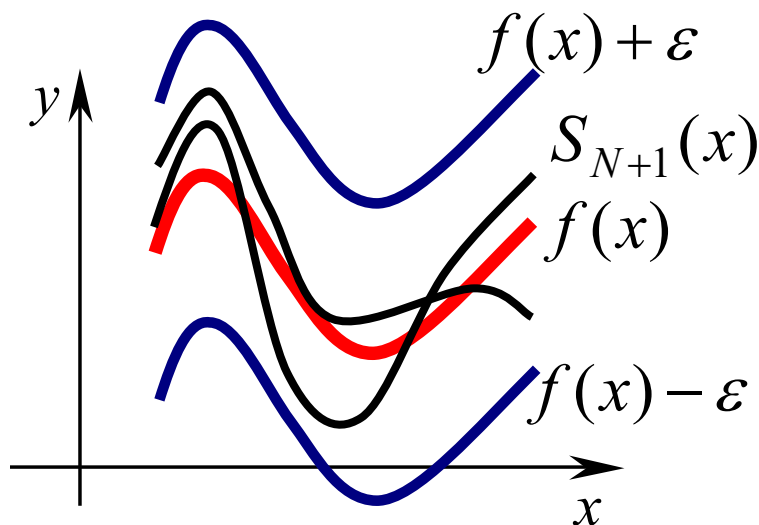
Но номер N для каждого x_0 свой.

Понятие равномерной сходимости возникает из требования, чтобы для всех $x_0 \in D_1$ существовал бы общий номер N .

Определение. Функциональный ряд $\sum f_n(x)$ называется **равномерно сходящимся** к $f(x)$ на множестве $H \subset D_1$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ такое, что

$$|S_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall n > N \text{ и } \forall x \in H$$

Геометрический смысл



Если $\sum f_n(x)$ сходится к $f(x)$ на множестве равномерно $H \subset D_1$, то в любой ε -полоске функции $f(x)$ находятся все частичные суммы ряда, за исключением, возможно, конечного их числа.

Определение. Говорят, что функциональный ряд $\sum f_n(x)$ **мажорируется** на множестве H числовым рядом $\sum a_n$, если $|f_n(x)| < a_n, \forall n, \forall x \in H$.

Теорема (признак равномерной сходимости Вейерштрасса).

Если ряд $\sum f_n(x)$ мажорируется на H сходящимся числовым рядом $\sum a_n$, то он сходится на H равномерно.

Примеры.

1.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

2.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$$

Замечание.

Признак Вейерштрасса является достаточным, но не является необходимым. То есть существуют равномерно сходящиеся ряды, для которых не удастся подобрать мажорирующий сходящийся ряд.

Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов

- 1) Если $\sum f_n(x)$ сходится на промежутке H равномерно и $\varphi(x)$ – ограничена на H , то ряд $\sum \varphi(x)f_n(x)$ тоже сходится на H равномерно.

2) Пусть $\sum f_n(x)$ сходится к $f(x)$ на промежутке H равномерно, $x_0 \in H$ и существуют $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = c_n$

Тогда: а) числовой ряд $\sum c_n$ сходится;

б) сумма ряда $\sum c_n$ равна $c = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

Иначе говоря,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right)$$

3) Если ряд $\sum f_n(x)$ сходится на промежутке H равномерно и в точке $x_0 \in H$ все функции $f_n(x)$ непрерывны, то сумма ряда $f(x)$ тоже непрерывна в точке x_0 .

4) Если функции $f_n(x)$ непрерывны на промежутке H и ряд $\sum f_n(x)$ сходится на H равномерно к $f(x)$, то $\forall x_0, x \in H$ ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{x_0}^x f_n(t) dt \right)$$

тоже сходится на H равномерно и его сумма равна

$$\int_{x_0}^x f(t) dt$$

Замечание: Говорят «ряд можно почленно интегрировать» и пишут:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{x_0}^x f_n(t) dt \right) = \int_{x_0}^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) \right) dt$$

5) Пусть функции $f_n(x)$ непрерывно дифференцируемы на промежутке H и ряд $\sum f_n(x)$ сходится на H к $f(x)$.

Если ряд $\sum f_n'(x)$ сходится на H равномерно, то ряд $\sum f_n(x)$ тоже сходится на H равномерно, его сумма $f(x)$ является функцией непрерывно дифференцируемой и имеет место равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x) = f'(x)$$

Замечание: Говорят «ряд можно почленно дифференцировать» и пишут:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right)'$$

§3. Степенные ряды

Степенным рядом (рядом по степеням $x-x_0$) называется функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

где $a_n, x_0 \in \mathbb{R}$. Числа a_n называются **коэффициентами степенного ряда**.

Частный случай степенного ряда – **ряд по степеням x** :

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$$

Будем изучать ряд $\sum a_nx^n$. На общий случай результаты переносятся заменой $t = x - x_0$.

Сходимость степенных рядов

Степенной ряд $\sum a_n x^n$ всегда сходится в точке $x = 0$.

Теорема (Абеля).

- 1) Если степенной ряд $\sum a_n x^n$ сходится в точке $x_1 \neq 0$, то он сходится абсолютно в любой точке x , удовлетворяющей условию $|x| < |x_1|$;
- 2) Если степенной ряд $\sum a_n x^n$ расходится в точке x_2 , то он расходится в любой точке x , удовлетворяющей условию $|x| > |x_2|$.

Из теоремы Абеля $\Rightarrow \exists R > 0$ такое, что ряд $\sum a_n x^n$ сходится (абсолютно) при $|x| < R$ и расходится при $|x| > R$.

Число R называют **радиусом сходимости** ряда $\sum a_n x^n$.

Интервал $(-R; R)$ называют **интервалом сходимости** ряда $\sum a_n x^n$.

$$R = \frac{1}{\ell}, \text{ где}$$

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \quad \text{или} \quad \ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Замечания.

- 1) Полученные формулы справедливы, если ряд $\sum a_n x^n$ – **«полный»** (то есть присутствуют все степени x).
- 2) Допускается $R = 0$ (ряд сходится только в точке 0) и $R = +\infty$ (ряд сходится на всей числовой оси)
- 3) На границе интервала сходимости поведение степенного ряда необходимо исследовать отдельно, то есть исследовать на сходимость ряды $\sum a_n R^n$ и $\sum a_n (-R)^n$.
- 4) Для ряда $\sum a_n (x - x_0)^n$ интервал сходимости имеет вид:

$$|x - x_0| < R \Leftrightarrow (x_0 - R; x_0 + R).$$

Если ряд $\sum a_n (x - x_0)^n$ – «полный», то полученные формулы для него тоже справедливы.

Примеры.

1.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

2.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n \cdot 2^{n-1}}$$

3.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

Свойства степенных рядов

1. Степенной ряд равномерно сходится в интервале сходимости.
2. Ряды $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)''$, $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)'''$, ..., $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)^{(k)}$ имеют тот же радиус сходимости, что и ряд $\sum a_n x^n$

Тогда из свойств равномерно сходящихся рядов также следует:

3. Сумма степенного ряда является непрерывной функцией в интервале сходимости.
4. Степенной ряд можно почленно интегрировать в интервале сходимости.
5. Степенной ряд можно почленно дифференцировать в интервале сходимости любое число раз.

Замечание.

Если конец интервала сходимости входит в область сходимости, то сумма степенного ряда будет в этой точке непрерывна, так как справедлива следующая теорема.

Теорема (Абеля о сумме степенного ряда на концах интервала сходимости).

Пусть ряд $\sum a_n x^n$ сходится на $(-R ; R)$ к функции $S(x)$.

Если ряд сходится на концах интервала сходимости, то его сумма в этих точках равна соответственно

$$S(-R) = \lim_{x \rightarrow -R+0} S(x),$$

$$S(R) = \lim_{x \rightarrow R-0} S(x).$$

§4. Разложение функции в степенной ряд

Цель: Найти функциональный ряд, суммой которого на промежутке X будет заданная функция $f(x)$.

Определение. Говорят, что **функция $f(x)$ разложима в ряд** на промежутке X , если \exists функциональный ряд $\sum f_n(x)$, суммой которого на X является $f(x)$.

Будем искать разложение функции в степенной ряд.

Задачи:

- 1) Найти условия, при которых функция $f(x)$ разложима в степенной ряд.
- 2) Указать этот степенной ряд.

Пусть $f(x)$ – бесконечное число раз дифференцируема в окрестности точки x_0 .

Определение. *Рядом Тейлора функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 (по степеням $x - x_0$) называется степенной ряд вида*

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Ряд Тейлора функции $f(x)$ по степеням x (т.е. $x_0 = 0$)

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

называют **рядом Маклорена**

Теорема (о разложении функции в степенной ряд).

Если функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд в окрестности точки x_0 , то этот ряд является ее рядом Тейлора по степеням $x - x_0$.

Замечание.

Существование для функции ряда Тейлора не гарантирует разложение функции в степенной ряд.

Сумма ряда Тейлора функции $f(x)$ может не совпадать с самой функцией $f(x)$.

Пусть $f(x)$ – бесконечно дифференцируема в окрестности x_0 .

\Rightarrow для $f(x)$ можно записать ряд Тейлора по степеням $x - x_0$.

Пусть $S_n(x)$ – n -я частичная сумма этого ряда, т.е.

$$S_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

$S_n(x)$ называют **многочленом Тейлора функции $f(x)$ по степеням $x - x_0$** .

Пусть $R_n(x) = f(x) - S_n(x)$

$R_n(x)$ называют **остаточным членом ряда Тейлора**.

Теорема (необходимое и достаточное условие разложения функции в ряд Тейлора).

Ряд Тейлора по степеням $x - x_0$ для функции $f(x)$ сходится к $f(x)$ в некоторой окрестности точки $x_0 \Leftrightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0.$$

Теорема (достаточное условие разложения функции в ряд Тейлора).

Если функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 и все ее производные ограничены в совокупности (то есть $\exists M > 0$, такое что $|f^{(n)}(x)| < M$ для $\forall n$ и $\forall x$ из окрестности точки x_0), то $f(x)$ разлагается в этой окрестности в ряд Тейлора по степеням $x - x_0$.

Записав ряд Тейлора функции $f(x)$ необходимо:

- 1)** Найти область сходимости полученного степенного ряда (использовать признаки Коши или Даламбера).
- 2)** Выяснить, будет ли суммой ряда функция $f(x)$ (использовать достаточные условия разложения функции в ряд Тейлора).
- 3)** Выяснить, будет ли ряд сходиться равномерно (по свойству степенных рядов сходится равномерно в интервале сходимости).

Стандартные разложения Маклорена

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad (-\infty, \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (-\infty, \infty)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad (-1, 1]$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (-\infty, \infty)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots \quad (-1, 1)$$

Частный случай: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (-1, 1)$

$$sh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \quad (-\infty, \infty)$$

$$ch x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad (-\infty, \infty)$$

§5. Тригонометрические ряды Фурье

Определение. Тригонометрическим рядом называется функциональный ряд вида

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos \omega_1 x + b_1 \sin \omega_1 x) + (a_2 \cos \omega_2 x + b_2 \sin \omega_2 x) + \dots = \\ = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n x + b_n \sin \omega_n x) \end{aligned} \quad (1)$$

где a_0, a_n, b_n ($n = 1, 2, \dots$) – числа (**коэффициенты ряда (1)**),

$$\omega_n = \frac{n\pi}{\ell} \quad (n \in \mathbb{N}, \ell > 0)$$

Замечание. Свободный член ряда (1) записан в виде дроби для единообразия последующих формул.

Справедливы утверждения:

- 1) Если $S(x)$ – сумма ряда (1), то $S(x)$ – периодическая, с периодом $T = 2\ell$.
- 2) Если ряд (1) сходится на отрезке, длиной 2ℓ , то он сходится на всей числовой оси.

В общем случае область сходимости ряда (1) – объединение интервалов вида $(a + 2\ell k ; b + 2\ell k)$, где a, b – некоторые числа, $k \in \mathbb{Z}$

Пусть $f(x)$ – периодическая функция ($T = 2\ell$).

Задачи:

- 1) Разложима ли $f(x)$ в тригонометрический ряд?
- 2) Если $f(x)$ разложима в тригонометрический ряд, то как найти его коэффициенты?

Замечания.

1) Периодическую функцию достаточно рассматривать на любом отрезке длиной T .

Удобнее всего брать отрезок $[-\ell ; \ell]$ (где $T = 2\ell$).

2) Имеют место следующие равенства:

$$\int_{-\ell}^{\ell} \sin \omega_n x dx = 0, \quad \int_{-\ell}^{\ell} \cos \omega_n x dx = 0. \quad \int_{-\ell}^{\ell} \sin \omega_n x \cdot \cos \omega_k x dx = 0.$$

$$\int_{-\ell}^{\ell} \sin \omega_n x \cdot \sin \omega_k x dx = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq k; \\ \ell, & \text{если } n = k. \end{cases}$$

$$\int_{-\ell}^{\ell} \cos \omega_n x \cdot \cos \omega_k x dx = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq k; \\ \ell, & \text{если } n = k. \end{cases}$$

Пусть $f(x)$ – периодическая функция ($T = 2\ell$),

$f(x)$ – сумма тригонометрического ряда на $[-\ell ; \ell]$, т.е.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n x + b_n \sin \omega_n x). \quad (1)$$

Пусть ряд сходится к $f(x)$ на $[-\ell ; \ell]$ равномерно.

Тогда 1) $f(x)$ – непрерывна на $[-\ell ; \ell]$;

2) $f(x)$ – интегрируема на $[-\ell ; \ell]$, причем

$$a_0 = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) dx, \quad (2)$$

$$a_n = \frac{1}{\ell} \cdot \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cdot \cos \omega_n x dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (3)$$

$$b_n = \frac{1}{\ell} \cdot \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cdot \sin \omega_n x dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (4)$$

Определение. Тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n x + b_n \sin \omega_n x),$$

коэффициенты которого находятся по формулам (2), (3), (4), называется **тригонометрическим рядом Фурье функции $f(x)$** .

Коэффициенты, определяемые по формулам (2), (3), (4) называются **коэффициентами Фурье функции $f(x)$** .

Таким образом, справедлива теорема:

Теорема (о разложении функции в тригонометрический ряд).

Если функция разлагается в тригонометрический ряд, то этот ряд является ее тригонометрическим рядом Фурье.

Записав тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ необходимо:

- 1) Найти область сходимости полученного ряда.
- 2) Выяснить, будет ли суммой ряда функция $f(x)$.
- 3) Выяснить, будет ли ряд сходиться равномерно.

Теорема (Дирихле).

Пусть $f(x)$ – периодическая ($T=2\ell$), удовлетворяющая условиям:

- 1) $f(x)$ на $[-\ell ; \ell]$ непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода;
- 2) $f(x)$ на $[-\ell ; \ell]$ монотонна или имеет конечное число точек экстремумов.

Тогда тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится на всей числовой прямой и его суммой будет функция $S(x)$, определенная следующим образом:

а) $S(x) = f(x)$, если x – точка непрерывности $f(x)$;

б) $S(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$, если x – точка разрыва $f(x)$.

При этом тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится равномерно на любом отрезке, целиком лежащем в интервале непрерывности функции $f(x)$.

Условия теоремы называются **условиями Дирихле**.

Функция, удовлетворяющая 2-му условию Дирихле, называется **кусочно-монотонной**.

Теорема (2-е достаточное условие разложения функции в тригонометрический ряд).

Пусть $f(x)$ – периодическая функция ($T = 2\ell$).

Если на $[-\ell ; \ell]$ функция $f(x)$ и ее производная $f'(x)$ непрерывны или имеют конечное число точек разрыва первого рода, то тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится на всей числовой прямой и его суммой будет функция $S(x)$, определенная следующим образом:

а) $S(x) = f(x)$, если x – точка непрерывности $f(x)$;

б) $S(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$, если x – точка разрыва $f(x)$.

При этом тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится равномерно на любом отрезке, целиком лежащем в интервале непрерывности функции $f(x)$.

Функция, удовлетворяющая условию теоремы, называется **кусочно-гладкой**.

Разложение в тригонометрический ряд Фурье четных и нечетных функций

Пусть $f(x)$ – периодическая, $T = 2\ell$.

а) Пусть $f(x)$ – **четная**.

Ее тригонометрический ряд Фурье:
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \omega_n x,$$

где
$$a_n = \frac{2}{\ell} \cdot \int_0^{\ell} f(x) \cdot \cos \omega_n x dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots), \quad (5)$$

б) Пусть $f(x)$ – **нечетная**.

Ее тригонометрический ряд Фурье:
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \omega_n x,$$

где
$$b_n = \frac{2}{\ell} \cdot \int_0^{\ell} f(x) \cdot \sin \omega_n x dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (6)$$

Разложение в тригонометрический ряд Фурье непериодических функций, заданных на $(-\ell; \ell)$ или $[0; \ell)$

a) Пусть $f(x)$ задана на $(-\ell; \ell)$ и удовлетворяет на $[-\ell; \ell]$ условиям Дирихле (или является кусочно-гладкой).

Периодически продолжаем $f(x)$ на \mathbb{R} ,
т.е. задаем функцию $F(x)$ такую, что

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x), \quad \forall x \in (-\ell; \ell), \\ F(x + 2\ell k) &= F(x), \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ряд Фурье функции $F(x)$, рассматриваемый только на интервале $(-\ell; \ell)$, называют **рядом Фурье функции $f(x)$ на $(-\ell; \ell)$** .

б) Пусть $f(x)$ задана на $[0 ; \ell)$ (или $(0 ; \ell)$) и удовлетворяет на $[0 ; \ell]$ условиям Дирихле (или является кусочно-гладкой)

Доопределяем $f(x)$ на $(-\ell ; 0)$ (четным или нечетным образом).

Получившуюся функцию $\bar{f}(x)$ периодически продолжаем на \mathbb{R} .

Ряд Фурье периодического продолжения функции $\bar{f}(x)$, рассматриваемый только на $[0 ; \ell)$, называют **рядом Фурье функции $f(x)$ на $[0 ; \ell)$** .

Замечания.

- 1)** Доопределение функции на $f(x)$ четным или нечетным образом позволяет избежать нахождения аналитического выражения функции $f(x)$ на $(-\ell ; 0)$ (т.к. коэффициенты Фурье находятся по формулам (5) или (6)).
- 2)** Если $f(0) \neq 0$, то $f(x)$ лучше продолжать на $(-\ell ; 0)$ четным образом (т.к. 0 в этом случае будет точкой непрерывности функции $f(x)$).
Если $f(0) = 0$, то продолжать $f(x)$ на $(-\ell ; 0)$ можно как четным, так и нечетным образом.
- 3)** Если функция задана на $[0 ; \ell)$, то она разлагается в ряд Фурье не единственным образом.