Тема 1. «Понятие числового ряда. Сходимость знакоположительных рядов»

1. Найти сумму ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}.\qquad \text{Ответ: } S=\frac{11}{18}.$$

2. Исследовать ряды с помощью необходимого признака сходимости:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n-1}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2^n+1)^2}{4n}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+10}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n^2+2)\ln\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)$.

3. Исследовать на сходимость с помощью первого признака сравнения:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{5^n+1}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-1}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+5)}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^{2n-1}}$;

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$;

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 2^n}{n^2+3}$.

4. Исследовать на сходимость с помощью второго признака сравнения:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4\cdot 2^n-3}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{5^n+1}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+2)}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-4n+5}$;

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}tg\left(\frac{\pi}{4n}\right)$;

з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{arctgn}{n^2+1}$;

и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$;

к) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+n-1}\right)$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{2n-1}$;

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$;

л) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$;

м) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}$.

Тема 2. «Сходимость знакоположительных рядов»

1. Исследовать на сходимость с помощью признака Даламбера:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^{10}}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{n!}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(2n)!}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{3^{2n+1}}$;

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$;

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$;

з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n^2}\cdot\ln n}{(n!)^2}$;

и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{1\cdot 5\cdot\ldots\cdot(4n-3)}$.

2. Исследовать ряды на сходимость с помощью признака Коши:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+2n+1}{5n^2+2n+1}\right)^n$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(n+1)}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\cdot\arcsin^n\left(\frac{1}{n}\right)$;

д) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$.

3. Исследовать ряды на сходимость с помощью интегрального признака:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot\ln(n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot\ln^2(n+1)}$; в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{3n}{(n^2-2)\cdot\ln(2n+1)}$.

Тема 3. «Сходимость знакопеременных рядов»

Исследовать сходимость рядов. Определить характер сходимости

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot n$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$;

6) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{n-2}{3n-1}$;

8) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n^2+n+1}$;

9) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{\ln^2 n}{n}$.

Тема 4. «Функциональные ряды»

I. Найти область сходимости рядов:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{e^{nx}}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\cdot\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x(x+n)}{n}\right]^n$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$;

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$;

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n}$;

10*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\cdot\frac{1}{1+a^{2n}x^2}$;

Тема 5. «Степенные ряды»

I. Найти область сходимости степенных рядов:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 10^n \cdot x^n$; **Ответ:** $(-0{,}1;\ 0{,}1)$.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{x^n}{n^2}$; **Ответ:** $[-1;\ 1]$.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-1)^n}{n \cdot 10^{n-1}}$; **Ответ:** $[-9;\ 11)$.

4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n! \cdot (x+5)^n$; **Ответ:** $x=-5$.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+2)^n}{n^n}$; **Ответ:** $\mathbb{R}$

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2x-3)^n \cdot (-1)^{n+1}}{2n-1}$; **Ответ:** $(1;\ 2]$

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n \cdot (x+1)^{5n}}{2n+1}$; **Ответ:** $\left[-\dfrac{1}{\sqrt[5]{2}}-1;\ \dfrac{1}{\sqrt[5]{2}}-1\right)$.

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-4)^{2n-1}}{n}$. **Ответ:** $(3;\ 5)$.

Тема 6. «Разложение функции в степенной ряд»

Для функции $y=f(x)$ записать ряд Тейлора по степеням $x-x_0$:

1) $y=a^x$, $x_0=0$

2) $y=e^x \cdot \sin x$, $x_0=0$

Разложить в степенной ряд функцию, пользуясь готовыми разложениями:

3) $y=a^x$,

4) $y=\sin 2x$,

5) $y=e^{-x^2}$

6) $y=x \cdot \sin x$

9) $y=\sin^2 x$

10) $y=\ln(2+x)$

11) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

12) $y=\dfrac{x^{10}}{1-x}$

7) $y=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$

13) $y=\dfrac{x}{1+x-2x^2}$

8) $y=\sqrt{4-x^2}$

14) $y=\dfrac{1}{x^2-x+1}$

Разложить в степенной ряд, почленно проинтегрировав ряд производных:

15) $y=(1+x)\cdot e^{-x}$, $x_0=0$

16) $y=(1+x^2)arctgx$, $x_0=0$

Тема 7. «Применение степенных рядов»

I. Вычислить:

1) Вычислить $\sqrt{e}$ с точностью $\varepsilon=0{,}001$ **Ответ:** $\approx 1{,}648$

2) Вычислить $\ln 1{,}25$ с точностью $\varepsilon=0{,}00001$. **Ответ:** $\approx 0{,}22314$

3) Вычислить $\sqrt[3]{30}$ с точностью $\varepsilon=0{,}001$. **Ответ:** $\approx 3{,}107$

II. Найти интегралы с точностью $\varepsilon=0{,}0001$

а) $\int\limits_{0,1}^{0,2}\dfrac{e^{-x}dx}{x^3}$ **Ответ:** 32,8305

б) $\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx$, **Ответ:** 0,7468

в) $\int\limits_0^{0,5}\dfrac{1-\cos x}{x^2}dx$ **Ответ:** 0,2483

г) $\int\limits_2^{+\infty}\dfrac{dx}{1+x^3}$ **Ответ:** 0,1192

III. Разлагая функции в ряд, найти пределы

а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2e^x-2-2x-x^2}{x-\sin x}\right)$ **Ответ:** 2

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x-arctgx}{x^3}\right)$ **Ответ:** $\dfrac{1}{6}$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}\right)$ **Ответ:** $\dfrac{1}{3}$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2(tgx-\sin x)-x^3}{x^5}\right)$ **Ответ:** $\dfrac{1}{4}$

д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{ctgx}{x}\right)$ **Ответ:** $\dfrac{1}{3}$

IV. Найти первые 6 членов разложения ряд Тейлора (Маклорена) решения дифференциального уравнения

а) $y''=yy'-x^2$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

Ответ: $y(x)=1+\dfrac{1}{1!}x+\dfrac{1}{2!}x^2+\dfrac{2}{3!}x^3+\dfrac{3}{4!}x^4+\dfrac{14}{5!}x^5+\ldots$

б) $y''=\dfrac{y'}{y}-\dfrac{1}{x}$, $y(1)=1$, $y'(1)=0$.

Ответ: $y(x)=1-\dfrac{1}{2!}(x-1)^2-\dfrac{2}{4!}(x-1)^4+\dfrac{1}{5!}(x-1)^5+\ldots$

в) $y''-(1+x^2)y=0$, $y(0)=-2$, $y'(0)=2$.

Ответ: $y(x)=-2+\dfrac{2}{1!}x-\dfrac{2}{2!}x^2+\dfrac{2}{3!}x^3-\dfrac{6}{4!}x^4+\dfrac{14}{5!}x^5+\ldots$

г) $y''+xy'-x^2y=0$. Общее решение?

Ответ: $y(x)=C_1\left(1+\dfrac{x^4}{12}+\ldots\right)+C_2\left(\dfrac{x}{1}-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{3}{40}x^5+\ldots\right)$.

Тема 9. «Ряды Фурье»

Записать ряд Фурье для функции $f(x)$. Построить график его суммы $S(x)$. Найти сумму ряда Фурье в указанных точках:

1) $f(x) = x$, $x \in (-\pi;\pi)$; $f(x+2\pi) = f(x)$.

$S\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ –? $S(\pi)$ –? $S\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$ –?

Ответ: $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}\cdot 2}{n} \sin nx$

2) $f(x) = |x|$, $x \in (-2;2]$; $f(x+4) = f(x)$.

$S(0)$ –? $S(1)$ –? $S(2)$ –? $S(3)$ –?

Ответ: $S(x) = 1 + \dfrac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n - 1}{n^2} \sin\dfrac{n\pi x}{2} = 1 - \dfrac{8}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{(3k-1)^2} \sin\dfrac{(2k-1)\pi x}{2}$

3) $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0; \\ x, & 0 \le x < 1; \end{cases}$ $f(x+2) = f(x)$.

$S(0)$ –? $S(1)$ –? $S(-3{,}5)$ –?

Ответ: $S(x) = \dfrac{1}{4} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin n\pi x\right]$

4) $f(x) = \begin{cases} x + 2\pi, & -\pi < x \le 0; \\ x, & 0 < x \le \pi; \end{cases}$ $f(x+2\pi) = f(x)$.

Ответ: $S(x) = \pi - 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$

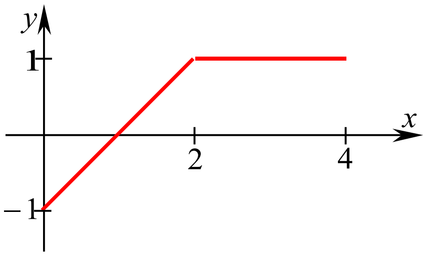
5) $f(x) = (x-1)^2$, $x \in (-\pi;\pi)$; $f(x+2\pi) = f(x)$.

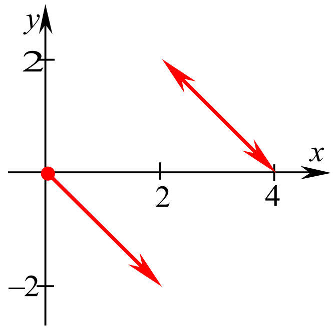
$S(0)$ –? $S(-\pi)$ –?

Ответ: $S(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}\pi^2 + 2\right) + 4\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\dfrac{\cos nx}{n^2} + \dfrac{\sin nx}{n}\right]$

Тема 10. «Тригонометрические ряды Фурье функций, заданных на $(0;\ell)$»

Записать ряд Фурье для функции, заданной графически на $[0;\ell)$:

1) 

2) 

Ответы: 1) $S(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{n^2\pi^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-1\right)\cos\frac{n\pi x}{4}$

2) $S(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi x}{4}=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sin\frac{k\pi x}{2}$

3) Записать ряд Фурье для функции $y=x^2$, $x\in[0;4)$ и продолженной на $(-4;0)$ а) четным образом; б) нечетным образом.

Ответы: а) $S(x)=\frac{16}{3}+\frac{64}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{4}$

б) $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{64}{n^3\pi^3}[(-1)^n-1]-\frac{(-1)^n\cdot 32}{n\pi}\right]\sin\frac{n\pi x}{4}$