

## Тема 1 «Двойной интеграл в декартовой системе координат»

1. Найти массу  $m$  плоской области  $(\sigma)$ , ограниченной линиями  $xy = 1$ ,  $x = 2$ ,  $y = x$ , если плотность распределения массы  $\gamma(x, y) = x^2/y^2$ .

**Ответ:**  $m = 9/4$ .

2. Найти площадь плоской области  $(\sigma)$ , ограниченной линиями  $y = x^2$ ,  $y = 0$ ,  $2y + x = 3$ .

**Ответ:**  $S = 4/3$ .

3. Найти объем цилиндрического тела, основанием которого является область  $(\sigma)$ , ограниченная линиями  $y = \ln 3$ ,  $y = \ln 4$ ,  $x = 1/6$ ,  $x = 1/3$ , а «крышкой» – поверхность  $z = 12ye^{6xy}$ .

**Ответ:**  $V = 5$ .

4. Найти  $\iint_{(\sigma)} y dx dy$ , где  $(\sigma)$  – область ограниченная линиями  $y = 2\sqrt{x}$ ,

$$x = 4, \quad y = \sqrt{4x - x^2}.$$

**Ответ:**  $32/3$ .

5. Изменив порядок интегрирования, записать выражение в виде одного повторного интеграла

а)  $\int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy.$

б)  $\int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x, y) dx.$

## Тема 2 «Замена переменных в двойном интеграле»

1. Найти  $\iint_{(\sigma)} \arctg \frac{y}{x} dx dy$ , где  $(\sigma)$  – область, заданная неравенствами  $x^2 + y^2 \leq 4$ ,  $x^2 + y^2 \geq 1$ ,  $y \geq x$ ,  $y \leq 2x$ .

**Ответ:**  $\frac{3}{4} \cdot \left( \arctg^2 2 - \frac{\pi^2}{16} \right)$ .

2. Вычислить  $\iint_{(\sigma)} (x + y) dx dy$ , где  $(\sigma)$  – область, заданная неравенствами  $x^2 + y^2 \leq 4y$ ,  $x^2 + y^2 \geq 2y$

**Ответ:**  $7\pi$ .

3. Найти площадь области, расположенной в I четверти и ограниченной линиями  $x^2 + y^2 = 4x$ ,  $x^2 + y^2 = 2y$ .

4. Найти массу плоской области, заданной неравенствами  $1 \leq \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} \leq 4$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq \frac{x}{2}$ , если плотность распределения масса  $\gamma(x, y) = x/y$

**Ответ:**  $m = 12 \ln 2$ .

### Тема 3 «Тройной интеграл в декартовой системе координат»

1. Найти объем тела, ограниченной плоскостями  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $x + y + z = 2$ .

**Ответ:**  $V = 4/3$ .

2. Найти массу тела, ограниченного поверхностями  $y^2 = -x$ ,  $z - x = 1$ ,  $z = 0$ , если плотность распределения массы  $\gamma(x, y, z) = 1 - x$ .

**Ответ:**  $m = 16/21$ .

3. Найти  $\iiint_{(V)} \frac{dx dy dz}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$ , если  $(V)$  – тело, ограниченное поверхностями  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $x + y \leq 2$  ( $z \geq 0$ ).

**Ответ:** 2.

4. Найти массу тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 4, z + y = 4, z = 0, y = 0 \quad (y \geq 0),$$

если плотность распределения массы  $\gamma(x, y, z) = \frac{y}{4 - y}$ .

**Ответ:**  $m = 14/3$ .

5. Найти  $\iiint_{(V)} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ , где  $(V)$  – часть шара  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ , расположенная в первом октанте.

**Ответ:**  $\pi/8$ .