Математический анализ

Глава 3. Функции нескольких переменных

Лектор Ефремова О.Н.

2022 г.

§1. Функции нескольких переменных

1. Определение функции нескольких переменных

Определение.

Пусть $X = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in X_i \subseteq \mathbb{R}\}$, $U \subseteq \mathbb{R}$.

Функция $f : X \to U$ *называется* ***функцией n переменных***.

Записывают: $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$,

где f – закон, задающий соответствие между $x_1, x_2, \dots, x_n$ и u.

Называют:

X – **области определения функции** (Обозначают: $D(u)$),

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ – **аргументы** (**независимые переменные**),

U – **область значений** (Обозначают: $E(u)$),

u $(u \in U)$ – **зависимая переменная** (**функция**).

Способы задания ФНП

1) словесный;
2) табличный;
3) аналитический:
   а) явное задание (т.е. формулой $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$);
   б) неявное задание (т.е. уравнением $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = 0$);
4) функцию $z = f(x, y)$ можно задать графически.

Определение. ***Графиком функции*** $z = f(x, y)$ *называется геометрическое место точек пространства с координатами* $(x; y; f(x, y))$, $\forall (x, y) \in D(z)$.

График функции $z = f(x,y)$ будем также называть **«поверхностью $z = f(x, y)$».**

Линией уровня функции $z = f(x, y)$ называют геометрическое место точек (x, y) плоскости, в которых функция принимает одно и то же значение C.

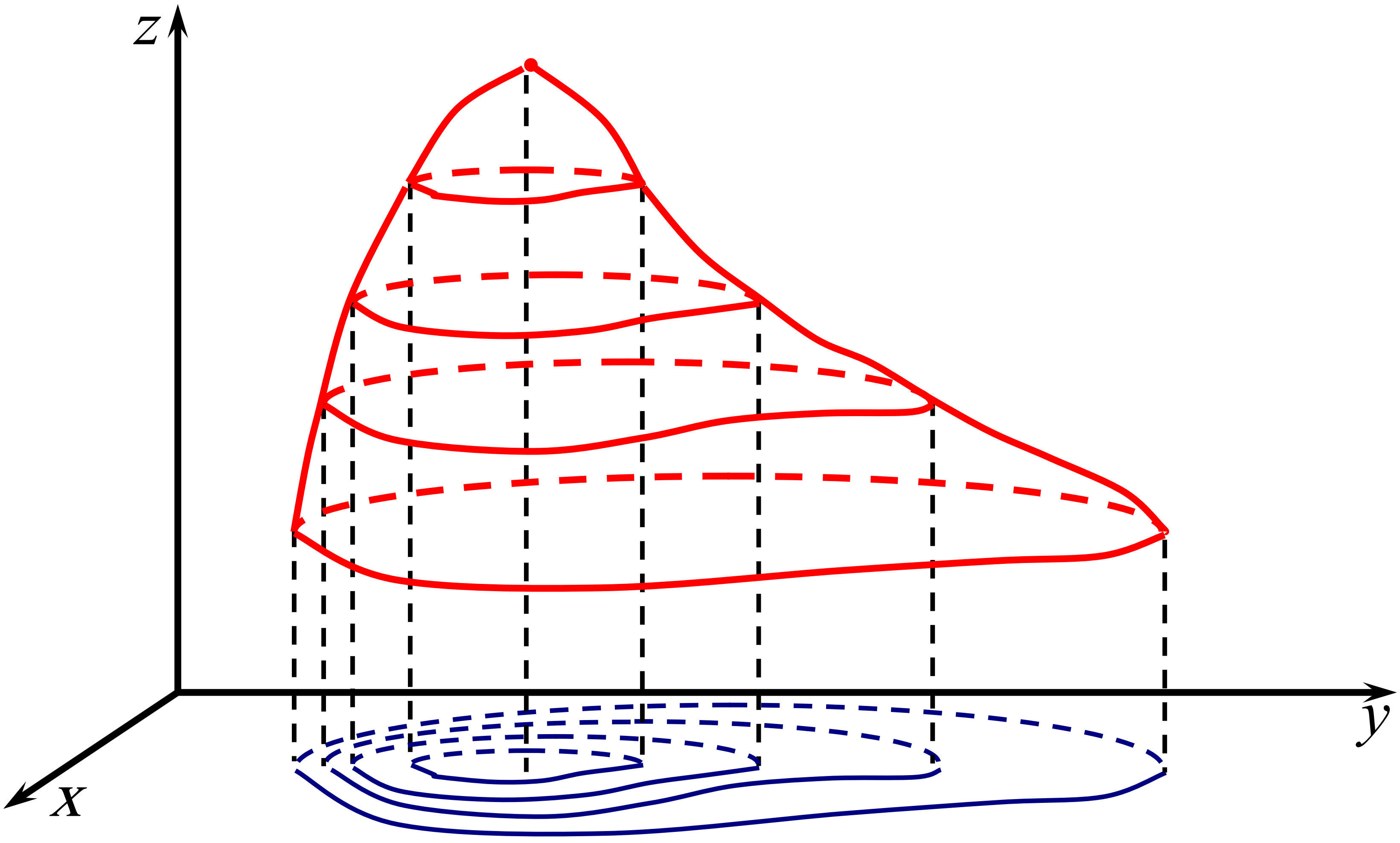
1. Линия уровня – линия в $D(z)$, которая задана уравнением

$$f(x, y) = C.$$

2. Линия уровня – это проекция на плоскость xOy линии пересечения графика функции $z = f(x, y)$ и плоскости $z = C$.

Полагая C равными $C_1, C_1 + h, C_1 + 2h, \ldots, C_1 + nh$, получим линии уровня.

По расположению этих линий можно судить о графике функции а, следовательно, о характере изменения функции.



Где линии «гуще», функция изменяется быстрее, т.е поверхность, изображающая функцию, идет круче.

Поверхностью уровня функции $u = f(x,y,z)$ называют геометрическое место точек пространства $Oxyz$, в которых функция принимает одно и то же значение C.

Уравнение поверхности уровня имеет вид:

$$f(x, y, z) = C.$$

2. Предел функции нескольких переменных

Определение. *Число* $A \in \mathbb{R}$ *называется* ***пределом функции*** $\boldsymbol{f(x)}$ ***при*** $\boldsymbol{x}$ ***стремящемся к*** $\boldsymbol{x_0}$ (пределом функции $f(x)$ в точке x_0), *если* $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \delta > 0$ *такое, что*

$$\textit{если}\ \ x \in \mathrm{U}^*(x_0, \delta),\ \textit{то}\ \ f(x) \in \mathrm{U}(A, \varepsilon).$$

Последовательность $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будем считать декартовыми координатами точки n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$, а функцию $u = f(M)$, где $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, n переменных рассматривать как функцию точки этого пространства.

Если $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2) \in Oxyz$, то расстояние между ними находится по формуле:

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,.$$

Обобщая эти формулы, полагаем, что расстояние между точками n-мерного пространства

$$M_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ M_2(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

находится по формуле:

$$|M_1M_2| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2}\,.$$

Пусть $M_0(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}) \in \mathbb{R}^n$. Множество точек $\mathbb{R}^n$, находящихся от M_0 на расстоянии меньшем ε, будем называть ***ε-окрестностью точки M_0*** и обозначать $U(M_0, \varepsilon)$.

Иначе говоря, ε-окрестность $M_0(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$ состоит из таких точек $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, для которых имеет место неравенство

$$|M_0M| = \sqrt{(x_1 - x_{01})^2 + (x_2 - x_{02})^2 + \ldots + (x_n - x_{0n})^2} < \varepsilon$$

При $n = 1$

$$U(M_0, \varepsilon) = \{M \in Ox \mid |M_0M| = |x - x_0| < \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

При $n = 2$

$$U(M_0, \varepsilon) = \{M \in xOy \mid |M_0M| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon\},$$

т.е. $U(M_0, \varepsilon)$ точки $M_0(x_0, y_0)$ – круг с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$ и радиусом ε .

При $n = 3$

$$U(M_0, \varepsilon) = \{M \in Oxyz \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \varepsilon\},$$

т.е. $U(M_0, \varepsilon)$ точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – шар с центром в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и радиусом ε.

ε-окрестность точки $M_0 \in \mathbb{R}^n$ без самой точки M_0 будем называть ***проколотой*** и обозначать $U^*(M_0, \varepsilon)$.

Пусть функция n переменных $u = f(M)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0 \in \mathbb{R}^n$, кроме, может быть, самой M_0.

Определение.

Число $A \in \mathbb{R}$ *называется* ***пределом функции f(M) при M стремящемся к*** $\boldsymbol{M_0}$ (пределом функции $f(M)$ в точке M_0), *если* $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ *такое, что*

если $M \in U^*(M_0, \delta)$, *то* $f(M) \in U(A, \varepsilon)$.

Записывают:

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = A, \quad f(M) \to A, \text{ где } M \to M_0.$$

Для функции двух переменных $z = f(x,y)$:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A.$$

Замечания.

1. Условие $M \in U^*(M_0, \delta)$ означает, что выполняется неравенство:
$$0 < \sqrt{(x_1 - x_{01})^2 + (x_2 - x_{02})^2 + \ldots + (x_n - x_{0n})^2} < \delta$$

2. Условие $f(M) \in U(A, \varepsilon)$ означает, что для $f(M)$ выполняется неравенство $|\, f(M) - A \,| < \varepsilon$

3. Формально определение предела функции n переменных не отличается от определения предела функции одной переменной. Поэтому все утверждения, которые были получены о пределах функции одной переменной и в которых не используется упорядоченность точек числовой прямой, остаются верными и для предела функции n переменных.

3. Непрерывность функции нескольких переменных

Пусть $u = f(M)$ определена в некоторой окрестности $M_0 \in \mathbb{R}^n$.

Определение 1. *Функция* $f(M)$ *называется* ***непрерывной в точке M_0***, *если справедливо равенство*

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0).$$

Определение 1*. *Функция* $f(M)$ *называется* ***непрерывной в точке M_0***, *если* $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ *такое, что* *если* $|MM_0| < \delta$, *то* $|f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$.

Если функция $u = f(M)$ определена в некоторой окрестности точки M_0 (за исключением, может быть, самой M_0), но не является в этой точке непрерывной, то ее называют ***разрывной в точке M_0***, а саму точку M_0 – ***точкой разрыва***.

Пусть G – некоторое множество точек в $\mathbb{R}^n$ и $M_0 \in G$.

Точка M_0 называется ***внутренней точкой*** множества G, если $\exists\, U(M_0, \varepsilon) \subset G$.

Множество, каждая точка которого является внутренней, называется ***открытым***.

Точка M_0 называется ***граничной точкой*** множества G, если в любой ее ε-окрестности есть как точки из G, так и точки, не принадлежащие G.

Множество всех граничных точек множества G называется его ***границей***.

Множество, содержащее свою границу, называется ***замкнутым***.

Множество G называется ***связным***, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, состоящей из точек этого множества.

Связное открытое множество называется ***областью***.

Связное замкнутое множество называется ***замкнутой областью***.

Область, целиком лежащая в некоторой ε-окрестности точки $O(0,0,\ldots,0)$, называется ***ограниченной***.

Теорема (аналог теорем Вейерштрасса и Коши для ФНП).

Если функция n переменных $u = f(M)$ непрерывна в замкнутой и ограниченной области D, то она

1) *ограничена*;
2) *достигает в D своего наибольшего и наименьшего значения*;
3) *принимает все промежуточные значения между любыми двумя своими значениями*.

§2. Частные производные

Далее все определения и утверждения будем формулировать для функции 2-х (или 3-х) переменных.

Пусть $z = f(x, y)$, $D(z) = D \subseteq xOy$, D – открытая область.

Пусть $\forall\, M_0(x_0, y_0) \in D$.

Придадим значению x_0 приращение Δx, не меняя значение y_0, такое, что точка $M(x_0 + \Delta x, y_0) \in D$.

Тогда функция $z = f(x, y)$ получит приращение

$$\Delta_x z(M_0) = f(M) - f(M_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0).$$

$\Delta_x z(M_0)$ называется ***частным приращением*** функции $z = f(x, y)$ ***по x в точке $M_0(x_0, y_0)$***.

Определение. *Предел при* $\Delta x \to 0$ *отношения*

$$\frac{\Delta_x z(M_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

(если он существует и конечен) *называется* ***частной производной функции*** $z = f(x, y)$ ***по переменной*** x ***в точке*** $M_0(x_0, y_0)$.

Обозначают:

$$\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad z'_x(x_0, y_0), \qquad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad f'_x(x_0, y_0)$$

или

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial x}, \quad z'_x(M_0), \qquad \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}, \quad f'_x(M_0)$$

Замечания.

1. Обозначения $\dfrac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$

надо понимать как символы, а не как частное двух величин. Отдельно взятые выражения $\partial z(x_0, y_0)$ и ∂x смысла не имеют.

2. $z'_x(M_0)$ характеризует скорость изменения функции $z = f(x, y)$ по x в точке $M_0(x_0,y_0)$ (физический смысл частной производной по x).

Аналогично определяется частная производная функции $z = f(x, y)$ по переменной y в точке $M_0(x_0, y_0)$:

$$\lim_{\Delta y\to 0} \frac{\Delta_y z(M_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Обозначают:

$$\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y}, \quad z'_y(M_0), \qquad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, \quad f'_y(M_0)$$

Частную производную функции $z = f(x, y)$ ***по переменной x*** (или ***по переменной y***) обозначают символами:

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad z'_x, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \quad f'_x(x,y), \quad \frac{\partial f(M)}{\partial x}, \quad f'_x(M)$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}, \quad z'_y, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}, \quad f'_y(x,y), \quad \frac{\partial f(M)}{\partial y}, \quad f'_y(M)\right).$$

Операция нахождения для функции $z = f(x, y)$ ее частных производных

$$f'_x(x,y) \text{ и } f'_y(x,y)$$

называется ***дифференцированием функции*** $z = f(x,y)$ ***по переменной x и y*** соответственно.

Вычисление частных производных производится по тем же самым правилам, что и для функции одной переменой.

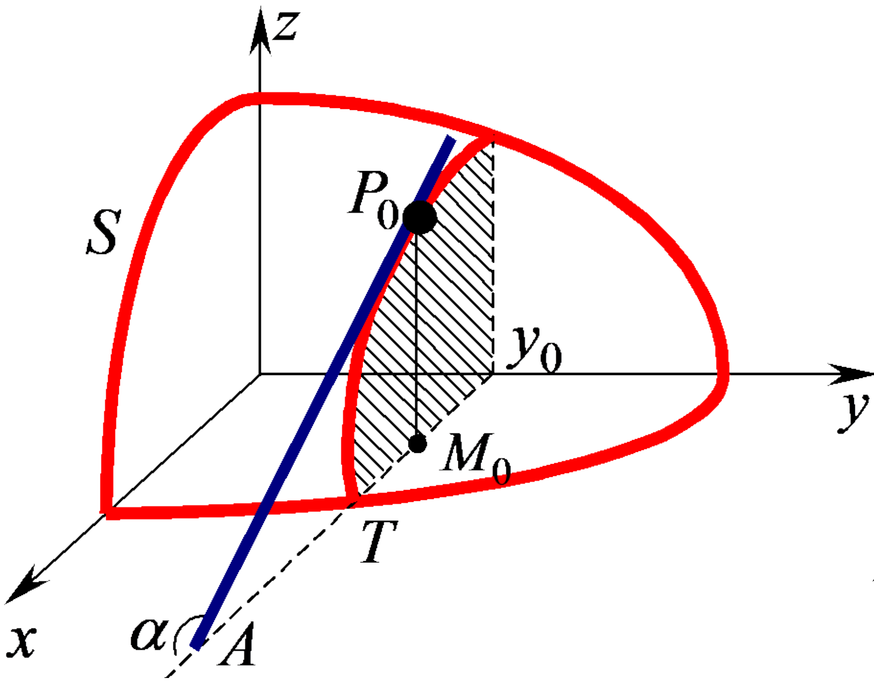
При этом, одна из переменных считается константой.

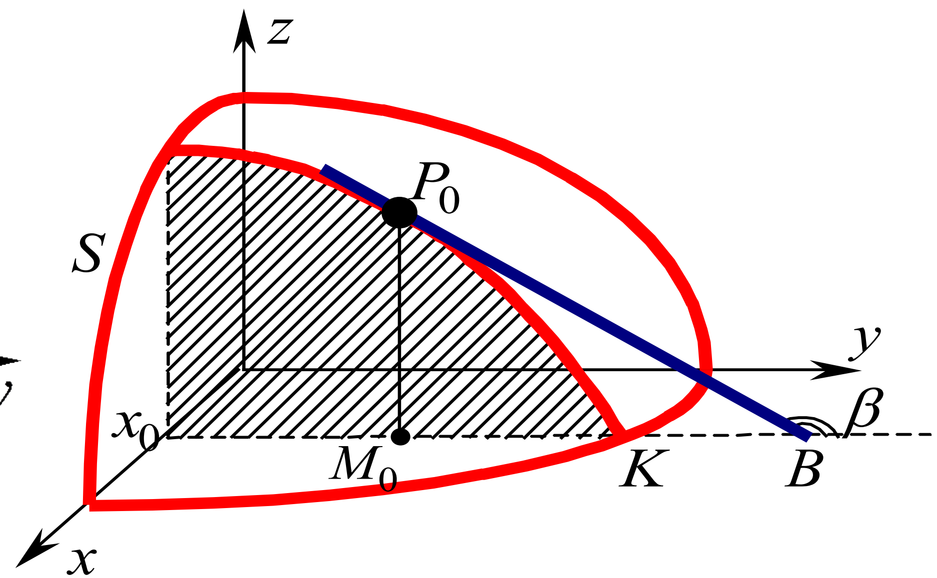
Пример. Найти частные производные по x и по y функции

$$f(x,y) = x^2 + xy^2 + y^3$$

Геометрический смысл частных производных функции двух переменных

Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет в $M_0(x_0, y_0)$ частную производную по x (и по y).
Пусть поверхность S – график функции $z = f(x, y)$.





Тогда $f'_x(M_0) = \operatorname{tg}\alpha$ ($f'_y(M_0) = \operatorname{tg}\beta$),

где α(β) – угол наклона к оси $Ox(Oy)$ касательной, проведенной в точке $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ к линии пересечения поверхности S и плоскости $y = y_0$ ($x = x_0$).

§2. Частные производные высших порядков

Пусть $z = f(x,y)$ имеет $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$, определенные на $D \subseteq xOy$.

Функции $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ называют также ***частными производными первого порядка функции*** $f(x,y)$ (или ***первыми частными производными функции*** $f(x,y)$).

$f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ в общем случае функции переменных x и y.

Частные производные по x и по y от $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$, если они существуют, называются ***частными производными второго порядка*** (или ***вторыми частными производными***) ***функции*** $f(x,y)$.

Обозначения.

1) $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(f'_x(x,y)\right)$: $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\quad \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$, $\quad z''_{xx}$, $\quad f''_{xx}(x,y)$;

2) $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(f'_x(x,y)\right)$: $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\quad \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$, $\quad z''_{xy}$, $\quad f''_{xy}(x,y)$;

3) $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(f'_y(x,y)\right)$: $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, $\quad \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$, $\quad z''_{yx}$, $\quad f''_{yx}(x,y)$;

4) $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(f'_y(x,y)\right)$: $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\quad \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$, $\quad z''_{yy}$, $\quad f''_{yy}(x,y)$.

Частные производные второго порядка в общем случае являются функциями двух переменных.

Их частные производные (если они существуют) называют ***частными производными третьего порядка функции*** $z = f(x, y)$.

Продолжая этот процесс, назовем ***частными производными порядка n функции*** $z = f(x, y)$ частные производные от ее частных производных $(n - 1)$-го порядка.

Обозначения аналогичны обозначениям для частных производных 2-го порядка. Например,

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right), \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right), \quad \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}\right).$$

Частные производные порядка $n > 1$ называют ***частными производными высших порядков***.

Частные производные высших порядков, взятые по разным аргументам, называются ***смешанными***.

Частные производные высших порядков, взятые по одному аргументу, называют иногда ***несмешанными***.

Пример. Найти частные производные 2-го порядка от функции

$$z = x^4 + 3x^2y^5.$$

Теорема 1 (условие независимости смешанной производной от последовательности дифференцирований).

Пусть $z = f(x, y)$ в некоторой области $D \subseteq xOy$ имеет все частные производные до n-го порядка включительно и эти производные непрерывны.

Тогда смешанные производные порядка m $(m \le n)$, отличающиеся лишь последовательностью дифференцирований, совпадают между собой.

§3. Дифференцируемость функций нескольких переменных

Пусть $z = f(x, y)$, $D(z) = D \subseteq xOy$, D – область (т.е. открытое связное множество).

Пусть $\forall\ M_0(x_0, y_0) \in D$.

Придадим x_0 и y_0 приращение Δx и Δy соответственно (так, чтобы точка $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in D$).

При этом $z = f(x,y)$ получит приращение

$$\Delta z(M_0) = f(M) - f(M_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

$\Delta z(M_0)$ называется ***полным приращением функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$***, соответствующим Δx и Δy.

Определение. *Функция* $z = f(x,y)$ *называется* ***дифференцируемой в точке*** $M_0(x_0,\ y_0)$, *если ее полное приращение в этой точке может быть записано в виде*

$$\Delta z(M_0) = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + \alpha_1\cdot\Delta x + \alpha_2\cdot\Delta y\ , \qquad (1)$$

где A, B *– некоторые числа,*

α_1, α_2 *– бесконечно малые при* $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$

(т.е. *при* $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$).

Замечание. Функции α_1 и α_2 зависят от $x_0, y_0, \Delta x, \Delta y$.

Равенство (1) можно записать и в более сжатой форме:

$$\Delta z(M_0) = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + \alpha\cdot\rho, \qquad (2)$$

где $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$,

$\alpha = \dfrac{\alpha_1\cdot\Delta x + \alpha_2\cdot\Delta y}{\rho}$ – бесконечно малая при $\rho \to 0$.

Функция $z = f(x,y)$, дифференцируемая в каждой точке некоторой области D, называется ***дифференцируемой в D***.

Теорема 1 (необходимые условия дифференцируемости ФНП).

Пусть функция $z = f(x, y)$ *дифференцируема в точке* $M_0(x_0, y_0)$. *Тогда она непрерывна в этой точке и имеет в ней частные производные по обеим независимым переменным. Причем*

$$f'_x(x_0, y_0) = A, \quad f'_y(x_0, y_0) = B.$$

Доказательство

Замечание.

Утверждение, обратное **теореме 1**, неверно. Из непрерывности функции двух переменных в точке и существования в этой точке ее частных производных еще не следует дифференцируемость функции.

Например, функция $z = x + y + \sqrt{|x| \cdot |y|}$ непрерывна в точке (0;0) и имеет в этой точке частные производные, но не является в этой точке дифференцируемой.

Теорема 2 (достаточные условия дифференцируемости ФНП).

Пусть функция $z = f(x,y)$ *имеет в нек* $f'_x(x, y)$ *и* $f'_y(x, y)$, *ости точки* $M_0(x_0, y_0)$ *частные производные*

причем в самой точке M_0 *эти производные непрерывны.*

Тогда функция $z = f(x, y)$ *дифференцируема в этой точке.*

Дифференциал ФНП

Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$. Тогда

$$\Delta z(M_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot \Delta y + \alpha_1 \cdot \Delta x + \alpha_2 \cdot \Delta y$$

где α_1, α_2 – бесконечно малые при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Определение. *Если $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, то линейная относительно Δx и Δy часть ее полного приращения в этой точке, т.е.*

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot \Delta y$$

называется ***полным дифференциалом функции $z = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$*** *и обозначается $dz(M_0)$ или $df(x_0, y_0)$.*

Геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных

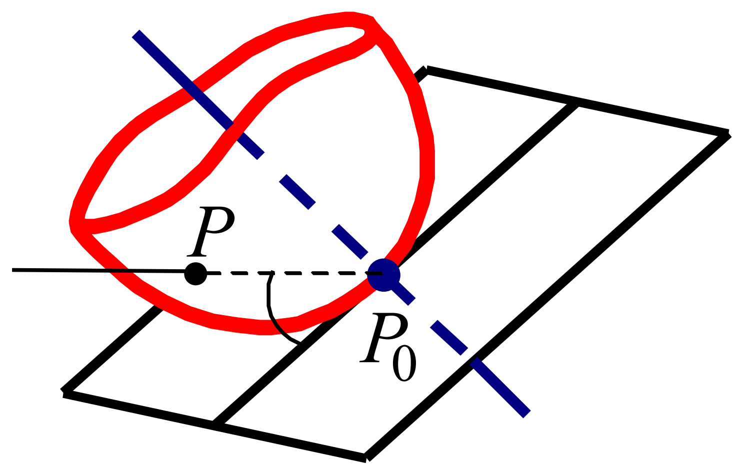
Пусть S – поверхность,

P_0 – фиксированная точка на поверхности S,

P – текущая точка на поверхности S.

Проведем секущую прямую PP_0.

Плоскость, проходящая через точку P_0, называется ***касательной плоскостью к поверхности S в точке P_0***, если угол между секущей PP_0 и этой плоскостью стремится к нулю когда точка P стремится к P_0, двигаясь по поверхности S произвольным образом.



Прямая, проходящая через точку P_0 перпендикулярно касательной плоскости к поверхности в этой точке, называется ***нормалью к поверхности в точке*** P_0.

Доказано, что

1) если функция $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, то поверхность $z = f(x, y)$ имеет в точке $P_0(x_0,y_0, f(x_0,y_0))$ касательную плоскость.
Ее уравнение имеет вид:

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$\Rightarrow$ уравнение нормали к поверхности $z = f(x,y)$ в $P_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - f(x_0, y_0)}{-1}$$

2) если поверхность задана уравнением $F(x,y,z) = 0$,

$F(x, y, z)$ – дифференцируема в $P_0(x_0, y_0, z_0)$, причем хотя бы одна из ее частных производных не обращается в P_0 в ноль,

то касательная плоскость к поверхности в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$ существует и ее уравнение

$$F'_x(P_0)(x - x_0) + F'_y(P_0)(y - y_0) + F'_z(P_0)(z - z_0) = 0$$

$\Rightarrow$ уравнения нормали к поверхности $F(x,y,z) = 0$ в $P_0(x_0,y_0,z_0)$:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(P_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(P_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(P_0)}$$

Замечание.

Точка $P_0(x_0,y_0,z_0)$ поверхности $F(x,y,z) = 0$, в которой все частные производные функции $F(x,y,z)$ обращаются в ноль, называется ***особой точкой поверхности***.

Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$.

$\Rightarrow$ поверхность $z = f(x,y)$ имеет в точке $P_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ касательную плоскость. Ее уравнение:

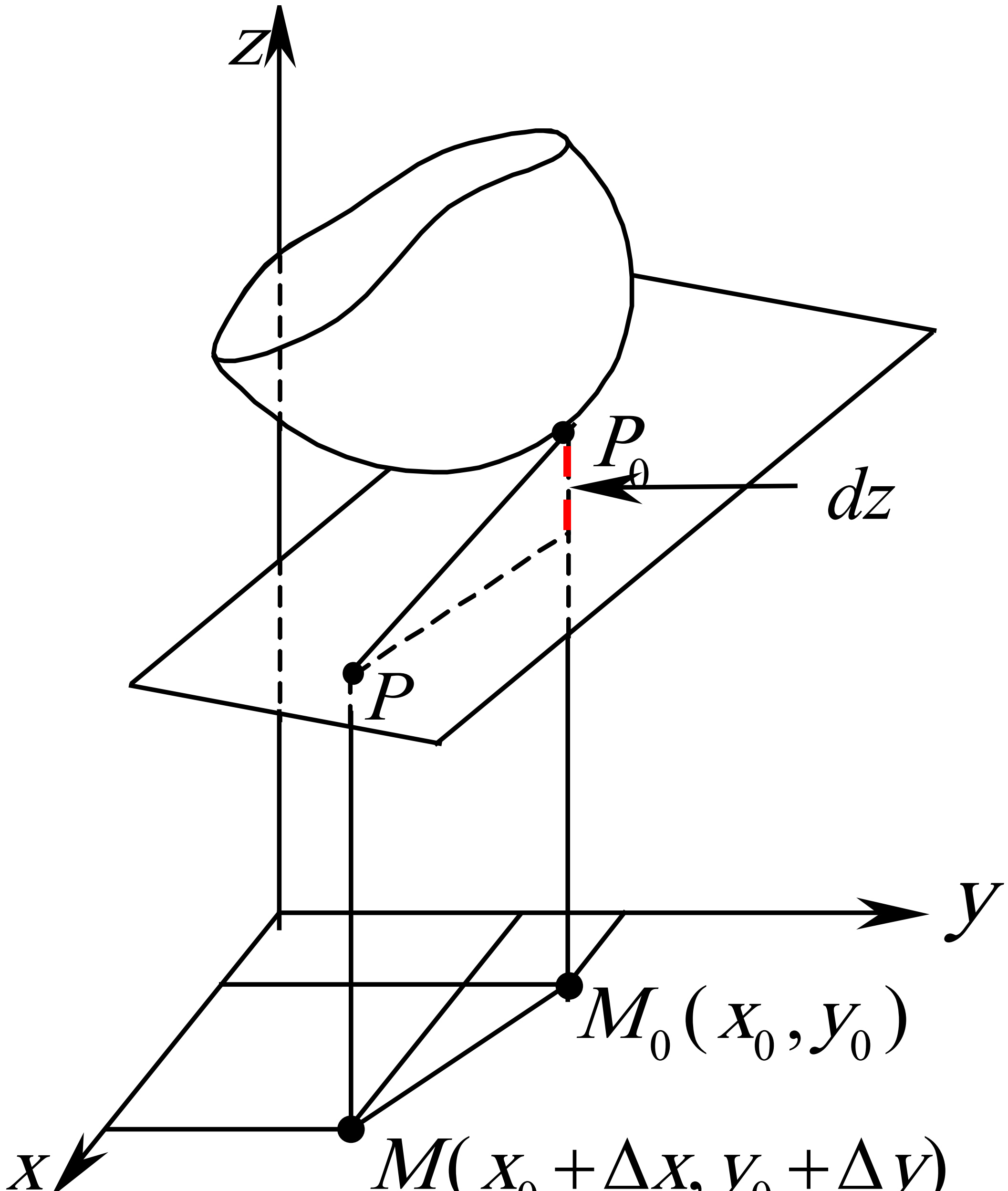
$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Обозначим $x - x_0 = \Delta x$, $y - y_0 = \Delta y$.

Тогда уравнение касательной плоскости примет вид:

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$$

Таким образом, полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ равен приращению, которое получает аппликата точки $P_0(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ касательной плоскости к поверхности $z = f(x,y)$, когда ее координаты x_0 и y_0 получают приращения Δx и Δy соответственно.



z
P_0
dz
P
y
$M_0(x_0, y_0)$
x
$M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$

Очевидно, что соответствие $(x_0, y_0, \Delta x, \Delta y) \to df(x_0, y_0)$ является функцией (четырех переменных).

Ее называют ***полным дифференциалом функции*** $z = f(x, y)$ и обозначают dz или $df(x, y)$.

Полный дифференциал функции n переменных обладает теми же свойствами, что и дифференциал функции одной переменной.

В частности, для $df(x, y)$ существует вторая, ***инвариантная форма записи***:

$$dz = f'_x(x, y) \cdot dx + f'_y(x, y) \cdot dy. \qquad (5)$$

Дифференциалы высших порядков ФНП

Пусть $z = f(x, y)$ дифференцируема в области $D_1 \subseteq \mathrm{D}(f)$.
Ее дифференциал $dz(M)$ – функция переменных x, y, dx, dy.
Функцию $dz(M)$ называют ***дифференциалом 1-го порядка***.

Зафиксируем значение dx и dy.
Тогда $dz(M)$ станет функцией двух переменных x и y.

Дифференциал функции $dz(M)$, если он существует, называется ***дифференциалом 2-го порядка функции $z = f(x, y)$*** (или ***вторым дифференциалом функции $z = f(x, y)$***) и обозначают d^2z, $d^2f(x, y)$.

Пусть $d^2z(M)$ – функция двух переменных x и y.
Дифференциал функции $d^2z(M)$, если он существует, называют ***дифференциалом третьего порядка функции $z = f(x,y)$*** и обозначают d^3z, $d^3f(x, y)$.

Продолжая далее этот процесс, определим ***дифференциал n-го порядка функции $z = f(x, y)$*** как дифференциал от ее дифференциала порядка $(n - 1)$. **Обозначают:** $d^n z$, $d^n f(x, y)$.

Замечание. Значение дифференциала n-го порядка функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) обозначают $d^n z(M_0)$, $d^n f(x_0, y_0)$.

Дифференциалы порядка $n > 1$ называют ***дифференциалами высших порядков***.

Если функция $z = f(x, y)$ имеет дифференциал порядка n, то ее называют ***n раз дифференцируемой функцией***.

Теорема 3 (о связи дифференциала *n*-го порядка и *n*-х частных производных).

Если все производные k-го порядка функции $z = f(x, y)$ в области D непрерывны, то она k раз дифференцируема. При этом имеет место ***<u>символическая</u> <u>формула</u>***

$$d^k z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^k f(x, y). \qquad (6)$$

Замечание.

1. Чтобы записать дифференциал по формуле (6) необходимо:
   а) формально раскрыть скобку по биномиальному закону,
   б) умножить получившееся выражение на $f(x, y)$,
   в) заменить каждое произведение

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^m \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-m} \cdot f(x,y)$$

частной производной $\dfrac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^m \partial y^{n-m}}$.

Например, для $n = 2$ получим:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(dy)^2$$

Для $n = 3$ получим:

$$d^3 z = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(dx)^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(dx)^2 dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}dx(dy)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(dy)^3$$

2. Символическая формула для нахождения дифференциала $d^k u$ функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будет иметь вид

$$d^k u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

при условии, что $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – независимые аргументы.

§3. Частные производные сложных ФНП. Дифференциалы сложных ФНП

1. Частные производные сложной функции

Пусть $z = f(x, y)$, где $x = \varphi_1(u, v)$, $y = \varphi_2(u, v)$.
Тогда z – ***сложная функция*** независимых переменных u и v.
Переменные x и y называются для z ***промежуточными переменными***.

Задача. Найти частные производные функции z по u и v.

Теорема 1 (о производной сложной функции).
Пусть $z = f(x, y)$, где $x = \varphi_1(u, v)$, $y = \varphi_2(u, v)$.
Если $f(x, y)$, $\varphi_1(u, v)$, $\varphi_2(u, v)$ дифференцируемы, то справедливы формулы

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}. \qquad (1)$$

Теорема 1 естественным образом обобщается на случай функции большего числа независимых и промежуточных аргументов. А именно, если

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \text{где } x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \ldots, t_m) \ \ (i = 1, 2, \ldots, n),$$

то

$$\frac{\partial u}{\partial t_k} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_k} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_k} \qquad (\forall k = \overline{1, m})$$

Частные случаи сложной ФНП

1. Пусть $z = f(x, y)$, где $x = \varphi_1(t)$, $y = \varphi_2(t)$.
   Тогда z – сложная функцией одной переменной t.
   Если $f(x, y)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ дифференцируемы, то справедлива формула

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \qquad (2)$$

2. Пусть $z = f(x,y)$, где $y = \varphi(x)$
   Тогда z – сложная функцией одной переменной x.
   Если $f(x, y)$, $\varphi(x)$ дифференцируемы, то справедлива формула

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} \qquad (3)$$

Производная $\frac{dz}{dx}$ в левой части формулы (3) называется ***полной производной функции z***.

§4. Дифференцирование неявно заданных функций

Теорема 1 (существования неявной функции).

Пусть функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)$ *и все ее частные производные 1-го порядка определены и непрерывны в некоторой окрестности точки* $P_0(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}, u_0)$.

Если $F(P_0) = 0$ *и* $F'_u(P_0) \neq 0$,

то $\exists$ *такая окрестность* U *точки* $M_0(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$, *в которой уравнение*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = 0$$

определяет непрерывную функцию $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *причем*

1) $f(M_0) = u_0$;

2) *для любой точки* $M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U$

$$F'_u(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \neq 0;$$

3) *функция* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *имеет в окрестности* U *непрерывные частные производные по всем аргументам.*

Задача. Найти частные производные неявно заданной функции.

1. Пусть $F(x, y)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 в некоторой окрестности $P_0(x_0, y_0)$.
   Тогда уравнение $F(x, y) = 0$ определяет в некоторой окрестности U точки x_0, непрерывную функцию $y = f(x)$.
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} \tag{1}$$
2. Пусть $F(x,y,z)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 в окрестности $P_0(x_0, y_0, z_0)$.
   Тогда уравнение $F(x, y, z) = 0$ определяет в некоторой окрестности U точки $M_0(x_0, y_0)$ непрерывную функцию $z = f(x, y)$.
   Фактически $\frac{\partial z}{\partial x}$ - это обыкновенная производная функции $z = f(x, y)$, рассматриваемой как функция одной переменной при постоянном значении другой, то по формуле (1) получаем
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

§5. Формула Тейлора для ФНП

Если $y = f(x)$ n раз дифференцируема в окрестности точки x_0 , то справедлива формула (3):

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \beta_n (x - x_0)^n,$$

где $\beta_n(x_0, x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$.

Формулу (3) называют ***формулой Тейлора разложения функции $f(x)$ по степеням $(x - x_0)$*** (***в окрестности точки x_0***).

Сумму

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

называют ***многочленом Тейлора функции $f(x)$ по степеням $(x - x_0)$***.

Слагаемое $R_n = \beta_n \cdot (x - x_0)^n$ ***называют остаточным членом формулы Тейлора***.

Остаточный член R_n можно записать в нескольких формах:

1) $R_n = \beta_n \cdot (x - x_0)^n = o((x - x_0)^n)$ – ***форма Пеано***;

2) если $y = f(x)$ $(n + 1)$ раз дифференцируема в окрестности точки x_0, то R_n можно записать в ***форме Лагранжа***:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

где c – точка между x_0 и x.

Если c – точка между x_0 и x, то $\exists$ значение $\theta \in (0; 1)$ такое, что

$$c = x_0 + \theta \cdot \Delta x, \text{ где } \Delta x = x - x_0.$$

$\Rightarrow$ Остаточный член в форме Лагранжа примет вид:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta \cdot \Delta x)}{(n+1)!} \cdot \Delta x^{n+1}.$$

Если в формуле Тейлора $x_0 = 0$, то она примет вид (4):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Формулу (4) называют ***формулой Маклорена***.

Заметим, что

$$f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)^n = f^{(n)}(x_0)\cdot(\Delta x)^n = d^n f(x_0).$$

Следовательно, формулу (3) можно записать в виде (5):

$$f(x) = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{1!} + \frac{d^2 f(x_0)}{2!} + \ldots + \frac{d^n f(x_0)}{n!} + \frac{d^{n+1} f(x_0 + \theta\cdot\Delta x)}{(n+1)!}.$$

Формулу (5) можно обобщить на случай ФНП.

Пусть $z = f(x, y)$ $(n + 1)$ раз дифференцируема в некоторой окрестности U точки $M_0(x_0, y_0)$.

Тогда, как и в случае функции $y = f(x)$, справедлива формула

$$f(M) = f(M_0) + \frac{df(M_0)}{1!} + \frac{d^2 f(M_0)}{2!} + \ldots + \frac{d^n f(M_0)}{n!} + R_n, \quad (5)$$

где $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in U$,

$$R_n = \frac{d^{n+1} f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)}{(n+1)!} \quad (0 < \theta < 1)$$

(или $R_n = o(\rho^n)$ при $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0.$).

Формулу (5) называют **формулой Тейлора для функции $z = f(x, y)$ в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ (по степеням $(x - x_0)$, $(y - y_0)$)**.

Сумму

$$f(M_0)+\frac{df(M_0)}{1!}+\frac{d^2 f(M_0)}{2!}+\ldots+\frac{d^n f(M_0)}{n!}$$

называют ***многочленом Тейлора функции*** $f(x,\ y)$ ***в окрестности точки*** $\boldsymbol{M_0(x_0,\ y_0)}$.

Слагаемое R_n называют ***остаточным членом формулы Тейлора функции*** $f(x,\ y)$ ***в окрестности точки*** $\boldsymbol{M_0(x_0,\ y_0)}$ в форме Лагранжа (Пеано).

Аналогичный вид имеет формула Тейлора для функций большего числа переменных

§6. Понятие квадратичной формы

Определение. *Многочлен n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$* в *котором все члены имеют одинаковую степень, называется* ***однородным*** *или* ***формой***.

Примеры.

1) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 4x_2 - 5x_3$
– однородный 1-й степени (линейная форма);

2) $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_1x_2 + 3x_2^2$
– однородный 2-й степени (***квадратичная форма***);

3) $f(x_1, x_2) = x_1^3 - x_1^2x_2 + x_1x_2^2 - 4x_2^3$
– однородный 3-й степени.

Общий вид квадратичной формы

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 +$$
$$+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n +$$
$$+ 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + \ldots + 2a_{2n}x_2x_n +$$
$$+ \ldots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n.$$

Будем считать, что $a_{ij} = a_{ji}$.

Тогда квадратичную форму можно записать в виде

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

Определение. *Квадратичная форма* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *называется* ***положительно*** (***отрицательно***) ***определенной***, *если*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0 \quad [f(x_1, x_2, \ldots, x_n) < 0]$$

для любых, не равных одновременно нулю, значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Положительно и отрицательно определенные квадратичные формы называются ***знакоопределенными***.

Если квадратичная форма может принимать как положительные, так и отрицательные значения, то она называется ***неопределенной***.

Симметрическая матрица из коэффициентов квадратичной формы, т.е. матрица вида

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется ***матрицей квадратичной формы***.

Главными угловыми минорами квадратной матрицы $\mathbf{C} = (c_{ij})$ называются ее миноры вида

$$c_{11}, \qquad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{vmatrix} \quad \text{и т.д.}$$

Теорема 1 (критерий Сильвестра).

1. *Квадратичная форма положительно определена* $\Leftrightarrow$ *все главные угловые миноры ее матрицы – положительные*.
2. *Квадратичная форма отрицательно определена* $\Leftrightarrow$ *знаки главных угловых миноров ее матрицы чередуются, начиная с минуса*, т.е.

$$a_{11} < 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} < 0 \quad \text{и т.д.}$$

§7. Экстремумы ФНП

Пусть $z = f(x, y)$ определена в некоторой области $D \subseteq xOy$, $M_0(x_0, y_0) \in D$.

Определение 1.

Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется ***точкой максимума*** функции $f(x, y)$, если $\forall\ M(x, y) \in \mathrm{U}(M_0, \delta)$ выполняется неравенство

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$

Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется ***точкой минимума*** функции $f(x, y)$, если $\forall\ M(x, y) \in \mathrm{U}(M_0, \delta)$ выполняется неравенство

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0).$$

Точки максимума и минимума функции называются ее ***точками экстремума***.

Значения функции в точках максимума и минимума называются соответственно ***максимумами*** и ***минимумами*** (***экстремумами***) этой функции.

Замечания.

1. По смыслу точкой максимума (минимума) функции $f(x,y)$ могут быть только внутренние точки области D.
2. Если $\forall\, M(x, y) \in U^*(M_0, \delta)$ выполняется неравенство
$$f(x,y) < f(x_0, y_0) \quad [\, f(x, y) > f(x_0, y_0)\,],$$
то точку M_0 называют ***точкой строгого максимума*** (соответственно ***точкой строгого минимума***) функции $f(x, y)$.
Определенные в 1 точки максимума и минимума называют иногда точками ***нестрогого максимума*** и ***минимума***.
3. Понятия экстремумов носят локальный характер. В рассматриваемой области функция может совсем не иметь экстремумов, может иметь несколько (в том числе бесчисленно много) минимумов и максимумов. При этом некоторые минимумы могут оказаться больше некоторых ее максимумов.

Теорема 1 (необходимые условия экстремума).

Если функция $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет экстремум, то в этой точке либо обе ее частные производные первого порядка равны нулю, либо хотя бы одна из них не существует.

Геометрический смысл теоремы 1

Если $M_0(x_0, y_0)$ – точка экстремума функции $z = f(x, y)$, то касательная плоскость к графику этой функции в точке $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ либо параллельна плоскости xOy, либо не существует.

Доказательство.

Точки, в которых обе частные производные первого порядка функции $z = f(x, y)$ равны нулю, называются ***стационарными точками*** функции $z = f(x, y)$.

Точки, в которых обе частные производные первого порядка функции $z = f(x, y)$ равны нулю, либо хотя бы одна их них не существует, называются ***критическими точками*** функции $z = f(x, y)$.

Теорема 2 (достаточные условия экстремума функции n переменных).

Пусть M_0 *–* <u>*стационарная*</u> *точка функции* $z = f(M)$ *и в некоторой окрестности точки* M_0 *функция* $f(M)$ *имеет непрерывные частные производные 2-го порядка.*

Тогда

1) $f(M)$ *имеет в точке* M_0 *максимум, если квадратичная форма* $d^2f(M_0)$ *отрицательно определена*;
2) $f(M)$ *имеет в точке* M_0 *минимум, если квадратичная форма* $d^2f(M_0)$ *положительно определена*;
3) *если квадратичная форма* $d^2f(M_0)$ *является неопределенной, то* M_0 *не является точкой экстремума*;
4) *если* $d^2f(M_0) \geq 0$ *или* $d^2f(M_0) \leq 0$ (т.е. среди главных угловых миноров имеются нулевые), *то никакого заключения о критической точке* M_0 *сделать нельзя и требуются дополнительные исследования.*

Доказательство (см. следующий слайд)

Пусть $z = f(x, y)$, $D(z) = D \subseteq xOy$,

$M_0(x_0, y_0) \in D$.

Пусть $z = f(x, y)$ дважды дифференцируема в окрестности U точки M_0, точка M_0 – критическая точка для $z = f(x, y)$. Тогда

1) $\forall\ M \in U$

$$f(M) = f(M_0) + \frac{df(M_0)}{1!} + \frac{d^2 f(M_0)}{2!} + R_2,$$

где $R_2 = o(\rho^2)$ при $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$;

2) $f'_x(M_0) = 0, \quad f'_y(M_0) = 0$

$$\Rightarrow \quad df(M_0) = 0 \quad \text{и} \quad f(M) = f(M_0) + \frac{d^2 f(M_0)}{2!} + R_2,$$

$$\Rightarrow \quad \Delta f(M_0) \approx \frac{d^2 f(M_0)}{2!},$$

Получили, что знак $\Delta f(M_0)$ и $d^2 f(M_0)$ совпадает.

Следовательно, теорема доказана.

Если $z = f(x, y)$, то $d^2f(M_0)$ – квадратичная форма с матрицей

$$\begin{pmatrix} f''_{xx}(M_0) & f''_{xy}(M_0) \\ f''_{xy}(M_0) & f''_{yy}(M_0) \end{pmatrix}$$

Тогда

1) квадратичная форма $d^2f(M_0)$ отрицательно определена, если

$$f''_{xx}(M_0) < 0, \qquad \begin{vmatrix} f''_{xx}(M_0) & f''_{xy}(M_0) \\ f''_{xy}(M_0) & f''_{yy}(M_0) \end{vmatrix} > 0;$$

2) квадратичная форма $d^2f(M_0)$ положительно определена, если

$$f''_{xx}(M_0) > 0, \qquad \begin{vmatrix} f''_{xx}(M_0) & f''_{xy}(M_0) \\ f''_{xy}(M_0) & f''_{yy}(M_0) \end{vmatrix} > 0.$$

Теорема 3 (достаточные условия экстремума функции двух переменных).

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ – *критическая точка функции* $z = f(x, y)$ *и в некоторой окрестности точки* M_0 *функция имеет непрерывные частные производные до 2-го порядка включительно.*

Обозначим

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), \quad B = f''_{xy}(x_0, y_0), \quad C = f''_{yy}(x_0, y_0).$$

Тогда

1) *если* $A \cdot C - B^2 < 0$, *то точка* $M_0(x_0, y_0)$ *не является точкой экстремума;*
2) *если* $A \cdot C - B^2 > 0$ *и* $A > 0$, *то в точке* $M_0(x_0, y_0)$ *функция имеет минимум;*
3) *если* $A \cdot C - B^2 > 0$ *и* $A < 0$, *то в точке* $M_0(x_0, y_0)$ *функция имеет максимум;*
4) *если* $A \cdot C - B^2 = 0$, *то никакого заключения о критической точке* $M_0(x_0, y_0)$ *сделать нельзя и требуются дополнительные исследования.*

Замечание.

Если с помощью теоремы 3 исследовать критическую точку $M_0(x_0, y_0)$ не удалось, то наличие в M_0 экстремума определяем по знаку $\Delta f(x_0, y_0)$:

а) если при всех достаточно малых Δx и Δy имеем
$$\Delta f(x_0, y_0) < 0,$$
то $M_0(x_0, y_0)$ – точка строгого максимума;

б) если при всех достаточно малых Δx и Δy имеем
$$\Delta f(x_0, y_0) > 0,$$
то $M_0(x_0, y_0)$ – точка строгого минимума.

§7. Скалярное поле

Определение. *Пусть* G *– некоторая область в пространстве* $Oxyz$ [*на плоскости* xOy]. *Говорят, что на* G *задано* ***скалярное поле****, если в каждой точке* $M \in G$ *определена функция 3-х переменных* $u = f(M)$ [*функция 2-х переменных* $z = f(M)$].

Поведение скалярного поля характеризуют

1) **производная по направлению**;

2) **градиент**.

1. Производная по направлению

Пусть $z = f(x, y)$ определена в области $D \subseteq xOy$,

$M_0(x_0, y_0) \in D$,

$\bar{\mathbf{s}}$ – некоторый вектор.

Пусть $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \in D$, такая, что $\overline{\mathbf{M_0M}} \upuparrows \bar{\mathbf{s}}$.

Определение. *Если существует и конечен*

$$\lim_{|M_0M| \to 0} \frac{\Delta z(M_0)}{|M_0M|} = \lim_{|M_0M| \to 0} \frac{z(M) - z(M_0)}{|M_0M|},$$

то его называют ***производной функции*** $z = f(x,y)$ ***в точке*** $M_0(x_0, y_0)$ ***по направлению вектора*** $\bar{\mathbf{s}}$.

Обозначают: $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial s}$, $\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial s}$

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial \ell}, \quad \frac{\partial z(M_0)}{\partial \ell}$$

Физический смысл производной по направлению

$\dfrac{\Delta z(M_0)}{|M_0M|}$ – средняя скорость изменения функции $z = f(x, y)$ на отрезке M_0M.

$\Rightarrow \lim\limits_{|M_0M|\to 0} \dfrac{\Delta z(M_0)}{|M_0M|}$ – скорость изменения функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ в направлении вектора $\bar{\mathbf{s}}$.

Так же как и для функции одной переменной доказывается, что

1) если $\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial s} > 0$, то функция в точке $M_0(x_0,y_0)$ в направлении вектора $\bar{\mathbf{s}}$ возрастает;

2) если $\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial s} < 0$, то функция в точке $M_0(x_0,y_0)$ в направлении вектора $\bar{\mathbf{s}}$ убывает;

3) если $\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial s} = 0$, то в направлении вектора $\bar{\mathbf{s}}$ функция не изменяется.

$\Rightarrow$ направление вектора $\bar{\mathbf{s}}$ – направление линии уровня функции, проходящей через точку M_0
(вектор $\bar{\mathbf{s}}$ является касательным к линии уровня в точке M_0).

Замечание.

Частные производные функции являются частным случаем производной по направлению:

1) $f'_x(M_0)$ – производная функции по направлению вектора ***i*** (направлению оси Ox);

2) $f'_y(M_0)$ – производная функции по направлению вектора ***j*** (направлению оси Oy).

Пусть $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$. Тогда

$$\Delta z(M_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \mu \cdot \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},$$

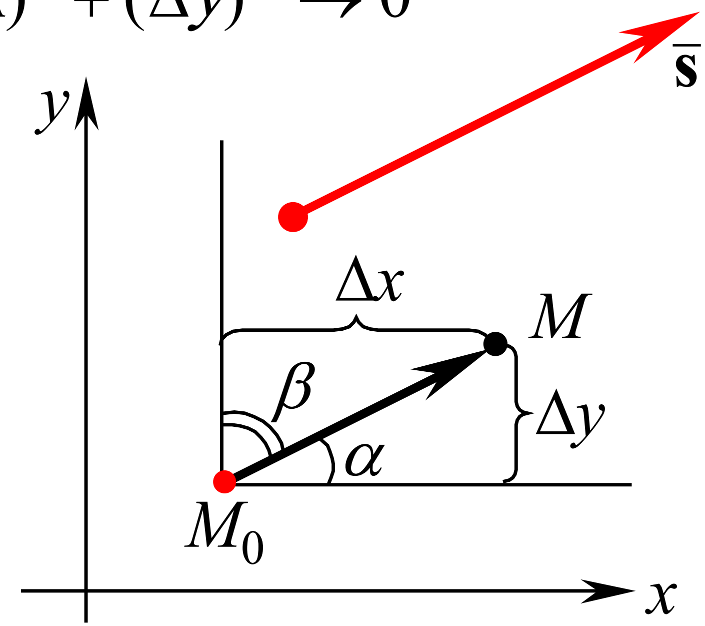
где μ – бесконечно малая при $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$

Обозначим $|M_0M| = \rho$. Тогда

$$\Delta x = \rho \cdot \cos\alpha, \quad \Delta y = \rho \cdot \cos\beta$$

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \rho,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$ – направляющие косинусы вектора $\bar{\mathbf{s}}$.



Следовательно,

$$\Delta z(M_0) = f'_x(x_0, y_0)\rho\cos\alpha + f'_y(x_0, y_0)\rho\cos\beta + \mu \cdot \rho$$

Разделив на $|M_0M| = \rho$ и перейдя к пределу при $\rho \to 0$, получим

$$\lim_{|M_0M| \to 0} \frac{\Delta z(M_0)}{|M_0M|} = \lim_{\rho \to 0}\left(f'_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f'_y(x_0, y_0)\cos\beta + \mu\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z(M_0)}{\partial s} = f'_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f'_y(x_0, y_0)\cos\beta ,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$ – направляющие косинусы вектора $\bar{\mathbf{s}}$.

Замечание. Аналогично определяется и обозначается производная по направлению для функции 3-х переменных $u = f(x,y,z)$. Для нее получим

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial s} = f'_x(M_0)\cos\alpha + f'_y(M_0)\cos\beta + f'_z(M_0)\cos\gamma ,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $\bar{\mathbf{s}}$.

2. Градиент

Определение. ***Градиентом функции*** $z = f(x, y)$ ***в точке*** $M_0(x_0, y_0)$ *называется вектор с координатами*

$$f'_x(x_0, y_0), \quad f'_y(x_0, y_0).$$

Обозначают: $\mathbf{grad}\, z(M_0)$.

Свойства градиента

1) $\mathbf{grad}\, z(M_0)$ определяет направление, в котором функция в точке M_0 возрастает с наибольшей скоростью;

при этом $|\, \mathbf{grad}\, z(M_0) \,|$ равен наибольшей скорости изменения функции в точке M_0.

2) $\mathbf{grad}\, z(M_0)$ перпендикулярен к линии уровня функции $z = f(x,y)$, проходящей через точку M_0.

Замечание. Для функции 3-х переменных градиент определяют и обозначают аналогично, и он сохраняет все свои свойства.