Математический анализ

Элементы теория поля

Лектор Ефремова О.Н.

2022 г.

§1. Криволинейный интеграл I рода (по длине дуги)

1. Задача, приводящая к криволинейному интегралу I рода

Пусть (ℓ) – спрямляемая кривая (т.е. имеющая длину) в $Oxyz$,

$\gamma = \gamma(x, y, z)$ – плотность распределения массы вдоль (ℓ).

Задача. Найти массу m кривой (ℓ).

1. Разобьем кривую (ℓ) на n частей $(\Delta\ell_1), (\Delta\ell_2), \ldots, (\Delta\ell_n)$.

2. Если $(\Delta\ell_i)$ – мала, то $(\Delta\ell_i)$ можно считать однородной и ее масса $m_i \approx \gamma(P_i) \cdot \Delta\ell_i$,

где $\Delta\ell_i$ – длина $(\Delta\ell_i)$, P_i – произвольная точка из $(\Delta\ell_i)$.

Тогда

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i \approx \sum_{i=1}^{n} \gamma(P_i) \cdot \Delta\ell_i,$$

$$m = \lim_{(\Delta\ell_i)\to P_i} \sum_{i=1}^{n} \gamma(P_i) \cdot \Delta\ell_i.$$

2. Определение и свойства криволинейного интеграла I рода

Пусть (ℓ) – спрямляемая кривая в пространстве $Oxyz$, на которой задана функция $u = f(x, y, z)$.

Определение.

1. Разобьем кривую (ℓ) произвольным образом на n частей, не имеющих общих внутренних точек:

$$(\Delta\ell_1), (\Delta\ell_2), \ \ldots\ , (\Delta\ell_n).$$

2. На каждой дуге $(\Delta\ell_i)$ выберем произвольную точку $P_i(\xi_i; \eta_i, \zeta_i)$ и вычислим произведение $f(P_i) \cdot \Delta\ell_i$, где $\Delta\ell_i$ – длина дуги $(\Delta\ell_i)$.

Сумму
$$I_n(\Delta\ell_i, P_i) = \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot \Delta\ell_i$$

назовем ***интегральной суммой*** для функции $f(x, y, z)$ по кривой (ℓ), соответствующей данному разбиению кривой (ℓ) и данному выбору точек P_i.

Пусть $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta \ell_i$.

Число I называется ***пределом интегральных сумм*** $I_n(\Delta\ell_i, P_i)$ *при* $\lambda \to 0$, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что для любого разбиения кривой* (ℓ) *у которого* $\lambda < \delta$, *при любом выборе точек* P_i *выполняется неравенство*

$$|I_n(\Delta\ell_i, P_i) - I| < \varepsilon.$$

Если существует предел интегральных сумм $I_n(\Delta\ell_i, P_i)$ *при* $\lambda \to 0$, *то его называют* ***криволинейным интегралом I рода (по длине дуги) от функции $f(x, y, z)$ по кривой (ℓ)***.

Обозначают: $$\int\limits_{(\ell)} f(x, y, z)\, d\ell.$$

Замечание. Криволинейный интеграл I рода не зависит от направления движения по кривой (ℓ), т.е.

$$\int\limits_{(AB)} f(x, y, z)\, d\ell = \int\limits_{(BA)} f(x, y, z)\, d\ell.$$

Свойства криволинейного интеграла I рода

Замечание. Предполагаем, что все рассматриваемые в свойствах интегралы существуют.

1. $\int\limits_{(\ell)} d\ell = \ell,$ где ℓ – длина кривой (ℓ).

2. Постоянный множитель можно выносить за знак криволинейного интеграла I рода, т.е.

$$\int\limits_{(\ell)} c\cdot f(x,y,z)d\ell = c\cdot\int\limits_{(\ell)} f(x,y,z)d\ell$$

3. Криволинейный интеграл I рода от алгебраической суммы двух (конечного числа) функций равен алгебраической сумме криволинейных интегралов I рода от этих функций, т.е.

$$\int\limits_{(\ell)} \left[f_1(x,y,z)+f_2(x,y,z)\right]d\ell = \int\limits_{(\ell)} f_1(x,y,z)\,d\ell + \int\limits_{(\ell)} f_2(x,y,z)\,d\ell$$

4. Если кривая (ℓ) разбита на две части (ℓ_1) и (ℓ_2), не имеющие общих внутренних точек, то

$$\int\limits_{(\ell)} f(x,y,z)d\ell = \int\limits_{(\ell_1)} f(x,y,z)d\ell + \int\limits_{(\ell_2)} f(x,y,z)d\ell$$

(свойство аддитивности криволинейного интеграла I рода).

5. Если всюду на кривой (ℓ) $f(x, y, z) > 0$ $(f(x, y, z) \geq 0)$, то

$$\int\limits_{(\ell)} f(x,y,z)d\ell > 0 \qquad \left(\int\limits_{(\ell)} f(x,y,z)d\ell \geq 0 \right)$$

6. Если всюду на кривой (ℓ) $f(x, y, z) \leq \varphi(x, y, z)$, то

$$\int\limits_{(\ell)} f(x,y,z)d\ell \leq \int\limits_{(\ell)} \varphi(x,y,z)d\ell .$$

7. Следствие свойств 6, 2 и 1.
   Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x, y, z)$ на кривой (ℓ), то

$$m \cdot \ell \leq \int\limits_{(\ell)} f(x, y, z) d\ell \leq M \cdot \ell,$$

   где ℓ – длина кривой (ℓ).

8. Теорема о среднем для криволинейного интеграла I рода.
   Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна на спрямляемой кривой (ℓ), то найдется такая точка $P_0(x_0,y_0,z_0) \in (\ell)$, что справедливо равенство

$$\int\limits_{(\ell)} f(x, y, z) d\ell = f(x_0, y_0, z_0) \cdot \ell,$$

   где ℓ – длина кривой (ℓ).

3. Вычисление криволинейного интеграла I рода

Пусть простая (не имеющая кратных точек) кривая (ℓ) задана параметрическими уравнениями:

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t), z = \chi(t) \text{ (где } \alpha \le t \le \beta \text{)}. \qquad (1)$$

Кривая (ℓ) называется ***гладкой***, если функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ имеют на $[\alpha; \beta]$ непрерывные производные.

Теорема (о вычислении криволинейного интеграла I рода). *Если (ℓ) – гладкая кривая, заданная уравнениями (1), и функция $f(x, y, z)$ непрерывна на (ℓ), то $f(x, y, z)$ интегрируема по кривой (ℓ) и справедливо равенство*

$$\int\limits_{(\ell)} f(x,y,z)d\ell = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\big(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\big)\cdot\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2+(\chi'(t))^2}\,dt$$

Следствие 1.

Если (ℓ) *– гладкая кривая в плоскости xOy, заданная уравнением* $y = \varphi(x)$ (*где* $x \in [a; b]$), *и функция* $f(x, y)$ *непрерывна на* (ℓ), *то* $f(x, y)$ *интегрируема по кривой* (ℓ) *и справедливо равенство*

$$\int\limits_{(\ell)} f(x,y)d\ell = \int\limits_a^b f\big(x,\varphi(x)\big)\cdot\sqrt{1+(\varphi'(x))^2}\,dx\,.$$

Следствие 2.

Пусть (ℓ) *– плоская кривая, заданная в полярных координатах уравнением* $r = r(\varphi)$, *где* $\varphi \in [\alpha; \beta]$.

Если функция $r(\varphi)$ *непрерывно дифференцируема на* $[\alpha; \beta]$ *и функция* $f(x, y)$ *непрерывна на* (ℓ), *то* $f(x, y)$ *интегрируема по кривой* (ℓ) *и справедливо равенство*

$$\int\limits_{(\ell)} f(x,y)d\ell = \int\limits_\alpha^\beta f\big(r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi\big)\cdot\sqrt{\big(r(\varphi)\big)^2+(r'(\varphi))^2}\,d\varphi\,.$$

Теорема (достаточные условия существования криволинейного интеграла I рода).

Если (ℓ) *– кусочно-гладкая спрямляемая кривая и функция* $f(x, y, z)$ *кусочно-непрерывна на* (ℓ) *, то* $f(x, y, z)$ *интегрируема по кривой* (ℓ)*.*

4. Геометрические и физические приложения криволинейных интегралов I рода

1. Длина ℓ спрямляемой кривой (ℓ): $\ell = \int\limits_{(\ell)} d\ell$.

2. Пусть (G) – цилиндр с направляющей (ℓ)∈xOy. Тогда

$$S = \int\limits_{(\ell)} f(x, y)d\ell,$$

где S – площадь части поверхности (G), заключенной между плоскостью xOy и поверхностью $z = f(x, y)$.

3. Пусть (ℓ) – материальная спрямляемая кривая в пространстве $Oxyz$ с плотностью $\gamma(x, y, z)$.

Тогда

$\int\limits_{(\ell)} \gamma(x, y, z)d\ell = m,$ где m – масса кривой (ℓ).

4. Статические моменты кривой (ℓ) относительно плоскостей xOy, yOz и xOz равны соответственно равны:

$$S_{xy} = \int\limits_{(\ell)} z \cdot \gamma(x, y, z) d\ell$$

$$S_{yz} = \int\limits_{(\ell)} x \cdot \gamma(x, y, z) d\ell$$

$$S_{xz} = \int\limits_{(\ell)} y \cdot \gamma(x, y, z) d\ell$$

5. Координаты центра тяжести кривой (ℓ) находятся по формулам:

$$x_0 = \frac{S_{yz}}{m}, \quad y_0 = \frac{S_{xz}}{m}, \quad z_0 = \frac{S_{xy}}{m} \quad .$$

6. Моменты инерции кривой (ℓ) относительно осей Ox, Oy и Oz равны соответственно:

$$I_x = \int\limits_{(\ell)} (y^2 + z^2) \cdot \gamma(x, y, z) d\ell$$

$$I_y = \int\limits_{(\ell)} (x^2 + z^2) \cdot \gamma(x, y, z) d\ell$$

$$I_z = \int\limits_{(\ell)} (x^2 + y^2) \cdot \gamma(x, y, z) d\ell$$

7. Момент инерции кривой (ℓ) относительно начала координат находится по формуле:

$$I_o = \int\limits_{(\ell)} (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \gamma(x, y, z) d\ell \ .$$

§2. Криволинейный интеграл II рода (по координатам)

1. Задача, приводящая к криволинейному интегралу II рода

Пусть под действием силы $\bar{\mathbf{F}} = \{P(x,y,z); Q(x,y,z); R(x,y,z)\}$ точка перемещается по кривой (ℓ) из точки L_1 в точку L_2.

Задача. Найти работу, которую совершает сила $\bar{\mathbf{F}}$.

1. Разобьем (ℓ) на n частей точками $M_0=L_1$, M_1, …, $M_n=L_2$.

2. Если $(\Delta\ell_i) = (M_{i-1}M_i)$ – мала, то $(\Delta\ell_i)$ можно считать отрезком, а $\bar{\mathbf{F}}$ – постоянной.

Тогда работа силы по перемещению точки из M_{i-1} в M_i равна

$$A_i \approx P(K_i) \cdot \Delta x_i + Q(K_i) \cdot \Delta y_i + R(K_i) \cdot \Delta z_i ,$$

где K_i – произвольная точка из $(\Delta\ell_i)$, $\overline{M_{i-1}M_i} = \{\Delta x_i ; \Delta y_i ; \Delta z_i\}$

Тогда
$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i \approx \sum_{i=1}^{n} P(K_i)\cdot\Delta x_i + Q(K_i)\cdot\Delta y_i + R(K_i)\cdot\Delta z_i ,$$

$$A = \lim_{(\Delta\ell_i)\to K_i} \sum_{i=1}^{n} P(K_i)\cdot\Delta x_i + Q(K_i)\cdot\Delta y_i + R(K_i)\cdot\Delta z_i .$$

2. Определение и свойства криволинейного интеграла II рода

Пусть $(\ell) = (L_1 L_2)$ – простая (т.е. без кратных точек) спрямляемая (т.е. имеющая длину) кривая в пространстве $Oxyz$, и на кривой (ℓ) задана функция $P(x, y, z)$.

Определение.

1. Разобьем кривую (ℓ) произвольным образом на n частей точками $M_0 = L_1, \ldots, M_n = L_2$ в направлении от L_1 к L_2.

2. Пусть $M_i(x_i; y_i; z_i)$. Обозначим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ (т.е. проекцию дуги $(M_{i-1}M_i)$ на ось Ox)

3. На каждой дуге $(M_{i-1}M_i)$ выберем произвольную точку $K_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ и вычислим произведение $P(K_i) \cdot \Delta x_i$.

Сумму

$$I_n(M_i, K_i) = \sum_{i=1}^{n} P(K_i) \cdot \Delta x_i$$

назовем ***интегральной суммой*** для функции $P(x, y, z)$ по кривой (ℓ) по переменой x, соответствующей данному разбиению кривой (ℓ) и данному выбору точек K_i.

Пусть $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta M_{i-1} M_i$, где $\Delta M_{i-1} M_i$ – длина дуги $(M_{i-1} M_i)$.

Число I называется ***пределом интегральных сумм*** $I_n(M_i, K_i)$ *при* $\lambda \to 0$, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что для любого разбиения кривой* (ℓ) *у которого* $\lambda < \delta$, *при любом выборе точек* K_i *выполняется неравенство*

$$| I_n(M_i, K_i) - I | < \varepsilon .$$

Если существует предел интегральных сумм $I_n(M_i, K_i)$ *при* $\lambda \to 0$, *то его называют* ***криволинейным интегралом от функции $P(x, y, z)$ по переменной x по кривой (ℓ)***.

Обозначают: $\int\limits_{(\ell)} P(x, y, z) dx$ или $\int\limits_{(L_1)}^{(L_2)} P(x, y, z) dx$.

Аналогично определяются интегралы

$$\int\limits_{(\ell)} Q(x,y,z)dy \quad \text{и} \quad \int\limits_{(\ell)} R(x,y,z)dz.$$

Сумму
$$\int\limits_{(\ell)} P(x,y,z)dx + \int\limits_{(\ell)} Q(x,y,z)dy + \int\limits_{(\ell)} R(x,y,z)dz$$

записывают в виде

$$\int\limits_{(\ell)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

и *называют* ***криволинейным интегралом* II *рода* (*по координатам*)**.

Свойства криволинейного интеграла II рода

Замечание. Предполагаем, что все рассматриваемые в свойствах интегралы существуют.

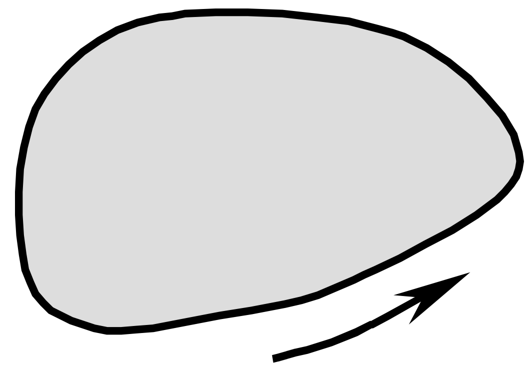
1. Криволинейный интеграл II рода зависит от направления движения по кривой. При изменении направления обхода кривой (L_1L_2) криволинейный интеграл II рода меняет знак, т.е.

$$\int\limits_{(L_1L_2)} Pdx + Qdy + Rdz = -\int\limits_{(L_2L_1)} Pdx + Qdy + Rdz$$

2. Если кривая (ℓ) замкнута, то криволинейный интеграл II рода не зависит выбора начальной точки L_1, а зависит от направления обхода кривой.

Направление обхода замкнутой кривой, при котором область, лежащая «внутри» контура, остается слева по отношению к движущейся точке, называют ***положительным***. Противоположное ему направление называют ***отрицательным***.

На плоскости положительным направлением обхода является направление против хода часовой стрелки.



Криволинейный интеграл II рода по замкнутому контуру в положительном направлении обозначают:

$$\oint\limits_{(\ell)} Pdx + Qdy + Rdz$$

В отрицательном направлении:

$$\oint\limits_{-(\ell)} Pdx + Qdy + Rdz$$

3. **Физический смысл криволинейного интеграла II рода**.

Пусть $\bar{\mathbf{F}} = \{P(x, y, z); Q(x, y, z); R(x, y, z)\}$ – сила, под действием которой точка перемещается по кривой (ℓ) из L_1 в L_2.

Работа, которую при этом совершает сила $\bar{\mathbf{F}}$, будет равна

$$A = \int\limits_{(\ell)} Pdx + Qdy + Rdz$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак криволинейного интеграла II рода, т.е.

$$\int\limits_{(\ell)} c \cdot Pdx = c \cdot \int\limits_{(\ell)} Pdx,$$

$$\int\limits_{(\ell)} c \cdot Qdy = c \cdot \int\limits_{(\ell)} Qdy,$$

$$\int\limits_{(\ell)} c \cdot Rdz = c \cdot \int\limits_{(\ell)} Rdz.$$

5. Криволинейный интеграл II рода от алгебраической суммы двух (конечного числа) функций равен алгебраической сумме криволинейных интегралов II рода от этих функций, т.е.

$$\int\limits_{(\ell)} \left[P_1 + P_2\right] dx = \int\limits_{(\ell)} P_1 dx + \int\limits_{(\ell)} P_2 dx$$

$$\int\limits_{(\ell)} \left[Q_1 + Q_2\right] dy = \int\limits_{(\ell)} Q_1 dy + \int\limits_{(\ell)} Q_2 dy$$

$$\int\limits_{(\ell)} \left[R_1 + R_2\right] dz = \int\limits_{(\ell)} R_1 dz + \int\limits_{(\ell)} R_2 dz$$

6. Если кривая (L_1L_2) разбита точкой K на две части (L_1K) и (KL_2), то

$$\int\limits_{(L_1L_2)} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{(L_1K)} Pdx + Qdy + Rdz + \int\limits_{(KL_2)} Pdx + Qdy + Rdz$$

(свойство аддитивности криволинейного интеграла II рода).

3. Вычисление криволинейного интеграла II рода

Пусть простая (не имеющая кратных точек) кривая $(\ell)=(L_1L_2)$ задана параметрическими уравнениями:

$$x = \varphi(t),\ \ y = \psi(t),\ z = \chi(t), \qquad (2)$$

где $t\in[\alpha;\beta]$ (или $t\in[\beta;\alpha]$) $(L_1\leftrightarrow\alpha,\ L_2\leftrightarrow\beta)$.

Теорема (о вычислении криволинейного интеграла II рода). *Если* (ℓ) *– гладкая кривая, заданная уравнениями* (2) *и функция* $P(x,y,z)$ *непрерывна на* (ℓ), *то* $P(x,y,z)$ *интегрируема по переменной x по кривой* (ℓ) *и справедливо равенство*

$$\int\limits_{(\ell)} P(x,y,z)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P\big(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\big)\cdot\varphi'(t)dt$$

Аналогичным образом вычисляются интегралы

$$\int\limits_{(\ell)} Q(x,y,z)dy \quad \text{и} \quad \int\limits_{(\ell)} R(x,y,z)dz$$

Следствие.

Если выполнены условия:

1) $(\ell) = (L_1L_2)$ – *гладкая кривая в плоскости* xOy, *заданная уравнением* $y = \varphi(x)$ (*где* x *пробегает отрезок с концами* a *и* b; $L_1(a; \varphi(a))$, $L_2(b; \varphi(b))$),

2) *функции* $P(x, y)$, $Q(x, y)$ *непрерывны на* (ℓ),

то существует криволинейный интеграл II *рода и справедливо равенство*

$$\int\limits_{(\ell)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_a^b \left[P\big(x,\varphi(x)\big) + Q\big(x,\varphi(x)\big)\cdot\varphi'(x)\right]dx$$

Теорема (достаточные условия существования криволинейного интеграла II рода).

Если (ℓ) – *кусочно-гладкая спрямляемая кривая и функции* $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ *кусочно-непрерывны на* (ℓ), *то существует интеграл*

$$\int\limits_{(\ell)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

4. Связь между криволинейными интегралами II рода и двойными интегралами

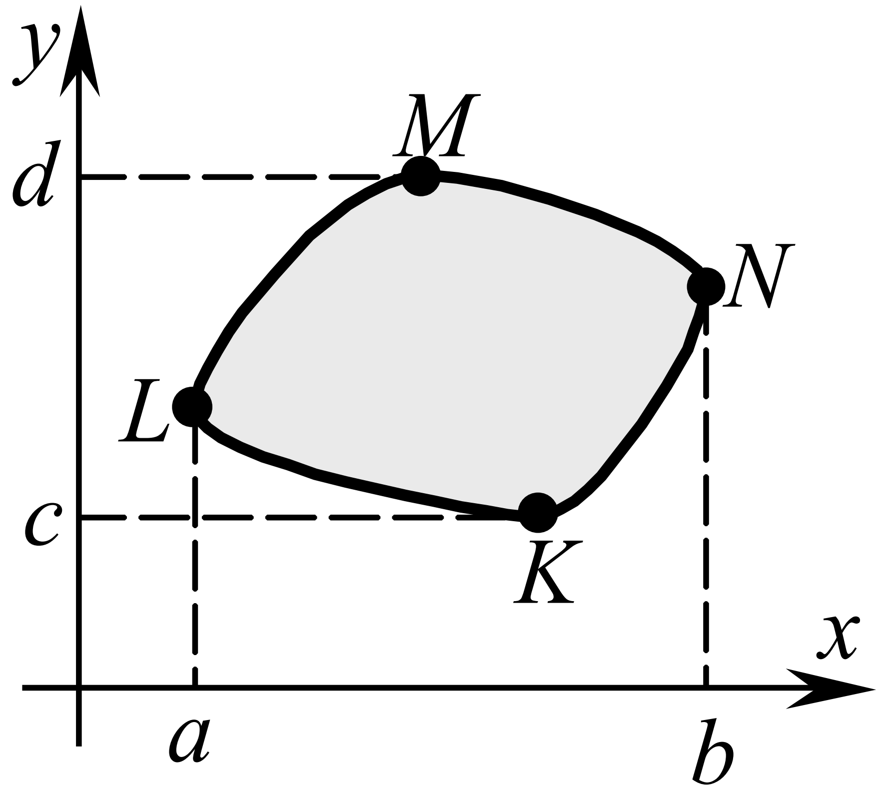
Пусть (σ) – замкнутая ограниченная область на плоскости xOy,
(ℓ) – граница (σ), кусочно гладкая,
$P(x,y)$, $Q(x,y)$, $P'_y(x,y)$, $Q'_x(x,y)$ – кусочно непрерывны в области (σ)

Тогда существуют интегралы

$$\oint\limits_{(\ell)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy, \qquad \iint\limits_{(\sigma)} P'_y(x,y)dxdy, \qquad \iint\limits_{(\sigma)} Q'_x(x,y)dxdy$$

и справедлива **формула Грина**:

$$\oint\limits_{+(\ell)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_{(\sigma)} \left(Q'_x - P'_y\right)dxdy$$


y
d
M
N
L
c
K
x
a
b

5. Криволинейные интегралы II рода, не зависящие от пути интегрирования

Лемма. Для того, чтобы криволинейный интеграл

$$\int\limits_{(L_1L_2)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

не зависел от линии интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы этот интеграл, взятый по любому замкнутому контуру (ℓ) был равен нулю.

Теорема. Пусть функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывны вместе со своими частными производными в некоторой односвязной области $D \subset Oxyz$.

Следующие условия эквивалентны:

1) $\oint\limits_{(\ell)} P dx + Q dy + R dz = 0 \quad \forall (\ell) \subset D$;

2) выполняются равенства

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z};$$

3) выражение $Pdx + Qdy + Rdz$ является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y,z)$, т.е.

$$du = Pdx + Qdy + Rdz \ .$$

6. Интегрирование полных дифференциалов

Пусть $Pdx + Qdy + Rdz = du$;

$(\ell) = (\mathrm{L}_1\mathrm{L}_2)$ – простая гладкая кривая (любая)

(ℓ): $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$, где $t \in [\alpha; \beta]$ (или $t \in [\beta; \alpha]$)

$(L_1 \leftrightarrow \alpha\ ,\ L_2 \leftrightarrow \beta)$.

Рассмотрим

$$\int\limits_{(L_1L_2)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

Получили:

$$\int\limits_{(L_1L_2)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = u(L_2) - u(L_1)$$

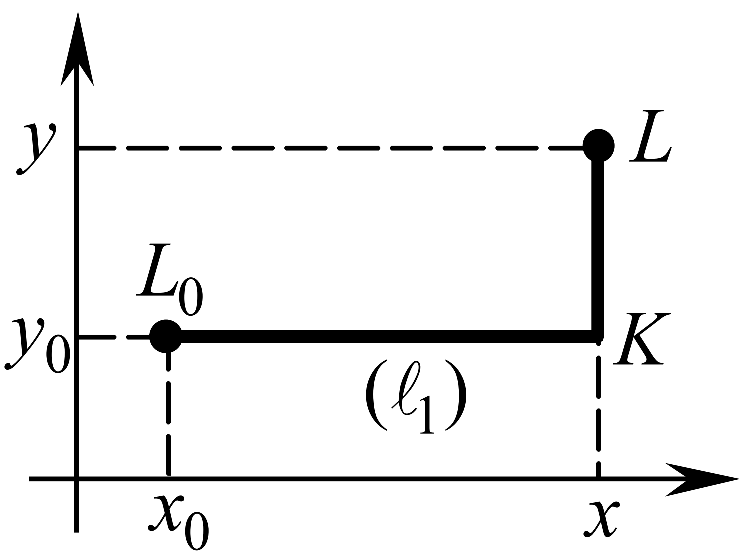
Таким образом, для криволинейного интеграла II рода от полного дифференциала справедлив аналог формулы Ньютона – Лейбница.

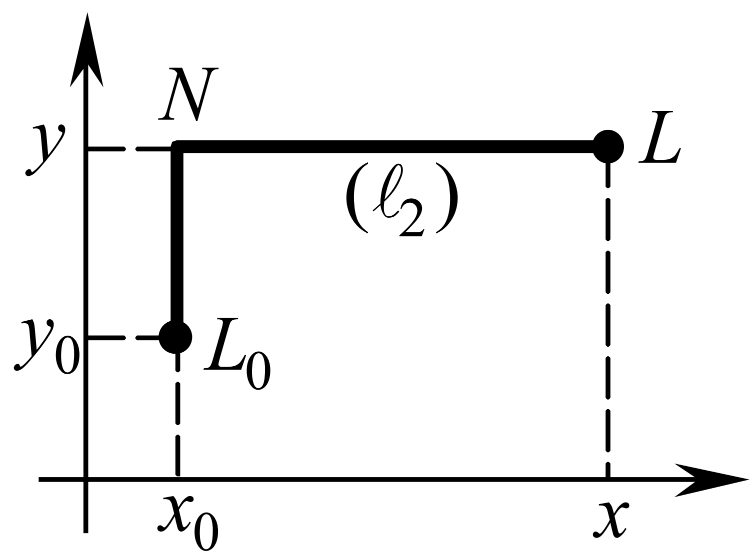
Нахождение функции по ее дифференциалу

Пусть $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = du(x,y)$;
Тогда $\forall L(x,y)$ и $\forall L_0(x_0,y_0)$

$$\int\limits_{(L_0L)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = u(L) - u(L_0)$$

Рассмотрим интеграл, полагая $(L_0L) = (\ell_1)$ или $(L_0L) = (\ell_2)$:





Получили: $$u(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int\limits_{y_0}^{y}\underbrace{Q(x,y)}_{x-const}dy+C$$

или $$u(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x}\underbrace{P(x,y)}_{y-const}dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy+C$$

7. Связь криволинейных интегралов I и II рода

Если (ℓ) – простая гладкая кривая, то справедлива формула

$$\int\limits_{(\ell)}Pdx+Qdy+Rdz=\int\limits_{(\ell)}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)d\ell$$

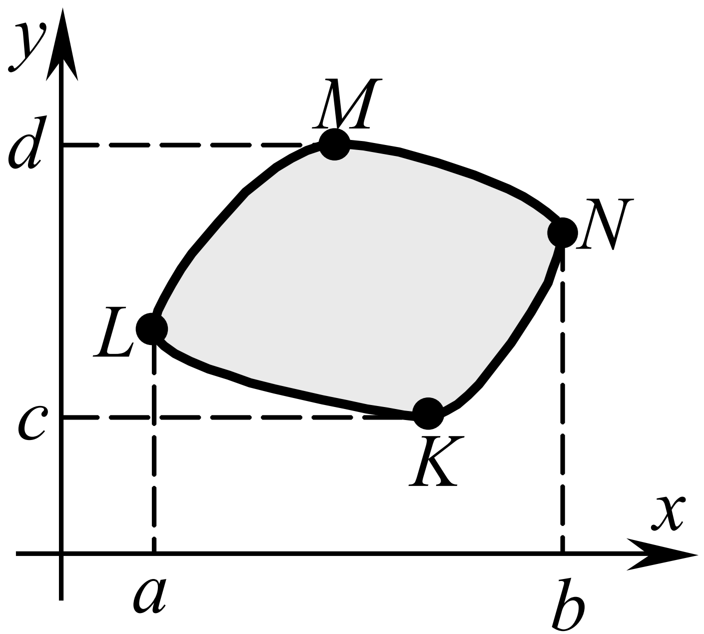
где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора, касательного к кривой (ℓ) .

8. Геометрическое приложение криволинейного интеграла II рода

Пусть (σ) – квадрируемая область в плоскости xOy,
(ℓ) – граница (σ), кусочно-гладкая.

Тогда площадь области (σ) может быть найдена по формуле:

$$\sigma = \frac{1}{2} \cdot \oint\limits_{(\ell)} x dy - y dx$$



§3. Поверхностный интеграл I рода

1. Задача, приводящая к поверхностному интегралу I рода

Пусть (S) – квадрируемая поверхность в $Oxyz$,

$\gamma = \gamma(x, y, z)$ – плотность распределения массы по (S)

Задача. Найти массу m поверхности (S).

1. Разобьем (S) на n частей $(\Delta S_1), (\Delta S_2), \ \dots, (\Delta S_n)$.

2. Если (ΔS_i) – мала, то (ΔS_i) можно считать однородной и ее масса $m_i \approx \gamma(P_i) \cdot \Delta S_i$,

где ΔS_i – площадь (ΔS_i), P_i – произвольная точка из (ΔS_i) .

Тогда

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i \approx \sum_{i=1}^{n} \gamma(P_i) \cdot \Delta S_i ,$$

$$m = \lim_{(\Delta S_i) \to P_i} \sum_{i=1}^{n} \gamma(P_i) \cdot \Delta S_i ,$$

2. Определение и свойства поверхностного интеграла I рода

Пусть (S) – квадрируемая (т.е. имеющая площадь) область в пространстве $Oxyz$, и на (S) задана функция $u = f(x, y, z)$.

Определение.

1. Разобьем поверхность (S) произвольным образом на n частей, не имеющих общих внутренних точек:

$$(\Delta S_1), (\Delta S_2), \ \dots, (\Delta S_n).$$

2. На каждой части (ΔS_i) выберем произвольную точку $P_i(\xi_i;\eta_i\zeta_i)$ и вычислим произведение $f(P_i) \cdot \Delta S_i$, где ΔS_i – площадь части (ΔS_i).

Сумму

$$I_n(\Delta S_i, P_i) = \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot \Delta S_i$$

назовем ***интегральной суммой*** для функции $f(x,y,z)$ по поверхности (S) (соответствующей данному разбиению поверхности (S) и данному выбору точек P_i).

Пусть d_{i} – диаметр (ΔS_{i}) , $\quad \lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} d_i$

Число I называется ***пределом интегральных сумм*** $I_n(\Delta S_i, P_i)$ *при* $\lambda \to 0$ *, если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что для любого разбиения поверхности* (S) *у которого* $\lambda < \delta$, *при любом выборе точек* P_i *выполняется неравенство*

$$| I_n(\Delta S_i, P_i) - I | < \varepsilon .$$

Если существует предел интегральных сумм $I_n(\Delta S_i, P_i)$ *при* $\lambda \to 0$, *то его называют* ***поверхностным интегралом I рода (по площади поверхности) от функции*** $f(x, y, z)$ ***по поверхности*** (S).

Обозначают: $$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z) ds .$$

Свойства поверхностного интеграла I рода

Замечание: предполагаем, что все рассматриваемые в свойствах интегралы существуют.

1. $\iint\limits_{(S)} ds = S$, где S – площадь поверхности (S).

2. Постоянный множитель можно выносить за знак поверхностного интеграла I рода, т.е.

$$\iint\limits_{(S)} c\cdot f(x,y,z)ds = c\cdot\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)ds.$$

3. Поверхностный интеграл I рода от алгебраической суммы 2-х (конечного числа) функций равен алгебраической сумме поверхностных интегралов I рода от этих функций, т.е.

$$\iint\limits_{(S)} [f_1(x,y,z)+f_2(x,y,z)]ds = \iint\limits_{(S)} f_1(x,y,z)ds + \iint\limits_{(S)} f_2(x,y,z)ds.$$

4. Если поверхность интегрирования (S) разбита на две части (S_1) и (S_2), не имеющие общих внутренних точек, то

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)ds = \iint\limits_{(S_1)} f(x,y,z)ds + \iint\limits_{(S_2)} f(x,y,z)ds.$$

(свойство аддитивности поверхностного интеграла I рода).

5. Если всюду на поверхности (S) $f(x,y,z) > 0$ $(f(x,y,z) \geq 0)$, то

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)ds > 0 \qquad \left(\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)ds \geq 0\right).$$

6. Если всюду на поверхности (S) $f(x,y,z) \leq \varphi(x,y,z)$, то

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)ds \leq \iint\limits_{(S)} \varphi(x,y,z)ds.$$

7. Следствие свойств 6, 2 и 1.
Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x, y ,z)$ на поверхности (S), то

$$m \cdot S \le \iint\limits_{(S)} f(x, y, z) ds \le M \cdot S,$$

где S – площадь поверхности (S).

8. Теорема о среднем для поверхностного интеграла I рода.
Если функция $f(x, y, z)$ *непрерывна на квдрируемой поверхности* (S), *то найдется такая точка* $P_0(x_0,y_0,z_0) \in (S)$, *что справедливо равенство*

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z) ds = f(x_0, y_0, z_0) \cdot S,$$

где S *– площадь поверхности* $(S\ )$.

3. Вычисление поверхностного интеграла I рода

Пусть поверхность (S) задана формулой

$$z = \varphi(x, y),\ \ (x, y) \in (\sigma_{xy}) \subset xOy. \qquad (3)$$

Говорят: ***поверхность задана явно***.

Поверхность (3) называется ***гладкой***, если $\varphi(x,y)$ имеет в области (σ_{xy}) непрерывные частные производные

$$\varphi'_x(x, y) \ \text{ è } \ \varphi'_y(x, y).$$

В явном виде можно также задать поверхность формулой

$$x = \psi(y, z),\ \ (y, z) \in (\sigma_{yz}) \subset yOz \ \text{ или } y = \chi(x,z),\ \ (x,z) \in (\sigma_{xz}) \subset xOz.$$

Пусть поверхность (S) задана уравнением

$$F(x, y, z) = 0. \qquad (4)$$

Говорят: ***поверхность задана неявно***.

Поверхность (4) называется ***гладкой***, если для любой ее внутренней точки существует такая окрестность, которая может быть задана явно и является гладкой.

Пусть функция $u = F(x,y,z)$ имеет непрерывные частные производные F'_x, F'_y è F'_z.

Точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ поверхности $F(x,y,z) = 0$ называется ***особой***, если $F'_x(M_0) = F'_y(M_0) = F'_z(M_0) = 0$.

Если на поверхности $F(x,y,z) = 0$ *нет особых точек*, *то она является гладкой*.

С геометрической точки зрения, гладкость поверхности (S) означает, что в каждой внутренней точке поверхности существует касательная плоскость (и нормаль), причем ее положение непрерывно меняется при перемещении точки касания по поверхности.

Поверхность, составленная из нескольких гладких частей, называется *кусочно-гладкой*.

Теорема.

Пусть (S) – *гладкая поверхность, заданная уравнением* $z = \varphi(x, y)$, $(x, y) \in (\sigma_{xy})$;

(σ_{xy}) – *квадрируемая область в плоскости* xOy;

функция $f(x,y,z)$ *непрерывна на* (S) .

Тогда $f(x, y, z)$ *интегрируема по поверхности* (S) *и справедливо равенство*

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)ds = \iint\limits_{(\sigma_{xy})} f\big(x,y,\varphi(x,y)\big)\cdot\sqrt{1+(\varphi'_x)^2+(\varphi'_y)^2}\,dxdy.$$

Следствие 1.

Пусть (S) *– гладкая поверхность, заданная уравнением*

$$x = \psi(y, z),\ \ (y, z) \in (\sigma_{yz});$$

(σ_{yz}) *– квадрируемая область в плоскости* yOz;

функция $f(x,y,z)$ *непрерывна на* (S) .

Тогда $f(x, y, z)$ *интегрируема по поверхности* (S) *и*

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)ds = \iint\limits_{(\sigma_{xy})} f\big(\psi(y,z),y,z\big)\cdot\sqrt{1+(\psi'_y)^2+(\psi'_z)^2}\,dydz.$$

Следствие 2.

Пусть (S) *– гладкая поверхность, заданная уравнением*

$$y = \chi(x, z),\ \ (x, z) \in (\sigma_{xz});$$

(σ_{xz}) *– квадрируемая область в плоскости* xOz ;

функция $f(x,y,z)$ *непрерывна на* (S).

Тогда $f(x, y, z)$ *интегрируема по поверхности* (S) *и*

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)ds = \iint\limits_{(\sigma_{xz})} f\big(x,\chi(x,z),z\big)\cdot\sqrt{1+(\chi'_x)^2+(\chi'_z)^2}\,dxdz.$$

Теорема (достаточные условия существования поверхностного интеграла I рода).

Пусть (S) *– кусочно-гладкая поверхность, которая может быть явно задана, например, формулой* $z = \varphi(x,y)$, $(x,y)\in(\sigma_{xy})$.

Если (σ_{xy}) *– квадрируемая область в плоскости* xOy *и функция* $f(x,y,z)$ *кусочно-непрерывна на* (S), *то* $f(x,y,z)$ *интегрируема по поверхности* (S).

4. Геометрические и физические приложения поверхностных интегралов I рода

1) Площадь S квадрируемой поверхности $(S) \in Oxyz$:

$$S = \iint\limits_{(S)} ds.$$

Пусть (S) – материальная квадрируемая поверхность в $Oxyz$ с плотностью $\gamma(x,y,z)$.

Тогда

2) $\iint\limits_{(S)} \gamma(x, y, z) ds = m$ – масса поверхности (S) .

3) Статические моменты поверхности (S) относительно плоскостей xOy, yOz и xOz равны соответственно:

$$S_{xy} = \iint\limits_{(S)} z \cdot \gamma(x, y, z) ds$$

$$S_{yz} = \iint\limits_{(S)} x \cdot \gamma(x, y, z) ds$$

$$S_{xz} = \iint\limits_{(S)} y \cdot \gamma(x, y, z) ds$$

4) $x_0 = \dfrac{S_{yz}}{m}$, $y_0 = \dfrac{S_{xz}}{m}$, $z_0 = \dfrac{S_{xy}}{m}$ – координаты центра тяжести поверхности (S) .

5) Моменты инерции поверхности (S) относительно осей Ox, Oy и Oz равны соответственно:

$$I_x = \iint\limits_{(S)} (y^2 + z^2) \cdot \gamma(x, y, z) ds$$

$$I_y = \iint\limits_{(S)} (x^2 + z^2) \cdot \gamma(x, y, z) ds$$

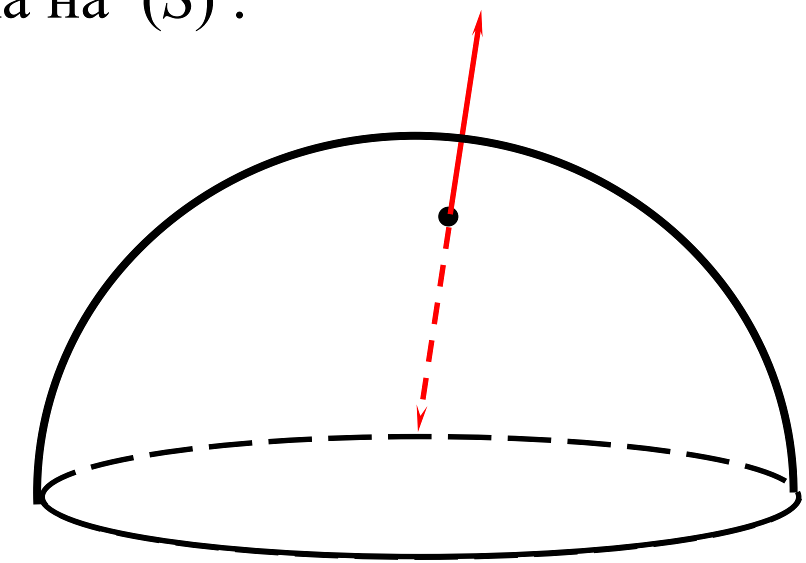
$$I_z = \iint\limits_{(S)} (x^2 + y^2) \cdot \gamma(x, y, z) ds$$

6) $I_o = \iint\limits_{(S)} (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \gamma(x, y, z) ds$ – момент инерции поверхности (S) относительно начала координат .

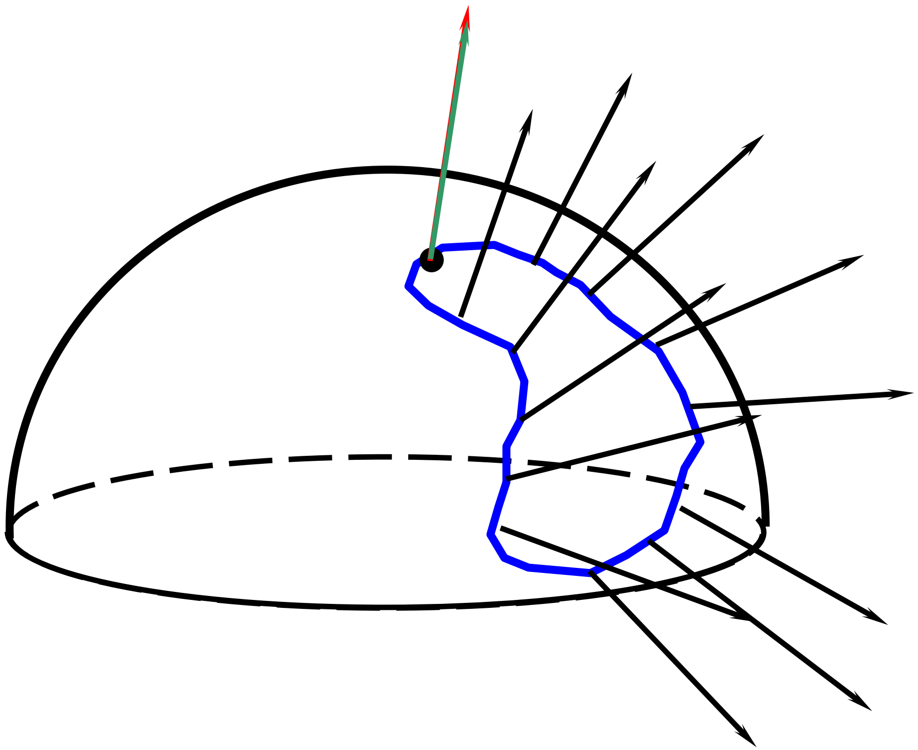
§4. Поверхностный интеграл II рода (по координатам)

1. Односторонние и двусторонние поверхности

Пусть (S) – гладкая поверхность в пространстве $Oxyz$, M – любая точка на (S) .

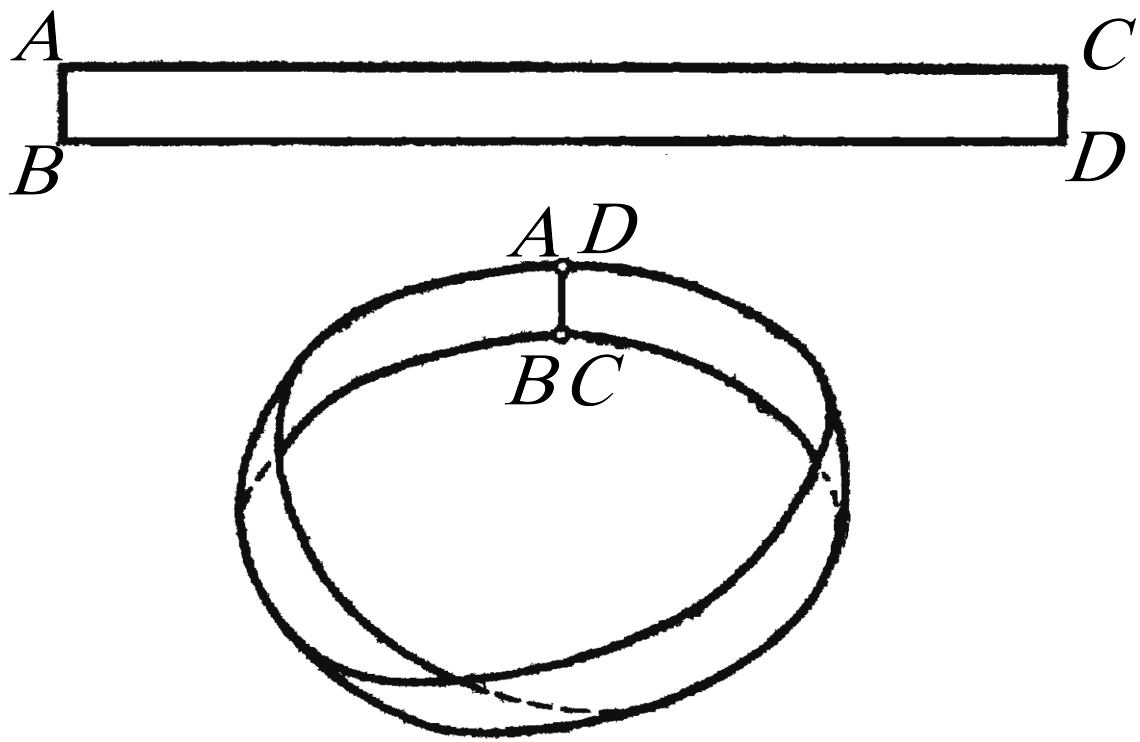


1. Проведем в M нормаль (вектор, перпендикулярный к касательной плоскости) к (S).
2. Выберем одно из двух направлений нормали.



3. Непрерывно перемещаем M вместе с выбранной нормалью вдоль любой замкнутой кривой (ℓ) на (S), не пересекающей ее границу

Если в прежнее положение точка M вернется с тем же направлением нормали (для любой точки M и любой кривой (ℓ)), то поверхность называют ***двусторонней***.



Если в прежнее положение точка M вернется с противоположным направлением нормали (хотя бы для одной точки M и хотя бы одной кривой (ℓ)), то поверхность называют ***односторонней***.

2. Определение и свойства поверхностного интеграла II рода

Пусть (S) – двусторонняя поверхность, с выбранным направлением нормали (т.е. стороной) и на (S) задана функция $R(x, y, z)$.

Определение.

1. Разобьем область (S) произвольным образом на n частей, не имеющих общих внутренних точек:

$$(\Delta S_1), (\Delta S_2), \ \ldots\ , (\Delta S_n).$$

2. В каждой области (ΔS_i) выберем произвольную точку $K_i(\xi_i; \eta_i; \zeta_i)$.
3. Обозначим через $\Delta S_{i(xy)}$ – площадь проекции (ΔS_i) на плоскость xOy, взятую со знаком «+», если выбранное на (S) направление нормали в точке M_i составляет с осью Oz острый угол, и со знаком «–» в противном случае.
4. Вычислим произведение $R(K_i) \cdot \Delta S_{i(xy)}$.

Сумму $$I_n(\Delta S_i, K_i) = \sum_{i=1}^{n} R(K_i)\cdot \Delta S_{i(xy)}$$

назовем ***интегральной суммой*** для функции $R(x,y,z)$ по поверхности (S) по переменным x и y (соответствующей данному разбиению области (S) и данному выбору точек K_i).

Пусть d_i – диаметр (ΔS_i), $\quad \lambda = \max\limits_{1\le i\le n} d_i$

Число I *называется* ***пределом интегральных сумм*** $I_n(\Delta S_i, K_i)$ *при* $\lambda \to 0$ *, если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что для любого разбиения поверхности* (S) *у которого* $\lambda < \delta$, *при любом выборе точек* K_i *выполняется неравенство*

$$|\, I_n(\Delta S_i, K_i) - I \,| < \varepsilon.$$

Если существует предел интегральных сумм $I_n(\Delta S_i, K_i)$ *при* $\lambda \to 0$, *то его называют* ***поверхностным интегралом II рода от функции $R(x, y, z)$ по поверхности (S) по переменным x и y***.

Обозначают: $$\iint\limits_{(S)} R(x,y,z)\,dxdy.$$

Аналогично определяются интегралы

$$\iint\limits_{(S)} P(x,y,z)\,dydz \quad \text{и} \quad \iint\limits_{(S)} Q(x,y,z)\,dxdz$$

Сумму

$$\iint\limits_{(S)} P(x,y,z)\,dydz + \iint\limits_{(S)} Q(x,y,z)\,dxdz + \iint\limits_{(S)} R(x,y,z)\,dxdy$$

записывают в виде

$$\iint\limits_{(S)} P(x,y,z)\,dydz + Q(x,y,z)\,dxdz + R(x,y,z)\,dxdy$$

и ***называют поверхностным интегралом*** **II** ***рода*** (***по координатам***).

Свойства поверхностного интеграла II рода

Замечание: предполагаем, что все рассматриваемые в свойствах интегралы существуют.

1. Поверхностный интеграл II рода зависит от стороны поверхности (т.е. от выбора нормали). При перемене стороны поверхности (S) поверхностный интеграл II рода меняет знак.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак поверхностного интеграла II рода, т.е.

$$\iint\limits_{(S)} c\cdot P dydz = c\cdot \iint\limits_{(S)} P dydz\,,$$

$$\iint\limits_{(S)} c\cdot Q dxdz = c\cdot \iint\limits_{(S)} Q dxdz\,,$$

$$\iint\limits_{(S)} c\cdot R dxdy = c\cdot \iint\limits_{(S)} R dxdy\,.$$

3. Поверхностный интеграл II рода от алгебраической суммы двух (конечного числа) функций равен алгебраической сумме криволинейных поверхностных II рода от этих функций, т.е.

$$\iint\limits_{(S)}\left[P_1+P_2\right]dydz=\iint\limits_{(S)}P_1dydz+\iint\limits_{(S)}P_2dydz$$

$$\iint\limits_{(S)}\left[Q_1+Q_2\right]dxdz=\iint\limits_{(S)}Q_1dxdz+\iint\limits_{(S)}Q_2dxdz$$

$$\iint\limits_{(S)}\left[R_1+R_2\right]dxdy=\iint\limits_{(S)}R_1dxdy+\iint\limits_{(S)}R_2dxdy$$

4. Если поверхность (S) разбита на две части (S_1) и (S_2), не имеющих общих внутренних точек, то

$$\iint\limits_{(S)}Pdydz+Qdxdz+Rdxdy=$$

$$=\iint\limits_{(S_1)}Pdydz+Qdxdz+Rdxdy+\iint\limits_{(S_2)}Pdydz+Qdxdz+Rdxdy$$

(свойство аддитивности поверхностного интеграла II рода).

5. Если (S) – цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными оси Ox (т.е. имеющая уравнение $\varphi(y,z)=0$), то

$$\iint\limits_{(S)} P(x,y,z)\,dydz = 0$$

Если (S) – цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными оси Oy (т.е. имеющая уравнение $\psi(x,z)=0$), то

$$\iint\limits_{(S)} Q(x,y,z)\,dxdz = 0$$

Если (S) – цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными оси Oz (т.е. имеющая уравнение $\chi(x,y)=0$), то

$$\iint\limits_{(S)} R(x,y,z)\,dxdy = 0$$

3. Вычисление поверхностного интеграла II рода

Пусть (S) – двусторонняя поверхность, заданная уравнением $z = f(x,y)$,

(σ_{xy}) – проекция (S) на плоскость xOy, квадрируемая область

$f(x,y)$ – непрерывна в области (σ_{xy}) ,

$R(x,y,z)$ – непрерывна на (S) .

Выберем верхнюю сторону поверхности (т.е. угол между нормалью к поверхности и осью Oz острый) .

Тогда:

$$\iint\limits_{(S)} R(x,y,z)dxdy = \iint\limits_{(\sigma_{xy})} R(x,y,f(x,y))dxdy$$

Выберем нижнюю сторону поверхности (т.е. угол между нормалью к поверхности и осью Oz тупой) .

Тогда:

$$\iint\limits_{(S)} R(x,y,z)dxdy = -\iint\limits_{(\sigma_{xy})} R(x,y,f(x,y))dxdy$$

Аналогично вычисляются интегралы

$$\iint\limits_{(S)} P(x,y,z)dydz \quad \text{и} \quad \iint\limits_{(S)} Q(x,y,z)dxdz$$

Теорема (достаточные условия существования поверхностного интеграла II рода).

Если (S) *– двусторонняя поверхность, состоящая из конечного числа явно заданных поверхностей* $z = f_i(x, y)$, $R(x, y, z)$ *– кусочно-непрерывна на* (S), $f_i(x, y)$ *– кусочно-непрерывна в области* (σ) (*проекции поверхности* (S) *на плоскость* xOy), *то поверхностный интеграл* II *рода*

$$\iint\limits_{(S)} R(x,y,z)dxdy$$

существует.

Аналогичные утверждения справедливы и для интегралов

$$\iint\limits_{(S)} P(x,y,z)dydz \quad \text{и} \quad \iint\limits_{(S)} Q(x,y,z)dxdz$$

4. Формула Остроградского – Гаусса

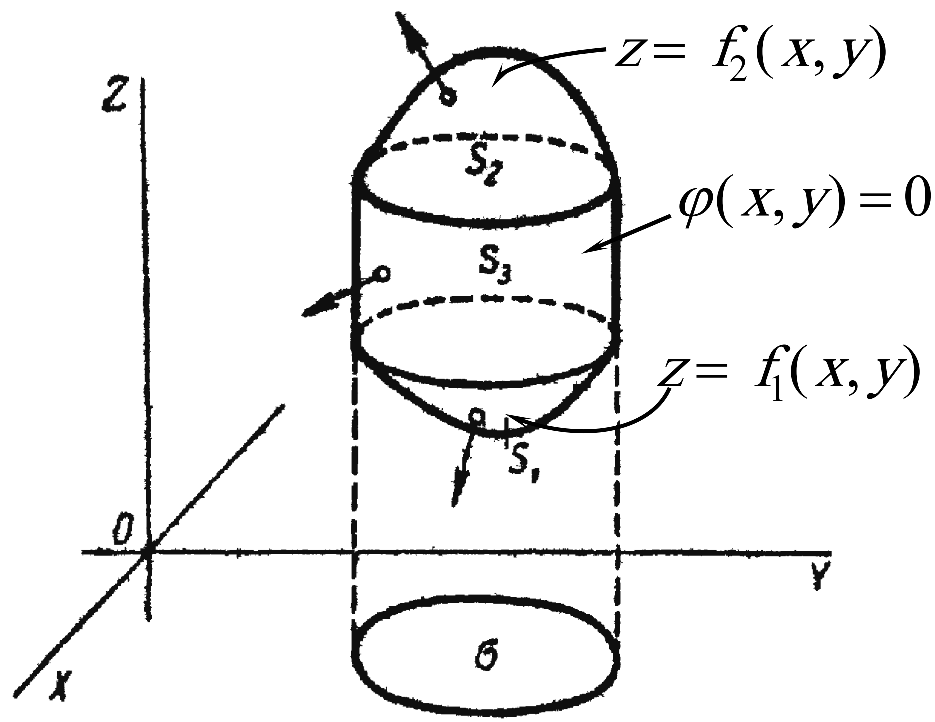
Пусть (V) кубируемое цилиндрическое тело, ограниченное поверхностями (S_1): $z = f_1(x, y)$ (низ),

(S_2): $z = f_2(x, y)$ (верх),

(S_3): $\varphi(x, y) = 0$ (боковая поверхность),

функции $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ непрерывны в квадрируемой области $(\sigma_{xy}) \in xOy$ (проекции (V) на плоскость xOy),

$R(x, y, z)$ и $R'_z(x, y, z)$ кусочно-непрерывны и ограничены в области (V)



Получили
$$\iint\limits_{+(S)} R(x,y,z)dxdy = \iiint\limits_{(V)} R'_z dxdydz$$

Аналогично получаем:
$$\iint\limits_{+(S)} P(x,y,z)dydz = \iiint\limits_{(V)} P'_x dxdydz$$
$$\iint\limits_{+(S)} Q(x,y,z)dxdz = \iiint\limits_{(V)} Q'_y dxdydz$$

В общем случае:
$$\iint\limits_{+(S)} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint\limits_{(V)} (P'_x + Q'_y + R'_z)dxdydz$$

– **формула Остроградского – Гаусса**.

5. Связь между поверхностными интегралами I и II рода

Пусть (S) – двусторонняя гладкая поверхность, заданная уравнением $z = f(x,y)$

(σ_{xy}) – проекция (S) на плоскость xOy, квадрируемая область,

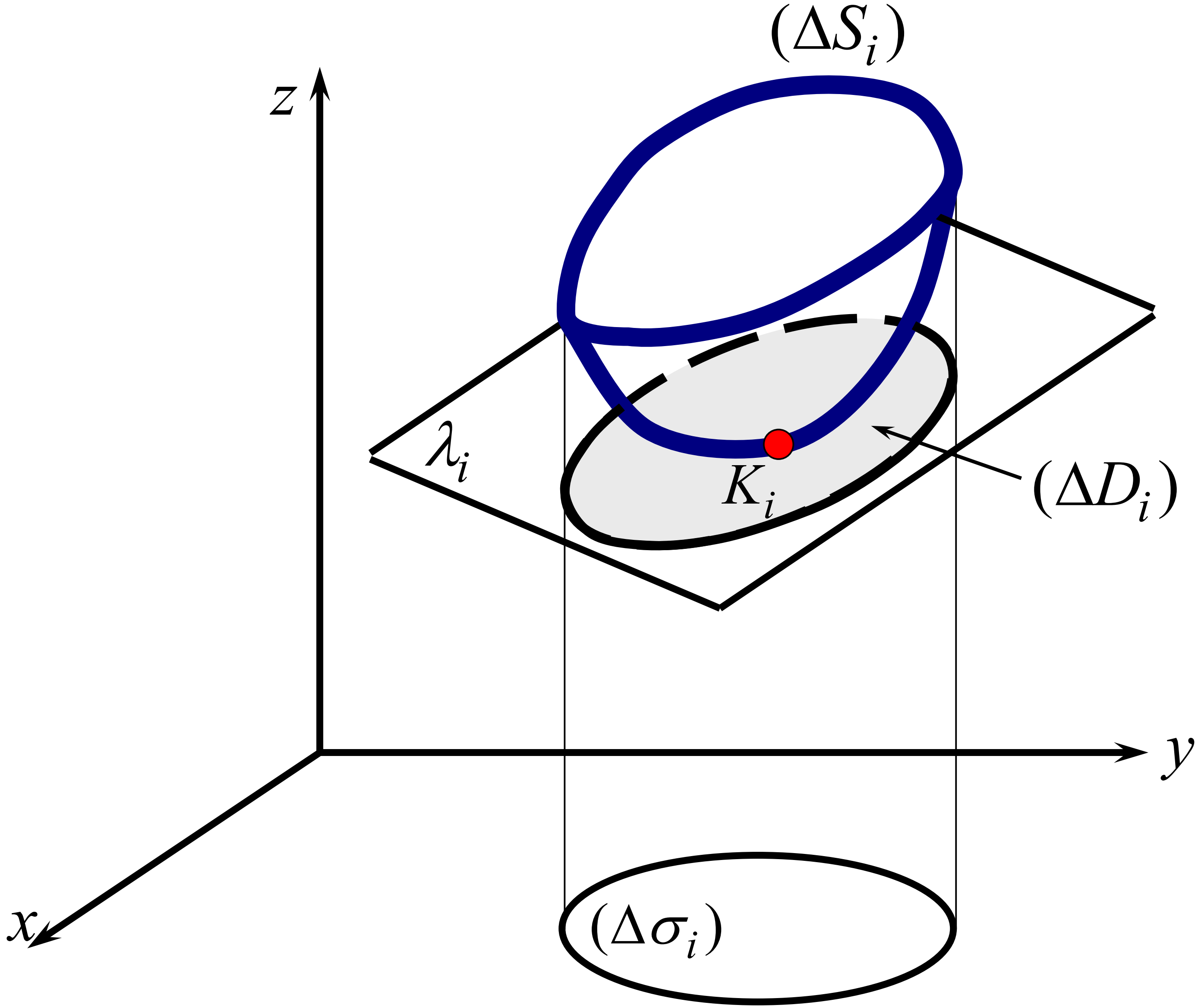
$f(x,y)$ – непрерывна в (σ_{xy})

$R(x,y,z)$ – непрерывна на (S) .

Выберем верхнюю сторону поверхности (т.е. угол между нормалью к поверхности и осью Oz острый) .

Тогда существует интеграл

$$\iint\limits_{(S)} R(x,y,z)dxdy$$



(ΔS_i)
z
λ_i
K_i
(ΔD_i)
y
x
$(\Delta\sigma_i)$

Получили:

$$\iint\limits_{(S)} R(x,y,z)dxdy = \iint\limits_{(S)} R(x,y,z)\cdot\cos\gamma ds$$

Формула остается справедливой и при выборе нижней стороны поверхности.

Аналогично доказывается справедливость формул

$$\iint\limits_{(S)} P(x,y,z)dydz = \iint\limits_{(S)} P(x,y,z)\cdot\cos\alpha ds$$

$$\iint\limits_{(S)} Q(x,y,z)dxdz = \iint\limits_{(S)} Q(x,y,z)\cdot\cos\beta ds$$

Таким образом, в общем случае получаем:

$$\iint\limits_{(S)} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint\limits_{(S)} \left(P\cdot\cos\alpha + Q\cdot\cos\beta + R\cdot\cos\gamma\right)ds$$

– **связь поверхностных интегралов I и II рода**.

Лемма 2.

Пусть 1) *гладкая двусторонняя поверхность* (S) *имеет уравнение* $z = f(x, y)$,

2) (σ_{xy}) – *квадрируемая область, проекция* (S) *на* xOy.

Если существует интеграл

$$\iint\limits_{+(S)} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy$$

то справедливо равенство

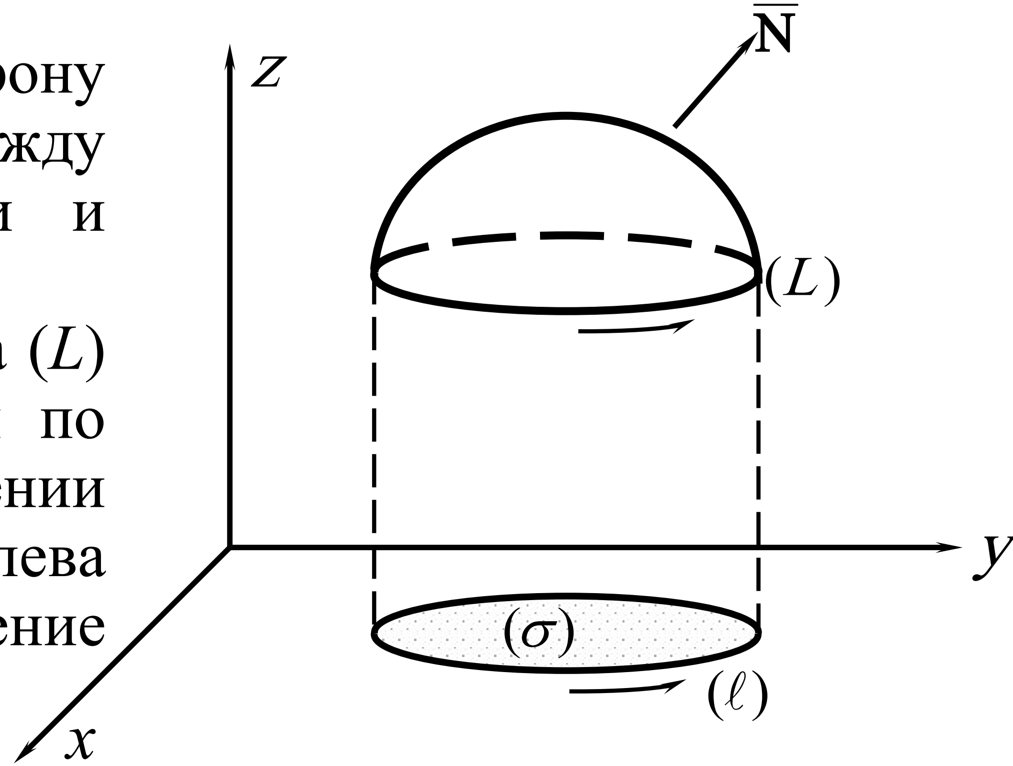
$$\iint\limits_{+(S)} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint\limits_{(\sigma_{xy})} \left(- f'_x \cdot P - f'_y \cdot Q + R\right) dxdy$$

7. Формула Стокса

Пусть (S) – двусторонняя незамкнутая поверхность, которая может быть задана явно, например, уравнением $z = f(x, y)$;
(σ_{xy}) – проекция (S) на плоскость xOy,
(L) – граница (S), кусочно-гладкая замкнутая кривая;
(ℓ) – проекция (L) на плоскость xOy ($\Rightarrow$ кусочно-гладкая замкнутая).

Выберем верхнюю сторону поверхности (т.е. угол между нормалью к поверхности и осью Oz острый) .

Выберем направление обхода (L) так, чтобы при движении по (L) в выбранном направлении область (S) оставалась слева (положительное направление обхода).



Пусть $f(x, y)$ – непрерывна в области (σ_{xy});
$P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ – непрерывны на (S) вместе со своими частными производными.

Тогда существует интеграл

$$\oint\limits_{+(L)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

и для него справедливо равенство:

$$\oint\limits_{+(L)} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint\limits_{(S)} (R'_y - Q'_z)dydz + (P'_z - R'_x)dxdz + (Q'_x - P'_y)dxdy$$

– **формула Стокса**

§5. Векторное поле

1. Определение векторного поля

Определение. *Пусть G – некоторая область в пространстве $Oxyz$. Говорят, что на G задано* ***векторное поле*** *(**векторная функция**), если в каждой точке $M(x;\ y;\ z)\in G$ задан вектор* $\bar{\mathbf{a}}$, *длина и направление которого зависят от координат точки M.*

Записывают: $\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{a}}(x;y;z) = \bar{\mathbf{a}}(M)$

или $\bar{\mathbf{a}} = P(x;\ y;\ z)\mathbf{i} + Q(x;\ y;\ z)\mathbf{j} + R(x;\ y;\ z)\mathbf{k}$

Векторное поле может зависеть не только от координат точки, но и от времени. Такое поле называют ***нестационарным*** (***переменным***).

Будем рассматривать только ***стационарные*** (не зависящие от времени) векторные поля.

Частные случаи векторных полей:

1) Однородное поле

Векторное поле называется ***однородным***, если $\bar{\mathbf{a}}(M)$ – постоянный вектор, т.е. $\bar{\mathbf{a}}(M) = \bar{\mathbf{a}}$.

2) Плоское поле

Векторное поле называется ***плоским***, если в выбранной системе координат координаты вектора $\bar{\mathbf{a}}(M)$ не зависят от одной переменной, причем проекция вектора $\bar{\mathbf{a}}(M)$ на ось отсутствующей переменной – нулевая.

Например, $\bar{\mathbf{a}} = P(x; y)\mathbf{i} + Q(x; y)\mathbf{j}$

Основные характеристики векторных полей

1) векторные линии
2) поток вектора
3) дивергенция
4) циркуляция
5) ротор

2. Векторные линии

Определение. ***Векторной линией*** *векторного поля* $\bar{\mathbf{a}}(M)$ *называется линия, в каждой точке которой направление касательной совпадает с направлением поля (т.е. с вектором* $\bar{\mathbf{a}}(M)$).

Примеры.

1. В поле скоростей текущей жидкости векторные линии – линии тока жидкости.
2. В электрическом (электромагнитном) поле векторные линии – силовые линии.

В векторном поле $\bar{\mathbf{a}} = P(x;\ y;\ z)\mathbf{i} + Q(x;\ y;\ z)\mathbf{j} + R(x;\ y;\ z)\mathbf{k}$ векторные линии – решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}$$

3. Поток вектора. Дивергенция

Поток вектора и дивергенция – характеристики интенсивности поля.

Пусть в области $G \subset Oxyz$ задано векторное поле:

$$\bar{\mathbf{a}}(M) = P(x; y; z)\mathbf{i} + Q(x; y; z)\mathbf{j} + R(x; y; z)\mathbf{k}$$

(S) – незамкнутая ориентированная поверхность в G.

Определение. ***Потоком векторного поля*** $\bar{\mathbf{a}}(M)$ (*вектора* $\bar{\mathbf{a}}(M)$) *через поверхность* (S) *называется величина* K, *равная*

$$K = \iint\limits_{(S)} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy$$

Физический смысл потока вектора

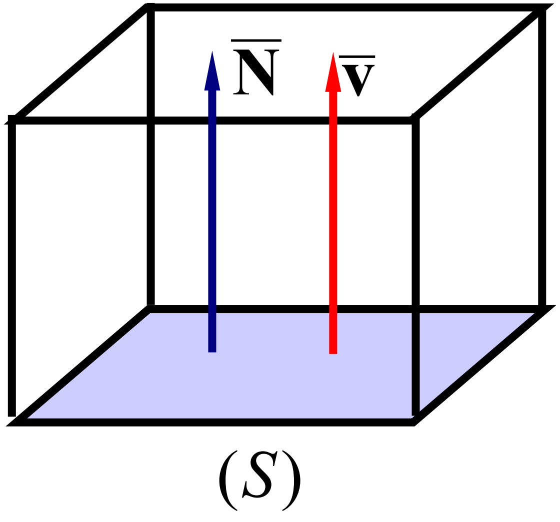
Пусть имеется текущая жидкость:

$\Rightarrow \overline{\mathbf{v}}(M)$ – поле скоростей текущей жидкости.

(S) – незамкнутая двусторонняя поверхность, помещенная в жидкость

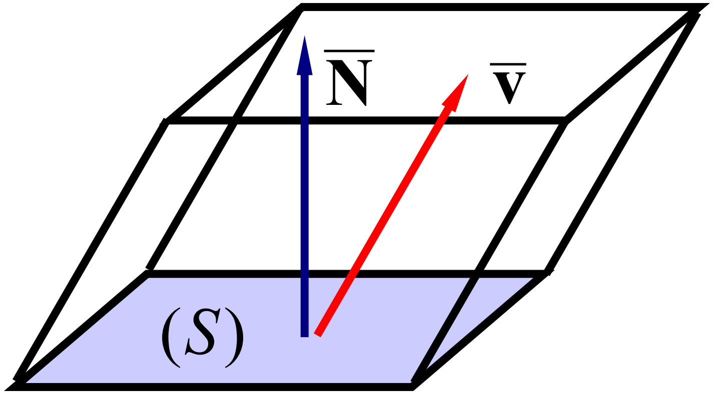
Найдем K – количество жидкости, протекающей через (S) за единицу времени (в направлении нормали $\overline{\mathbf{N}}$).

1. Пусть (S) – плоская область, $\overline{\mathbf{v}}$ – const, $\overline{\mathbf{v}} \perp (S)$.



$$\Rightarrow \; K = S \cdot |\, \overline{\mathbf{v}} \,|$$

2. Пусть (S) – плоская область, φ – угол между $\bar{\mathbf{v}}$ и $\bar{\mathbf{N}}$.



$$\Rightarrow K = S \cdot \underbrace{\cos\varphi \cdot |\bar{\mathbf{v}}|}_{\text{пр}_{\vec{N}} \vec{V}}$$

Пусть $\bar{\mathbf{n}} \perp (S)$ и $|\bar{\mathbf{n}}| = 1$.

Тогда $\text{пр}_{\vec{n}} \vec{V} = \dfrac{(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{n}})}{|\bar{\mathbf{n}}|} = (\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{n}}) \quad \Rightarrow K = S \cdot (\bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{v}})$

3. Рассмотрим общий случай.

Пусть (S) – произвольная поверхность,

$$\bar{\mathbf{v}} = P(x; y; z)\mathbf{i} + Q(x; y; z)\mathbf{j} + R(x; y; z)\mathbf{k}$$

1. Разобьем (S) на n частей, не имеющих общих внутренних точек: $(\Delta S_1), (\Delta S_2), \ \ldots , (\Delta S_n)$.
2. На каждой части (ΔS_i) выберем произвольную точку M_i

Если (ΔS_i) – мала, то (ΔS_i) можно считать плоской, а скорость жидкости постоянной и равной $\bar{\mathbf{v}}(M_i)$

$$\Rightarrow \ K_i \approx \Delta S_i \cdot (\bar{\mathbf{n}}(M_i) \, , \bar{\mathbf{v}}(M_i) \,)$$

где K_i – поток жидкости через (ΔS_i) .

$$\Rightarrow \quad K = \sum_{i=1}^{n} K_i \approx \sum_{i=1}^{n} (\bar{\mathbf{v}}(M_i), \bar{\mathbf{n}}(M_i)) \cdot \Delta S_i$$

$$\Rightarrow \quad K = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} (\bar{\mathbf{v}}(M_i), \bar{\mathbf{n}}(M_i)) \cdot \Delta S_i$$

где d_i – диаметр (ΔS_i) , $\quad \lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} d_i$

Получили

$$K = \iint\limits_{(s)} (\overline{\mathbf{v}}, \overline{\mathbf{n}}) ds$$

$$\Rightarrow \quad K = \iint\limits_{(S)} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) ds$$

$$\Rightarrow \quad K = \iint\limits_{(S)} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy$$

Таким образом, *если* $\overline{\mathbf{v}}(M)$ – *поле скоростей текущей жидкости*, *то* (в направлении нормали). *K* – ***количество жидкости, протекающей через поверхность*** (*S*) ***за единицу времени***

Если угол между нормалью к поверхности и вектором $\boldsymbol{\nabla}(M)$ тупой, то $K < 0$.

$\Rightarrow$ жидкость течет в сторону, противоположную нормали к поверхности.

Если угол между нормалью к поверхности и вектором $\boldsymbol{\nabla}(M)$ равен $90°$, то $K = 0$.

$\Rightarrow$ жидкость через поверхность не течет (линии тока жидкости параллельны поверхности).

Физический смысл потока вектора через замкнутую поверхность

Пусть $\bar{\mathbf{v}}(M)$ – поле скоростей текущей жидкости,

(S) – замкнутая поверхность (внешняя сторона), ограничивающая область (V).

Тогда $K=K_2-K_1$, где K_1 – количество жидкости втекающей в область (V), K_2 – количество жидкости вытекающей из (V) за единицу времени.

$\Rightarrow$ 1. Если $K > 0$, то из (V) вытекает жидкости больше чем втекает (внутри области (V) имеются источники, добавляющие жидкость).

2. Если $K<0$, то из (V) вытекает жидкости меньше чем втекает (внутри области (V) имеются стоки, удаляющие жидкость).

3. Если $K=0$, то из (V) вытекает жидкости столько же, сколько втекает (внутри области (V) либо нет источников и стоков, либо их суммарная мощность равна).

Определение. ***Дивергенцией*** *векторного поля в точке* M *называется предел отношения потока вектора через замкнутую поверхность, окружающую точку* M*, к объему тела, ограниченного этой поверхностью, при условии, что вся поверхность стягивается в точку* M.

Обозначают: $\mathrm{div}\,\bar{\mathbf{a}}(M)$.

Таким образом, если

$$\bar{\mathbf{a}}(M) = P(x; y; z)\mathbf{i} + Q(x; y; z)\mathbf{j} + R(x; y; z)\mathbf{k}$$

то

$$\mathrm{div}\,\bar{\mathbf{a}}(M) = \lim_{(S)\to M} \frac{\displaystyle\oiint_{(S)} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy}{V}$$

Если $\mathrm{div}\,\bar{\mathbf{a}}(M) > 0$, то точка М называется ***источником***.

Если $\mathrm{div}\,\bar{\mathbf{a}}(M) < 0$, то точка М называется ***стоком***.

Величина $|\mathrm{div}\,\bar{\mathbf{a}}(M)|$ характеризует мощность источника (стока).

Теорема. *Пусть в области* $G \subset Oxyz$ *задано векторное поле*:

$$\bar{\mathbf{a}}(M) = P(x;\, y;\, z)\mathbf{i} + Q(x;\, y;\, z)\mathbf{j} + R(x;\, y;\, z)\mathbf{k},$$

причем функции P,Q,R *и их частные производные непрерывны в* G.

Тогда $\forall M \in G$ *существует* $\operatorname{div}\bar{\mathbf{a}}(M)$ *и справедлива формула*

$$\operatorname{div}\bar{\mathbf{a}}(M) = \frac{\partial P(M)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M)}{\partial y} + \frac{\partial R(M)}{\partial z}$$

Обозначим

$$\overline{\nabla} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x};\, \frac{\partial}{\partial y};\, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$$

Этот символический вектор называют ***набла-вектором*** или ***оператором Гамильтона***.

$$\Rightarrow \operatorname{div}\bar{\mathbf{a}}(M) = (\overline{\nabla}, \bar{\mathbf{a}})$$

Теорема Остроградского – Гаусса в векторной форме.

Поток вектора $\bar{\mathbf{a}}(M) = P(x;\ y;\ z)\mathbf{i} + Q(x;\ y;\ z)\mathbf{j} + R(x;\ y;\ z)\mathbf{k}$ *изнутри замкнутой поверхности* (S) (*т.е. нормаль к поверхности внешняя*) *равен тройному интегралу от дивергенции этого вектора по телу, ограниченному поверхностью* (S):

$$\iint\limits_{+(S)} P dydz + Q dxdz + R dxdy = \iiint\limits_{(V)} \mathrm{div}\,\bar{\mathbf{a}}(x, y, z) dxdydz$$

Физический смысл теоремы Остроградского – Гаусса:

В поле скоростей текущей жидкости поток жидкости через замкнутую поверхность равен суммарной мощности всех источников и стоков ограниченных этой поверхность.

Свойства дивергенции

1. Если $\bar{\mathbf{a}}(M) = \mathrm{const}$, то $\mathrm{div}\,\bar{\mathbf{a}}(M) = 0$;

2. Если C_1, C_2 – const, то $\mathrm{div}(C_1\bar{\mathbf{a}}_\mathbf{1} + C_2\bar{\mathbf{a}}_\mathbf{2}) = C_1\mathrm{div}\,\bar{\mathbf{a}}_\mathbf{1} + C_2\mathrm{div}\,\bar{\mathbf{a}}_\mathbf{2}$;

3. Если $u = u(x, y, z) = u(M)$, то

$$\mathrm{div}[u(M)\cdot\bar{\mathbf{a}}(M)] = u(M)\cdot\mathrm{div}\,\bar{\mathbf{a}}(M) + (\mathrm{grad}\,u(M),\ \bar{\mathbf{a}}(M))$$

4. Циркуляция. Ротор

Циркуляция и ротор – характеристики вращательной способности поля.

Пусть в области $G \subset Oxyz$ задано векторное поле:

$$\bar{\mathbf{a}}(M) = P(x;\, y;\, z)\mathbf{i} + Q(x;\, y;\, z)\mathbf{j} + R(x;\, y;\, z)\mathbf{k}$$

(ℓ) – замкнутый контур в G.

Определение. ***Циркуляцией векторного поля*** $\bar{\mathbf{a}}(M)$ (*вектора* $\bar{\mathbf{a}}(M)$) *по замкнутому контуру* (ℓ) *называется величина* C, *равная*

$$C = \oint\limits_{(\ell)} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

Физический смысл циркуляции вектора

Если $\bar{\mathbf{a}}(M) = P(x;\; y;\; z)\mathbf{i} + Q(x;\; y;\; z)\mathbf{j} + R(x;\; y;\; z)\mathbf{k}$ – сила, под действием которой точка перемещается по контуру (ℓ), то циркуляция вектора $\bar{\mathbf{a}}(M)$ – работа силы.

Наибольшего значения циркуляция будет достигать если (ℓ) – векторная линия.

Определение. ***Ротором векторного поля***

$$\bar{\mathbf{a}}(M) = P(x; y; z)\mathbf{i} + Q(x; y; z)\mathbf{j} + R(x; y; z)\mathbf{k}$$

называется вектор $[\overline{\nabla}, \overline{\mathbf{a}}]$

Обозначают: $\mathrm{rot}\,\bar{\mathbf{a}}(M)$

Имеем

$$\mathrm{rot}\,\overline{\mathbf{a}}(M) = [\overline{\nabla}, \overline{\mathbf{a}}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Физический смысл ротора

Вектор $\mathrm{rot}\,\bar{\mathbf{a}}(M)$ указывает направление, ортогонально которому вращательная способность поля наибольшая.

Теорема (формула Стокса в векторной форме). *Циркуляция вектора* $\bar{\mathbf{a}}(M) = P(x;\, y;\, z)\mathbf{i} + Q(x;\, y;\, z)\mathbf{j} + R(x;\, y;\, z)\mathbf{k}$ *по замкнутому контуру равна потоку ротора этого вектора через любую поверхность, ограниченную этим контуром* (говорят: *натянутую на этот контур*).

Свойства ротора

1. Если $\bar{\mathbf{a}}(M) = \mathrm{const}$, то $\mathrm{rot}\,\bar{\mathbf{a}}(M) = \bar{\mathbf{0}}$.

2. Если C_1, C_2 – const, то $\mathrm{rot}(C_1\bar{\mathbf{a}}_\mathbf{1} + C_2\bar{\mathbf{a}}_\mathbf{2}) = C_1\mathrm{rot}\,\bar{\mathbf{a}}_\mathbf{1} + C_2\mathrm{rot}\,\bar{\mathbf{a}}_\mathbf{2}$.

3. Если $u = u(x,y,z) = u(M)$, то

$$\mathrm{rot}[u(M)\cdot\bar{\mathbf{a}}(M)] = u(M)\cdot\mathrm{rot}\,\bar{\mathbf{a}}(M) + [\mathrm{grad}\,u(M)\,,\,\bar{\mathbf{a}}(M)].$$

4. $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,u) = \bar{\mathbf{0}}$.

5. $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\bar{\mathbf{a}}) = 0$.

5. Типы векторных полей

Соленоидальное поле

Векторное поле $\bar{\mathbf{a}}(M)$ *называется* ***соленоидальным*** (трубчатым), *если* $\operatorname{div}\bar{\mathbf{a}}(M) \equiv 0$.

Физический смысл: векторное поле соленоидальное $\Leftrightarrow$ в нем нет источников и стоков.

Свойства соленоидального поля

1. *Если векторное поле* $\bar{\mathbf{a}}(M)$ *является ротором некоторого векторного поля* (т.е. $\bar{\mathbf{a}}(M) = \operatorname{rot} \bar{\mathbf{b}}(M) = [\bar{\nabla}, \bar{\mathbf{b}}]$), *то оно является соленоидальным* .

   Вектор $\bar{\mathbf{b}}(M)$ называют ***векторным потенциалом*** векторного поля $\bar{\mathbf{a}}(M)$.

2) *Поток векторного поля через любую замкнутую поверхность* (S) *равен нулю*.

Потенциальное поле

Векторное поле $\bar{\mathbf{a}}(M)$ *называется* ***потенциальным****, если*

$$\operatorname{rot}\bar{\mathbf{a}}(M) \equiv \bar{\mathbf{0}}$$

Свойства потенциального поля

1. *Векторное поле* $\bar{\mathbf{a}}(M)$ *потенциальное* $\Leftrightarrow$ *оно является градиентом некоторого скалярного поля*, т.е.

   $$\bar{\mathbf{a}}(M) = \operatorname{grad} u(M) = \bar{\nabla} u$$

   Функцию $u(M)$ называют ***потенциалом*** векторного поля $\bar{\mathbf{a}}(M)$.

2. *Циркуляция потенциального векторного поля по любой замкнутой линии* (ℓ) *равен нулю.*

3. *Векторные линии потенциального поля незамкнуты.*

4. *В потенциальном поле векторные линии перпендикулярны к поверхностям уровня потенциала.*

Гармоническое полн

Векторное поле $\bar{\mathbf{a}}(M)$ *называется* ***гармоническим****, если оно является соленоидальным и потенциальным одновременно.*

Свойства гармонического поля

1. *Поле* $\bar{\mathbf{a}}(M)$ *гармоническое* $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rot}\,\bar{\mathbf{a}}(M) \equiv \bar{\mathbf{0}}$ *и* $\mathrm{div}\,\bar{\mathbf{a}}(M) \equiv 0$.
2. *Если векторное поле* $\bar{\mathbf{a}}(M)$ *гармоническое, то* $\exists u(M)$ *такая, что*

$$\bar{\mathbf{a}}(M) = \mathrm{grad}\, u(M)$$

и

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \qquad (5)$$

Уравнение (5) называют ***уравнением Лапласа***.

Функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа, называется ***гармонической***.

Векторное поле $\bar{\mathbf{a}}(M)$, *не яляющееся соленоидальным, потенциальным или гармоническим, называется полем общего вида.*

Теорема (о представлении векторного поля общего вида в виде суммы потенциального и соленоидального полей).

Пусть $\bar{\mathbf{a}}(M) = P(M)\mathbf{i} + Q(M)\mathbf{j} + R(M)\mathbf{k}$ *– поле общего вида,*

$P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$ *– непрерывно дифференцируемы.*

Тогда векторное поле $\bar{\mathbf{a}}(M)$ *может быть представлено в виде* $\bar{\mathbf{a}}(M) = \bar{\mathbf{a}}_1(M) + \bar{\mathbf{a}}_2(M)$,

где $\bar{\mathbf{a}}_1(M)$ *– потенциальное поле,*

$\bar{\mathbf{a}}_2(M)$ *– соленоидальное поле.*