Приложения двойного интеграл

1. Вычисление площади в Д.С.К.: $S = \iint_D dxdy$.

2.Вычисление массы в Д.С.К.: $m = \iint_D \gamma(x,y)dxdy$, где

$\gamma(x,y)$ – плотность.

3. Вычисление площади в П.С.К.: $S = \iint_D \rho d\rho d\varphi$.

4. Вычисление массы в П.С.К.: $m = \iint_D \gamma(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi$.

Приложения тройного интеграла

1. Вычисление объёма тела в Д.С.К.: $V = \iiint_G dxdydz$.

2. Вычисление массы тела в Д.С.К.: $m = \iiint_G \gamma(x,y,z)dxdydz$.

3. Вычисление объёма тела в Ц.С.К.: $V = \iiint_G \rho d\rho d\varphi dz$.

4. Вычисление массы тела в Ц.С.К.:
$m = \iiint_G \gamma(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho d\rho d\varphi dz$.

Полярная система координат

$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$, $dxdy = \rho d\rho d\varphi$, $x^2 + y^2 = \rho^2$.

Цилиндрическая система координат

$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$, $dxdydz = \rho d\rho d\varphi dz$, $x^2 + y^2 = \rho^2$.

Вычисление криволинейных интегралов по длине дуги

1. L: $y = y(x)$, $a \le x \le b$,

$dl = \sqrt{1 + (y'_x)^2}dx$,

$\int_L f(x,y)dl = \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + (y'_x)^2}dx$.

2. L: $x = x(y)$, $a \le y \le b$,

$dl = \sqrt{1 + (x'_y)^2}dy$,

$\int_L f(x,y)dl = \int_a^b f(x(y), y)\sqrt{1 + (x'_y)^2}dy$.

3. L: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \le t \le t_2$,

$dl = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}dt$,

$\int_L f(x,y)dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t))\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}dt$.

4. L: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t_1 \le t \le t_2$,

$dl = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2}dt$,

$\int_L f(x,y,z)dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2}dt$.

5. L: $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$,

$dl = \sqrt{\rho^2 + (\rho'_\varphi)^2}d\varphi$,

$\int_L f(x,y)dl = \int_\alpha^\beta f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\sqrt{(\rho)^2 + (\rho'_\varphi)^2}d\varphi$.

Вычисление криволинейных интегралов по координатам

1. $L: \ y = y(x), \ a \le x \le b$,

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b P(x,y(x))dx + Q(x,y(x))y'_x dx.$$

2. $L: \ x = x(y), \ a \le y \le b$,

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b P(x(y),y)x'_y dy + Q(x(y),y)dy.$$

3. $L: \ x = x(t), \ y = y(t), \ t_1 \le t \le t_2$,

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{t_1}^{t_2} (P(x(t),y(t))x'_t + Q(x(t),y(t))y'_t)dt.$$

4. $L: \ x = x(t), \ y = y(t), \ z = z(t), \ t_1 \le t \le t_2$,

$$\int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (P(x(t),y(t),z(t))x'_t + Q(x(t),y(t),z(t))y'_t + R(x(t),y(t),z(t)))z'_t dt$$

Приложения криволинейных интегралов

1. Длина дуги кривой находится по формуле $l = \int_L dl$.

2. Масса дуги кривой находится по формуле $m = \int_L \gamma(x,y,z)dl$,

где $\gamma(x,y,z)$ – линейная плотность вещества.

3. Работа находится по формуле $A = \int_L Pdx + Qdy + Rdz$,

где $\overline{F} = \{P,Q,R\}$ – переменная сила.

Теория поля

1. Поток векторного поля $\overline{F}\{P,Q,R\}$ вычисляется по формуле

$$\Pi = \iint_\sigma Pdydz + Qdxdz + Rdxdy$$

или

$$\Pi = \iint_\sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)d\sigma.$$

2. Дивергенция векторного поля $\overline{F}\{P,Q,R\}$ вычисляется по формуле $div\overline{F} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$.

3. Ротор векторного поля $F\{P,Q,R\}$ вычисляется по формуле

$$rot\overline{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \{X,Y,Z\}.$$

4. Теорема Остроградского-Гаусса

$$\oiint_\sigma Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint_G divFdxdydz.$$

5. Формула Стокса

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_\sigma Xdydz + Ydxdz + Zdxdy.$$

6. Если $divF = 0$, то векторное поле F называется соленоидальным

7. Если $rotF = 0$, то векторное поле F называется потенциальным.

8. Формула Грина

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$