Математический анализ

Глава 4. Кратные интегралы

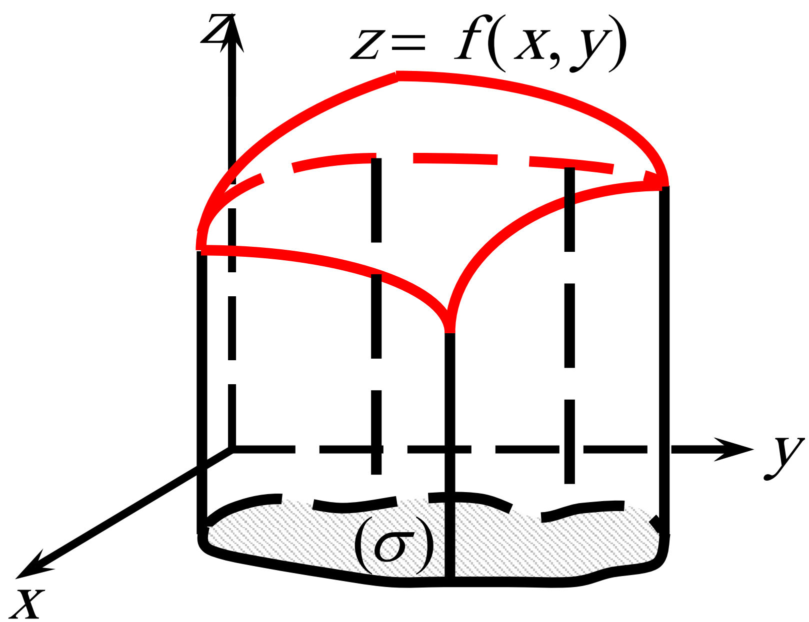
Лектор Ефремова О.Н.

2022 г.

§1. Двойной интеграл

1. Задача, приводящая к понятию двойного интеграла

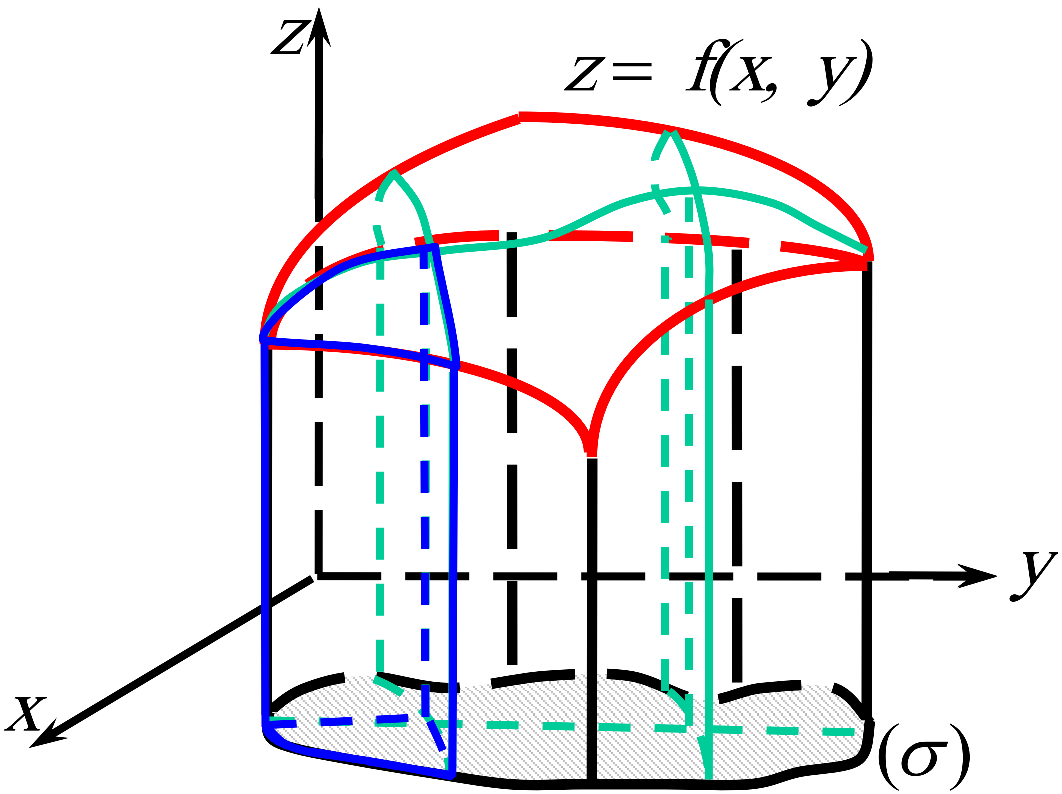
***Цилиндрическим телом с основанием* (σ)** называют область в пространстве, ограниченную областью $(\sigma)\in xOy$, поверхностью $z = f(x,y)$ и цилиндрической поверхностью $\varphi(x,y) = 0$, направляющей которой является граница области (σ).

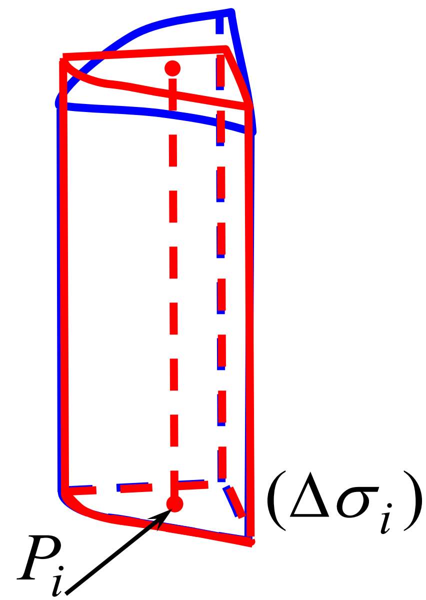


Задача (об объеме цилиндрического тела).

Пусть $f(x, y) \geq 0$, $\forall (x, y) \in (\sigma)$.

Найти объем V цилиндрического тела (V).





$$V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i$$

$$\Delta V_i \approx f(P_i) \cdot \Delta\sigma_i$$

$$\Rightarrow \quad V \approx \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot \Delta\sigma_i$$

$$\Rightarrow \quad V = \lim_{(\Delta\sigma_i) \to P_i} \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot \Delta\sigma_i$$

2. Определение и свойства двойного интеграла

Пусть (σ) – квадрируемая (т.е. имеющая площадь) область в плоскости xOy, и в области (σ) задана функция $z = f(x, y)$.

Определение.

1. Разобьем область (σ) произвольным образом на n частей, не имеющих общих внутренних точек:

$$(\Delta\sigma_1), (\Delta\sigma_2), \ \ldots \ , (\Delta\sigma_n).$$

2. В каждой области $(\Delta\sigma_i)$ выберем произвольную точку $P_i(\xi_i;\eta_i)$ и вычислим произведение $f(P_i) \cdot \Delta\sigma_i$, где $\Delta\sigma_i$ – площадь области $(\Delta\sigma_i)$.

Сумму

$$I_n(\Delta\sigma_i, P_i) = \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot \Delta\sigma_i$$

назовем ***интегральной суммой*** для функции $f(x, y)$ по области (σ), соответствующей данному разбиению области (σ) и данному выбору точек P_i.

Диаметром множества G будем называть наибольшее расстояние между любыми двумя точками множества G.

Пусть d_i – диаметр $(\Delta\sigma_i)$, $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} d_i$.

*Число I называется **пределом интегральных сумм** $I_n(\Delta\sigma_i, P_i)$ при $\lambda \to 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения области (σ), у которого $\lambda < \delta$, при любом выборе точек P_i выполняется неравенство*

$$| I_n(\Delta\sigma_i, P_i) - I | < \varepsilon.$$

*Если существует предел интегральных сумм $I_n(\Delta\sigma_i, P_i)$ при $\lambda \to 0$, то его называют **двойным интегралом от функции** $f(x, y)$ **по области** (σ).*

Обозначают: $\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)ds$, $\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dxdy$.

Теорема 1 (необходимое условие существования двойного интеграла).

Если функция $f(x,y)$ *интегрируема в области* (σ), *то она ограничена в этой области.*

Теорема 2 (достаточные условия существования двойного интеграла).

Если выполняются условия:

1) *область* (σ) – *квадрируемая,*
2) *функция* $f(x,y)$ *ограничена в области* (σ) *и непрерывна всюду, за исключением некоторого множества точек площади нуль,*

то $f(x,y)$ *интегрируема в области* (σ).

Свойства двойного интеграла

1. Геометрический смысл двойного интеграла.

Если $f(x,y)$ – неотрицательна и интегрируема в области (σ), то

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dxdy = V,$$

где V – объем цилиндрического тела с основанием (σ) и ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$.

2. $\iint\limits_{(\sigma)} dxdy = \sigma,$ где σ – площадь области (σ).

3. Постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла, т.е.

$$\iint\limits_{(\sigma)} c \cdot f(x,y)dxdy = c \cdot \iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dxdy.$$

4. Двойной интеграл от алгебраической суммы двух (конечного числа) функций равен алгебраической сумме двойных интегралов от этих функций, т.е.

$$\iint\limits_{(\sigma)} \left[f_1(x,y)+f_2(x,y)\right]dxdy = \iint\limits_{(\sigma)} f_1(x,y)dxdy + \iint\limits_{(\sigma)} f_2(x,y)dxdy.$$

5. Свойство аддитивности двойного интеграла.

Если область интегрирования (σ) разбита на две части (σ_1) и (σ_2), не имеющие общих внутренних точек, то

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{(\sigma_1)} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{(\sigma_2)} f(x,y)dxdy.$$

6. Если всюду в области (σ) $f(x, y) > 0$ ($f(x, y) \geq 0$), то

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dxdy > 0 \qquad \left(\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dxdy \geq 0 \right).$$

7. Если всюду в области (σ) $f(x, y) \leq \varphi(x, y)$, то

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dxdy \leq \iint\limits_{(\sigma)} \varphi(x,y)dxdy .$$

8. Следствие свойств 7 и 2.

Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x, y)$ в области (σ), то

$$m \cdot \sigma \leq \iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dxdy \leq M \cdot \sigma ,$$

где σ – площадь области (σ).

9. Теорема о среднем для двойного интеграла.

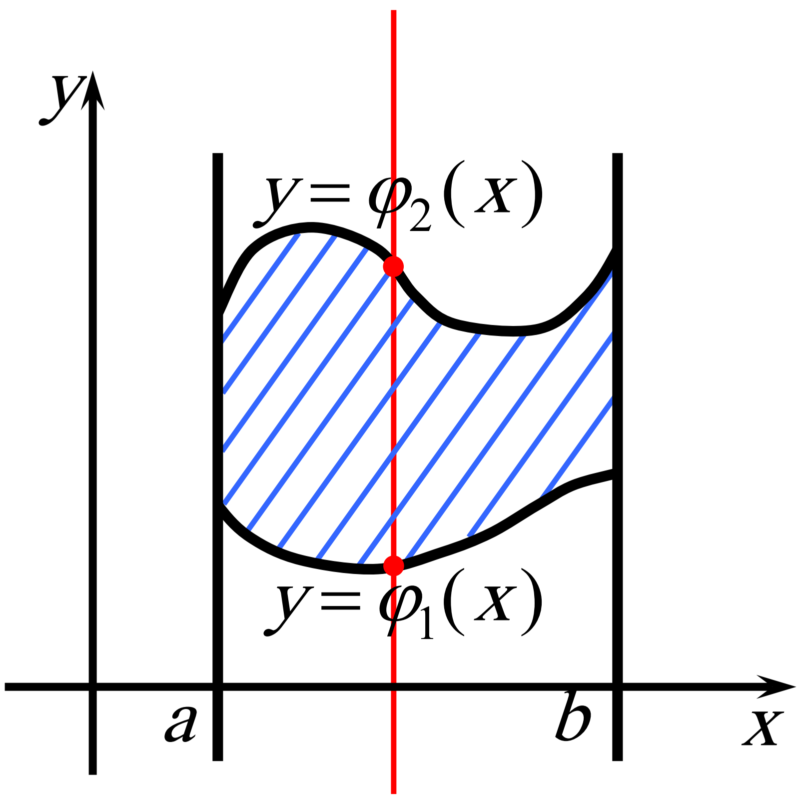
Если функция $f(x, y)$ *непрерывна в замкнутой и ограниченной области* (σ), *то найдется такая точка* $P_0(x_0, y_0)\in(\sigma)$, *что справедливо равенство*

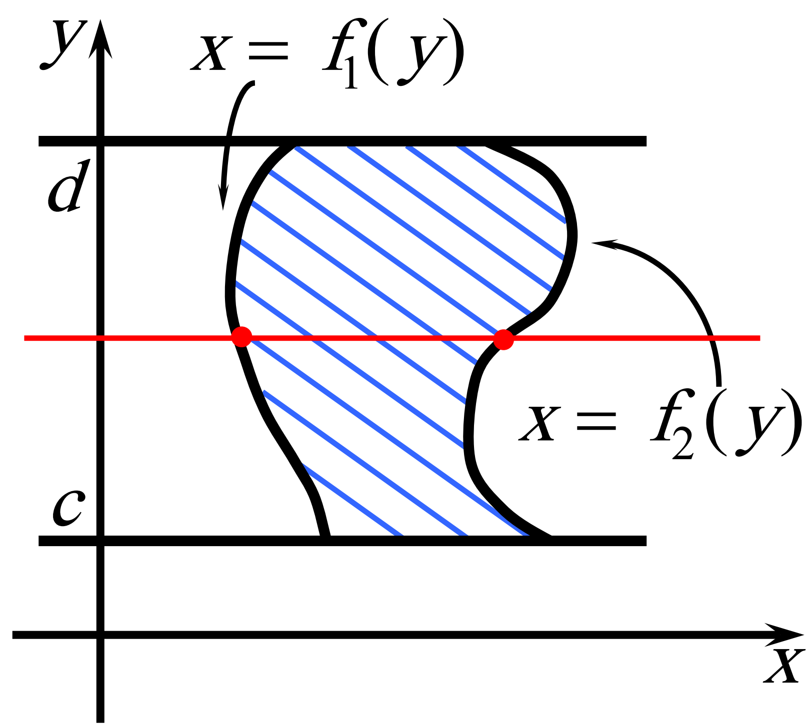
$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dxdy = f(x_0;y_0)\cdot\sigma\,,$$

где σ – *площадь области* (σ).

3. Вычисление двойного интеграла

Назовем область (σ) ***правильной в направлении оси*** Oy (Ox), если любая прямая, проходящая через внутреннюю точку области (σ) параллельно оси Oy (Ox), пересекает границу области в двух точках, причем, каждая из пересекаемых границ задается только одним уравнением.





Теорема 3.

Пусть функция $f(x, y)$ *интегрируема в области* (σ).

1. *Если область* (σ) *– правильная в направлении оси* Oy, *то*

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dxdy = \int\limits_{a}^{b}\left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx,$$

где $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ *– уравнения кривых, ограничивающих область* (σ) *снизу и сверху соответственно,*

$[a; b]$ *– проекция области* (σ) *на ось* Ox.

2. *Если область* (σ) *– правильная в направлении оси* Ox, *то*

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dxdy = \int\limits_{c}^{d}\left(\int\limits_{f_1(y)}^{f_2(y)} f(x,y)dx\right)dy,$$

где $x = f_1(y)$, $x = f_2(y)$ *– уравнения кривых, ограничивающих область* (σ) *слева и справа соответственно,*

$[c; d]$ *– проекция области* (σ) *на ось* Oy.

4. Замена переменных в двойном интеграле

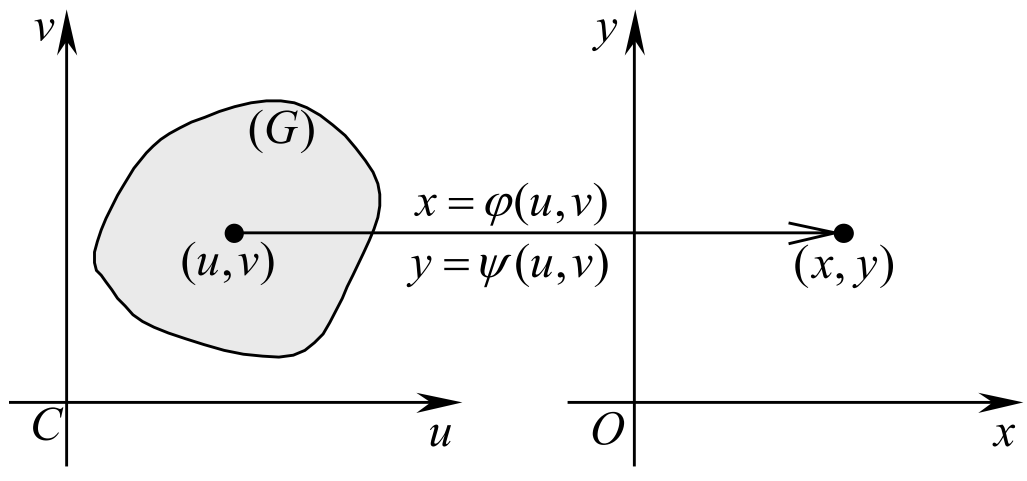
Пусть (σ) – замкнутая квадрируемая область в плоскости xOy, $f(x, y)$ – ограничена и непрерывна в области (σ) всюду, кроме, может быть, некоторого множества точек, площади нуль. Тогда существует интеграл

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\,dxdy.$$

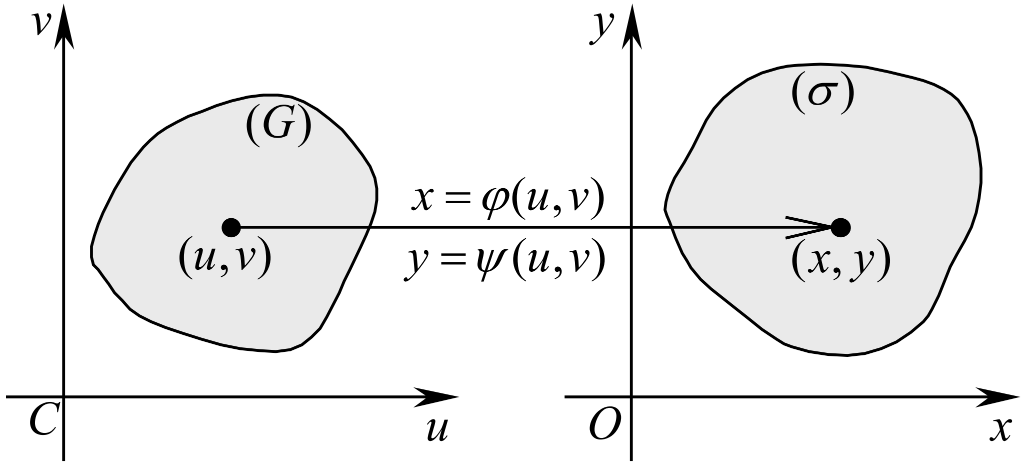
Введем новые переменные по формулам:

$$x = \varphi(u, v),\ \ y = \psi(u, v),\ \ (u, v) \in (G) \qquad (1)$$

Геометрическая интерпретация (1):



Пусть функции $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ такие, что каждая точка $(u, v) \in (G)$ переходит в некоторую точку $(x, y) \in (\sigma)$, и каждой точке $(x, y) \in (\sigma)$ соответствует некоторая точка $(u, v) \in (G)$.



В этом случае говорят: «если точка (u, v) пробегает область (G), то соответствующая ей точка $(x, y) = (\varphi(u, v), \psi(u, v))$ пробегает область (σ)»

Функции $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u,v)$, где $(u,v) \in (G)$, называют ***отображением области (G) на область (σ)***.

Область (σ) называют ***образом*** области (G), область (G) – ***прообразом*** области (σ) при отображении (1).

Пусть отображение (1) удовлетворяет следующим условиям:

а) отображение (1) взаимно однозначно в замкнутой квадрируемой области (G) (т.е. различным точкам области (G) соответствуют различные точки области (σ));

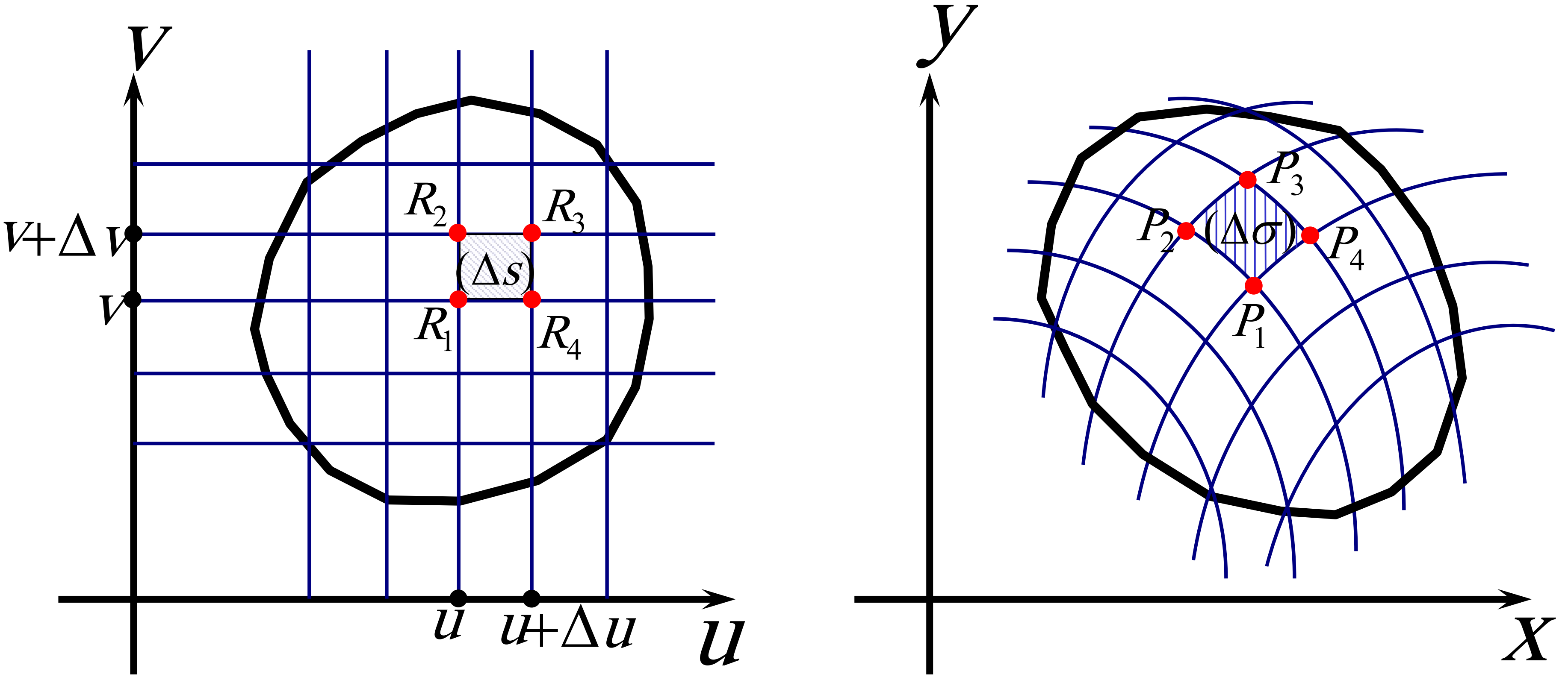
б) функции $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ имеют в области (G) непрерывные частные производные первого порядка;

в) $I(u,v) = \dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v \\ \psi'_u & \psi'_v \end{vmatrix} \neq 0$ во всех точках области (G).

Тогда справедлива формула

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{(G)} f(\varphi(u,v),\psi(u,v)) \cdot \left|I(u,v)\right| dxdy. \qquad (2)$$

Формулу (2) называют ***формулой замены переменных в двойном интеграле***, определитель $I(u, v)$ называют ***якобианом отображения*** (1).



v
$v+\Delta v$
v
R_2
R_3
(Δs)
R_1
R_4
u
$u+\Delta u$
u
y
P_3
P_2
$(\Delta\sigma)$
P_4
P_1
x

Замечание.

Формулы (1) рассматривались как отображение (G) на (σ), но им можно придать и другой геометрический смысл.

В силу однозначности соответствия $(x, y) \to (u, v)$ пару чисел (u, v) можно рассматривать как координаты точки $M(x, y)$ ***в криволинейной системе координат***.

Тогда (1) – связь ***криволинейных*** и ***декартовых*** координат точки.

5. Геометрические и физические приложения двойных интегралов

1. Объем V цилиндрического тела (V) , с основанием (σ)∈ xOy, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$:

$$V = \iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)dxdy\,.$$

2. Площадь σ квадрируемой области (σ)∈ xOy:

$$\sigma = \iint\limits_{(\sigma)} dxdy.$$

3. Площадь S гладкой поверхности (S), заданной уравнением $z = f(x, y)$:

$$S = \iint\limits_{(\sigma)} \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\,dxdy\,.$$

где (σ)∈ xOy – проекция поверхности (S) на плоскость xOy.

Пусть (σ) – материальная бесконечно тонкая пластинка (квадрируемая область (σ)∈ xOy) с плотностью γ(x, y).

4. Массу пластинки (σ) находят по формуле:

$$\iint\limits_{(\sigma)} \gamma(x, y)dxdy = m \ .$$

5. Статические моменты пластинки (σ) относительно осей Ox и Oy находят по формулам:

$$\iint\limits_{(\sigma)} y \cdot \gamma(x, y)dxdy = S_x, \quad \iint\limits_{(\sigma)} x \cdot \gamma(x, y)dxdy = S_y \ .$$

6. Координаты центра тяжести (σ) находят по формулам:

$$x_0 = \frac{S_y}{m}, \quad y_0 = \frac{S_x}{m}.$$

7. Моменты инерции пластинки (σ) относительно осей *Ox* и *Oy* находят по формуле:

$$\iint\limits_{(\sigma)} y^2 \cdot \gamma(x,y)dxdy = I_x, \; \iint\limits_{(\sigma)} x^2 \cdot \gamma(x,y)dxdy = I_y.$$

8. Момент инерции пластинки (σ) относительно начала координат находят по формуле:

$$I_o = I_x + I_y = \iint\limits_{(\sigma)} (y^2 + x^2) \cdot \gamma(x,y)dxdy.$$

§2. Тройной интеграл

1. Задача, приводящая к понятию тройного интеграла

Пусть (V) – замкнутая ограниченная область в $Oxyz$ (тело), $\gamma = \gamma(x, y, z)$ – плотность распределения массы в области (V).

Задача. Найти массу m тела (V).

1. Разобьем (V) на n частей (ΔV_1), (ΔV_2), … , (ΔV_n).

2. Если (ΔV_i) – мала, то (ΔV_i) можно считать однородной и ее масса $m_i \approx \gamma(P_i) \cdot \Delta V_i$,

где ΔV_i – объем (ΔV_i), P_i – произвольная точка из (ΔV_i).

Тогда

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i \approx \sum_{i=1}^{n} \gamma(P_i) \cdot \Delta V_i ,$$

$$m = \lim_{(\Delta V_i) \to P_i} \sum_{i=1}^{n} \gamma(P_i) \cdot \Delta V_i .$$

2. Определение и свойства тройного интеграла

Пусть (V) – кубируемая (т.е. имеющая объем) область в пространстве $Oxyz$, и в области (V) задана функция $u = f(x, y, z)$.

Определение.

1. Разобьем область (V) произвольным образом на n частей, не имеющих общих внутренних точек:

$$(\Delta V_1), (\Delta V_2), \ \dots\ , (\Delta V_n).$$

2. В каждой области (ΔV_i) выберем произвольную точку $P_\text{i}(\xi_\text{i};\eta_\text{i}\zeta_\text{i})$ и вычислим произведение $f(P_\text{i}) \cdot \Delta V_\text{i}$, где ΔV_i – объем области (ΔV_i).

Сумму
$$I_n(\Delta V_i, P_i) = \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot \Delta V_i$$

назовем ***интегральной суммой*** для функции $f(x, y, z)$ по области (V), соответствующей данному разбиению области (V) и данному выбору точек P_i.

Пусть d_i – диаметр (ΔV_i), $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} d_i$.

Число I называется ***предeлом интегральных сумм*** $I_n(\Delta V_i, P_i)$ *при* $\lambda \to 0$, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что для любого разбиения области* (V), *у которого* $\lambda < \delta$, *при любом выборе точек* P_i *выполняется неравенство*

$$| I_n(\Delta V_i, P_i) - I | < \varepsilon.$$

Если существует предел интегральных сумм $I_n(\Delta V_i, P_i)$ *при* $\lambda \to 0$, *то его называют* ***тройным интегралом от функции*** $f(x, y, z)$ ***по области*** (V).

Обозначают:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dV, \quad \iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz.$$

Теорема 1 (необходимое условие существования тройного интеграла).

Если функция $f(x, y, z)$ интегрируема в области (V), то она ограничена в этой области.

Теорема 2 (достаточные условия существования тройного интеграла).

Если выполняются условия:

1) *область* (V) *– кубируемая,*
2) $f(x, y, z)$ *ограничена в области* (V),
3) $f(x,y,z)$ *непрерывна в области* (V) *всюду (за исключением, возможно, некоторого множества точек объема нуль),*

то $f(x, y, z)$ *интегрируема в области* (V).

Свойства тройного интеграла

1. $\iiint\limits_{(V)} dxdydz = V$, где V – объем тела (V).

2. Постоянный множитель можно выносить за знак тройного интеграла, т.е.

$$\iiint\limits_{(V)} c \cdot f(x,y,z)dxdydz = c \cdot \iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz.$$

3. Тройной интеграл от алгебраической суммы двух (конечного числа) функций равен алгебраической сумме тройных интегралов от этих функций, т.е.

$$\iiint\limits_{(V)} [f_1(x,y,z) + f_2(x,y,z)]dV = \iiint\limits_{(V)} f_1(x,y,z)dV + \iiint\limits_{(V)} f_2(x,y,z)dV.$$

4. Если область интегрирования (V) разбита на две части (V_1) и (V_2), не имеющие общих внутренних точек, то

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dV = \iiint\limits_{(V_1)} f(x,y,z)dV + \iiint\limits_{(V_2)} f(x,y,z)dV$$

(свойство аддитивности тройного интеграла).

5. Если всюду в области (V) $f(x,y,z) > 0$ $(f(x,y,z) \geq 0)$, то

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz > 0 \quad \left(\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz \geq 0 \right).$$

6. Если всюду в области (V) $f(x,y,z) \leq \varphi(x,y,z)$, то

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz \leq \iiint\limits_{(V)} \varphi(x,y,z)dxdydz \,.$$

7. Следствие свойств 6, 2 и 1.
Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x, y, z)$ в области (V), то

$$m \cdot V \le \iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,dxdydz \le M \cdot V,$$

где V – объем области (V).

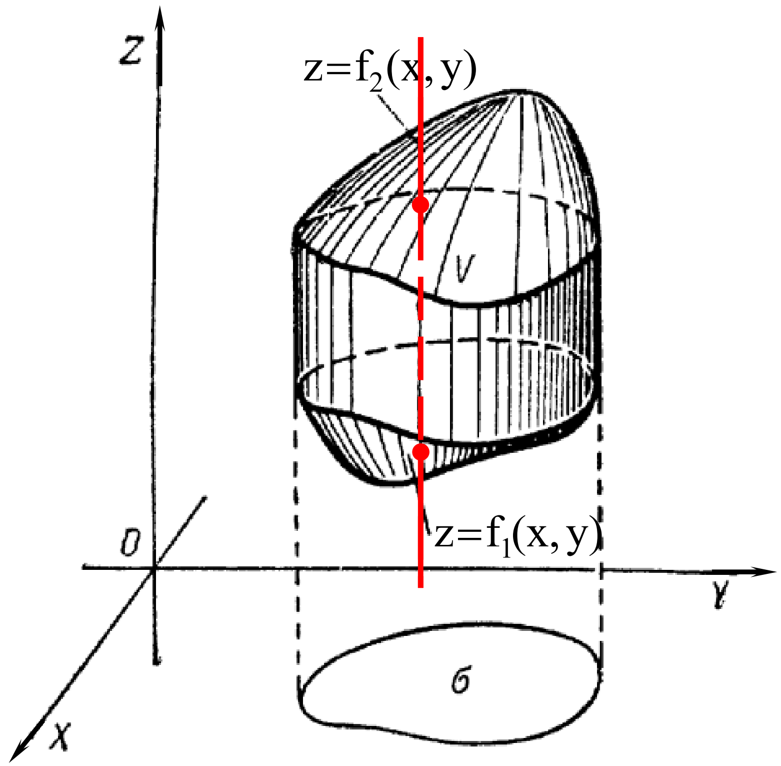
8. Теорема о среднем для тройного интеграла.
Если функция $f(x,y,z)$ непрерывна в замкнутой и ограниченной области (V), то найдется такая точка $P_0(x_0, y_0, z_0) \in (V)$, что справедливо равенство

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,dxdydz = f(x_0, y_0, z_0) \cdot V,$$

где V – объем области (V).

3. Вычисление тройного интеграла

Назовем область (V) ***правильной в направлении оси*** Oz, если любая прямая, проходящая через внутреннюю точку области (V) параллельно оси Oz, пересекает границу области в двух точках, причем, каждая из пересекаемых границ задается только одним уравнением.



Теорема 3. *Пусть функция $f(x, y, z)$ интегрируема в области (V). Если область (V) – правильная в направлении оси Oz, то*

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{(\sigma)} \left(\int\limits_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy,$$

где $z = f_1(x, y)$, $z = f_2(x, y)$ – уравнения нижней и верхней границ области (V) соответственно, (σ) – проекция области (V) на плоскость xOy.

Интеграл $\iint\limits_{(\sigma)} \left(\int\limits_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy$

называют ***повторным*** и записывают в виде $\iint\limits_{(\sigma)} dxdy \int\limits_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)dz$

Интеграл $\int\limits_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)dz$ называют ***внутренним***.

4. Замена переменных в тройном интеграле

Пусть (V) – замкнутая кубируемая область в пространстве $Oxyz$, $f(x, y, z)$ – непрерывна в области (V) всюду, кроме, может быть, некоторого множества точек, объема нуль.

Тогда существует интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz$.

Введем новые переменные по формулам:

$$x = \varphi(u,v,w),\ \ y = \psi(u,v,w),\ z = \chi(u,v,w),\ \ (u,v,w)\in(G) \qquad (3)$$

Геометрическая интерпретация (3): отображение области (G) пространства $Cuvw$ на некоторую область пространства $Oxyz$.

Пусть функции $\varphi(u,v,w)$, $\psi(u,v,w)$, $\chi(u,v,w)$ такие, что (3) является отображением области (G) на область (V) (т.е. если точка (u,v,w) пробегает область (G), то соответствующая ей точка (x,y,z) пробегает область (V)).

Пусть отображение (3) удовлетворяет следующим условиям:

а) отображение (3) взаимно однозначно в замкнутой кубируемой области (G), т.е. различным точкам области (G) соответствуют различные точки области (V);

б) функции $\varphi(u,v,w)$, $\psi(u,v,w)$, $\chi(u,v,w)$ имеют в области (G) непрерывные частные производные первого порядка;

в) $I(u,v,w)=\dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=\begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v & \varphi'_w \\ \psi'_u & \psi'_v & \psi'_w \\ \chi'_u & \chi'_v & \chi'_w \end{vmatrix} \neq 0$ во всех точках (G).

Тогда справедлива формула

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{(G)} f(\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w),\chi(u,v,w))\cdot\left|I(u,v,w)\right| dudvdw \, . \qquad (4)$$

Формулу (4) называют ***формулой замены переменных в тройном интеграле***, определитель $I(u,v,w)$ называют ***якобианом отображения*** (3).

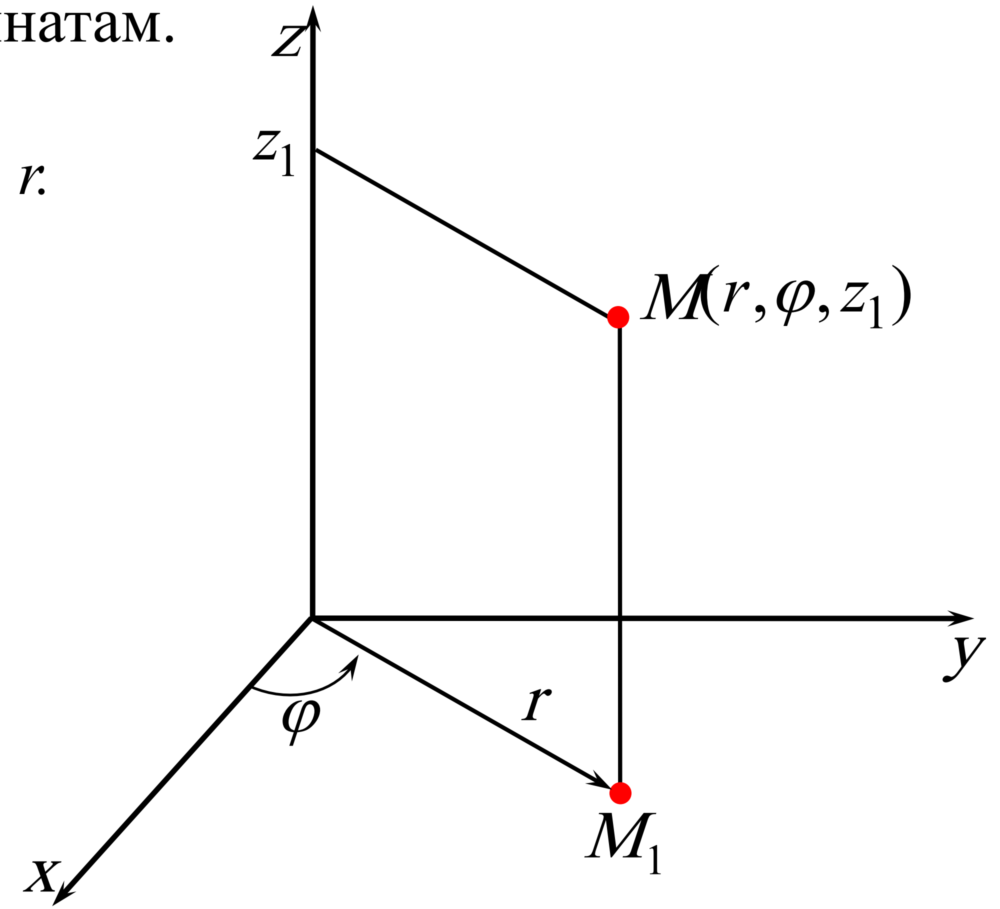
Два наиболее часто встречающихся случая замены переменных в тройном интеграле:

1) $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z_1$,

где $0 \leq r < +\infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ $(-\pi < \varphi \leq \pi)$.

Геометрический смысл: переход в пространстве к цилиндрическим координатам.

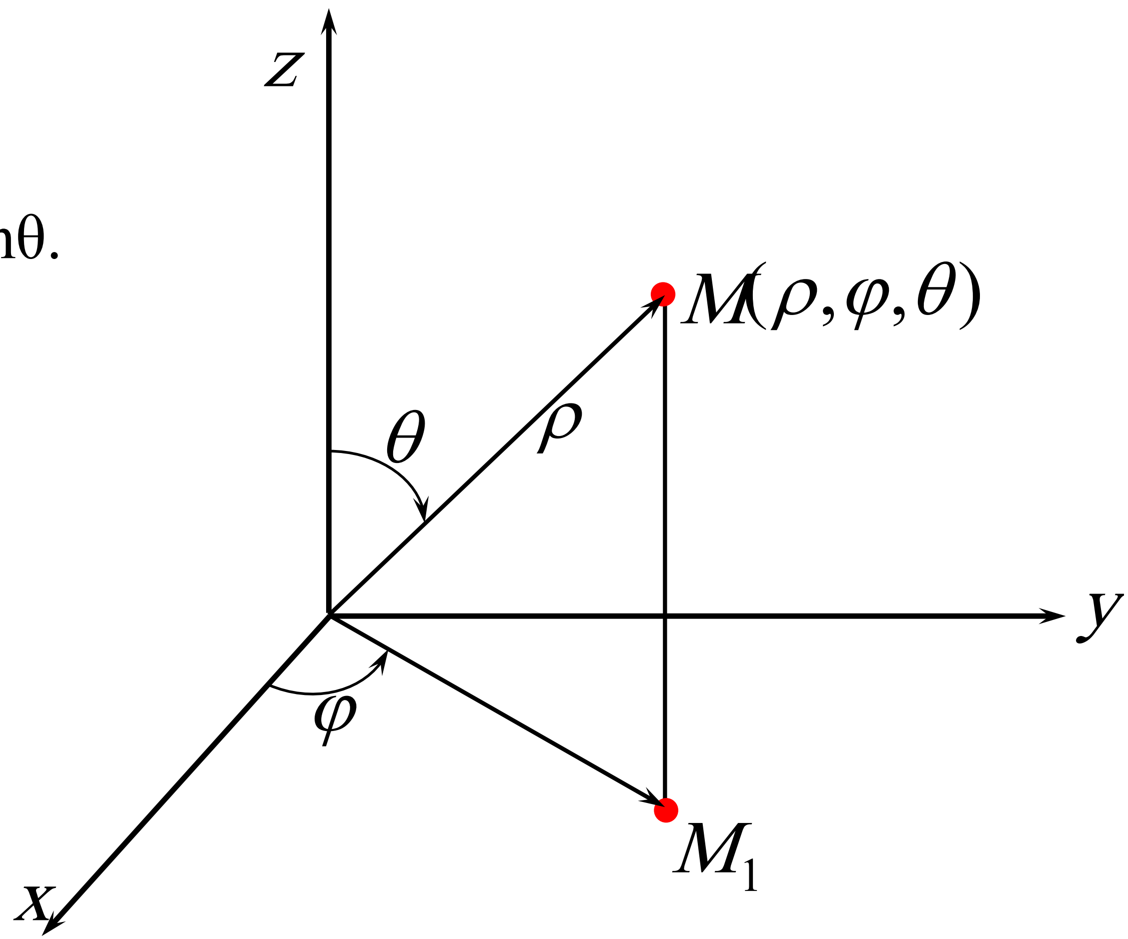
В этом случае $I(r,\varphi,z) = r$.



2) $x = \rho \cdot \cos\varphi \cdot \sin\theta$, $y = \rho \cdot \sin\varphi \cdot \sin\theta$, $z = \rho \cdot \cos\theta$,

где $0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$ $(-\pi < \varphi \le \pi)$, $0 \le \theta \le \pi$.

Геометрический смысл: переход в пространстве к сферическим координатам.



В этом случае

$$I(\rho,\varphi,\theta) = \rho^2 \cdot \sin\theta.$$

5. Геометрические и физические приложения тройных интегралов

1. Объем V кубируемого тела $(V) \in Oxyz$:

$$V = \iiint\limits_{(V)} dxdydz \,.$$

2. Пусть (V) – материальное тело (кубируемая область $(V) \in Oxyz$) с плотностью $\gamma(x, y, z)$.

Тогда масса тела (V) находится по формуле:

$$m = \iiint\limits_{(V)} \gamma(x, y, z)dxdydz \,.$$

3. Статические моменты тела (V) относительно плоскостей xOy, yOz и xOz равны соответственно:

$$S_{xy} = \iiint\limits_{(V)} z \cdot \gamma(x, y, z) dxdydz \ ;$$

$$S_{yz} = \iiint\limits_{(V)} x \cdot \gamma(x, y, z) dxdydz \ ;$$

$$S_{xz} = \iiint\limits_{(V)} y \cdot \gamma(x, y, z) dxdydz \ .$$

4. Координаты центра тяжести тела (V) находятся по формуле:

$$x_0 = \frac{S_{yz}}{m}, \quad y_0 = \frac{S_{xz}}{m}, \quad z_0 = \frac{S_{xy}}{m} \ .$$

5. Моменты инерции тела (V) относительно осей Ox, Oy и Oz равны соответственно:

$$I_x = \iiint\limits_{(V)} (y^2 + z^2) \cdot \gamma(x, y, z) dxdydz \ ;$$

$$I_y = \iiint\limits_{(V)} (x^2 + z^2) \cdot \gamma(x, y, z) dxdydz \ ;$$

$$I_z = \iiint\limits_{(V)} (x^2 + y^2) \cdot \gamma(x, y, z) dxdydz \ .$$

6. Момент инерции тела (V) относительно начала координат находится по формуле:

$$I_o = \iiint\limits_{(V)} (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \gamma(x, y, z) dxdydz \ .$$