

Министерство образования и науки Российской Федерации
Амурский государственный университет

Н.А. Ермилова, А.В. Павельчук

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ
ПЕРЕМЕННЫХ

Учебно-методическое пособие

Благовещенск

2013

ББК 22.161.5я73

Е73

Рекомендовано

учебно-методическим советом университета

Рецензент:

Максимова Н.Н., доцент кафедры МАиМ АмГУ, канд. физ.-мат. наук

Ермилова, Н.А., Павельчук, А.В.

Е73 Матрицы, определители, системы линейных уравнений: Учебно-методическое пособие / Н.А. Ермилова, А.В. Павельчук. – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2013. – 68 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов инженерно-технических специальностей университетов. Доступность теоретического обоснования методов решения задач, многообразие разобранных примеров помогут студентам при самостоятельной работе по изучению данного раздела математики.

ББК 22.161.5я73

В авторской редакции

© Амурский государственный университет, 2013

© Ермилова Н.А., Павельчук А.В., 2013

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Понятие функции одной переменной не охватывает все зависимости, существующие в природе. При рассмотрении многих вопросов из различных областей знания приходится изучать такие зависимости между переменными величинами, когда числовые значения одной из них полностью определяются значениями нескольких других.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Объем V конуса – это функция от радиуса R его основания и от высоты H . Взаимозависимость этих переменных выражается формулой

$$V = \frac{\pi R^2 H}{3}.$$

2. По закону Ома напряжение U в электрической цепи связано с сопротивлением цепи R и силой тока I зависимостью

$$U = R \cdot I$$

3. Абсолютная температура, объем и давление газа, находящегося в цилиндре под поршнем, связаны формулой Клапейрона

$$pV = RT (R - const).$$

4. Например, изучая физическое состояние какого-либо тела, приходится наблюдать изменение его свойств от точки к точке. Каждая точка тела задается тремя координатами: x , y , z . Так, например, меняются плотность, температура, электрический потенциал и т.д. Все эти величины являются функциями точки или функциями координат x , y , z . Если физическое состояние тела к тому же еще и меняется с течением времени t , в этом случае мы имеем дело с функциями четырех переменных: x , y , z , t .

Для изучения подобных зависимостей вводится понятие функций нескольких переменных.

Определение. Если каждой совокупности значений n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ из некоторого множества D этих совокупностей соответствует своё единственное значение переменной u , то говорят, что на множестве D

задана функция переменных $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, или $u = f(M)$, где M – произвольная точка функции, имеющая n координат $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Множество D называется областью определения или областью существования этой функции.

Если рассматривается функция двух переменных, то ее обычно обозначают $z = f(x, y)$. Областью ее определения является некоторое множество точек координатной плоскости Oxy , а областью значений – множество точек (x, y, z) трехмерного пространства $Oxyz$. Переменные x и y называются аргументами функции z .

Так, например, областью определения функции

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

является множество точек плоскости Oxy , координаты которых удовлетворяют соотношению

$$R^2 - x^2 - y^2 \geq 0, \text{ или } x^2 + y^2 \leq R^2,$$

т. е. представляет собой круг на плоскости Oxy радиуса R с центром в начале координат.

Геометрическим изображением (графиком) функции двух переменных

$z = f(x, y)$ является множество точек в пространстве $Oxyz$, координаты которых удовлетворяют уравнению $z = f(x, y)$.

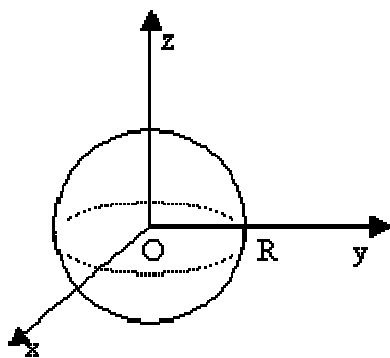


Рис.1

Графиком функции непрерывных аргументов, как правило, является некоторая поверхность в пространстве $Oxyz$, которая проектируется на координатную плоскость Oxy в область определения функции.

Так, например, графиком функции

$$z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$$

является верхняя половина сферы, достаточно привести уравнение к каноническому виду:

$$z^2 = \left(\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \right)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

а графиком функции

$$z = -\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$$

является нижняя половина сферы (рис.1).

Для функции

$$z = \ln(x^2 + y^2 - r^2)$$

областью определения D является множество точек, которые удовлетворяют условию

$$x^2 + y^2 > r^2.$$

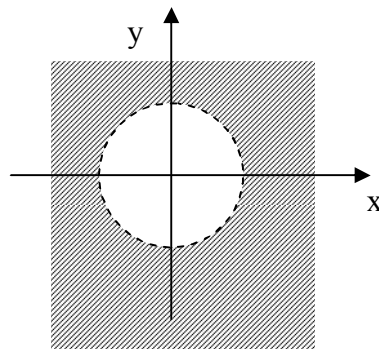


Рис.2

Это множество точек, внешних по отношению к окружности $x^2 + y^2 = r^2$ (рис.2). Окружность изображена пунктиром, т.к. неравенство строгое. Точки самой окружности не входят в область D .

Множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq R^2$ называется кругом радиуса R с центром в точке (a, b) .

Множество точек пространства, координаты, x, y, z которых удовлетворяют неравенству $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \leq R^2$ называют шаром радиуса R с центром в точке (a, b, c) .

Графиком линейной функции $z = ax + by + c$ является плоскость в пространстве $Oxyz$, областью ее определения – множество всех пар чисел (x, y) .

Часто функции двух переменных задаются в *неявном виде*, как уравнение

$$F(x, y, z) = 0,$$

связывающее три переменные величины. В этом случае каждую из величин x, y, z можно рассматривать как неявную функцию двух остальных.

Заметим, что функцию трех и большего числа переменных изобразить наглядно в виде графика в трехмерном пространстве невозможно.

В дальнейшем будем в основном ограничиваться рассмотрением функций двух или трех переменных, так как рассмотрение случая большего (но конечного) числа переменных производится аналогично.

Функции двух переменных представляют собой поверхности. Наиболее известные из них были рассмотрены в курсе аналитической геометрии. Это различные плоскости с общим уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

и поверхности второго порядка:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad - \text{ эллипсоид;}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad - \text{ однополостный гиперболоид;}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad - \text{ двуполостный гиперболоид;}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad - \text{ конус;}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z \quad - \text{ эллиптический параболоид;}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z \quad - \text{ гиперболический параболоид;}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad - \text{ эллиптический цилиндр;}$$

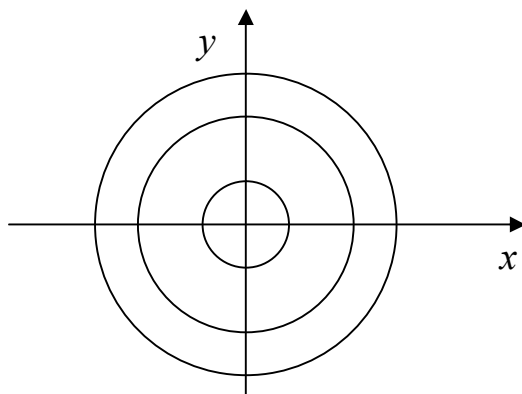
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ — гиперболический цилиндр;}$$

$$y^2 = 2px \text{ — параболический цилиндр.}$$

Метод сечений. В большинстве случаев построение графиков функций двух переменных представляет определенные трудности, в связи с чем исследуют поверхности при помощи *метода сечений*. При этом исследуемую поверхность пересекают плоскостью, например, $z = C$. Графиком функции $z = C$ ($C = const$), как известно, служит плоскость, параллельная координатной плоскости Oxy . Поэтому, придавая заданной функции различные значения C , получим уравнения линий сечения поверхности плоскостью, так называемых *линий уровня* (для функции двух переменных) или *поверхностей уровня* (для функций трех переменных). Линиями уровня обозначают глубину морей и высоту гор на географических картах, а также распределение среднесуточной температуры и т. д.

Пример 1. 1. Построить линии уровня функции $z = x^2 + y^2$.

Решение. Пересечем поверхность плоскостью $z = C$, получим уравнение $C = x^2 + y^2$, где постоянная C принимает множество неотрицательных значений. Полученное уравнение задает множество концентрических окружностей, или *семейство окружностей* с центром $(0,0)$ и радиусами, равными $\sqrt{C}$; при $C=0$ окружность вырождается в точку $(0,0)$ (рис.3). Из того, что сечениями поверхности являются окружности, можно заключить, что мы имеем дело с поверхностью вращения.



Действительно, рассекая данную поверхность плоскостями $x = 0$ и $y = 0$, получаем параболы $z = y^2$ и $z = x^2$, следовательно, данная поверхность является параболоидом вращения.

Скалярную функцию $u = f(v)$, заданную на некотором множестве G называют *скалярным полем* на этом множестве, в отличие от векторных функций $\vec{F} = \vec{F}(M)$, называемых *векторными полями*.

Примерами скалярных полей являются поле температур, поле давлений, электростатическое поле и др., а векторных – электрическое поле точечного заряда, поле сил тяготения (каждой точке пространства ставится в соответствии сила тяжести единичной массы, помещенной в эту точку), поле магнитной напряжённости и др.

Пример 1.2. Найти линии уровня плоского скалярного поля

$$u = x^2 - y^2.$$

Решение. Линии уровня данного поля определяются уравнениями

$$x^2 - y^2 = C \quad (C = \text{const}).$$

При $C = 0$ имеем $x^2 - y^2 = 0$ или $(x - y)(x + y) = 0$.

Откуда следует $\begin{cases} x - y = 0, \\ x + y = 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x = y, \\ x = -y. \end{cases}$

Получили две прямые $x = y$ и $x = -y$.

При $C \neq 0$ получаем семейство гипербол:

$$\frac{x^2}{(\sqrt{C})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{C})^2} = 1 \text{ при } C > 0 \text{ и } \frac{y^2}{(\sqrt{C})^2} - \frac{x^2}{(\sqrt{C})^2} = 1 \text{ при } C < 0 \text{ (рис.4).}$$

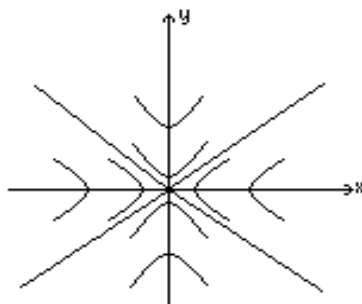


Рис. 4

Пример 1.3. Определить поверхности уровня скалярного поля $u = x_1 + 2x_2 + 3x_3$.

Решение. Поверхности уровня определяются семейством уравнений:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = C \quad (C = \text{const}).$$

В пространстве эти уравнения определяют семейство параллельных плоскостей.

Пример 1.4. Найти поверхность уровня скалярного поля $U = \frac{z}{x^2 + y^2}$, проходящую через точку $M_0(1;3;10)$.

Решение. Запишем уравнение $\frac{z}{x^2 + y^2} = C$. Из полученного семейства поверхностей выберем ту, которая проходит через точку $M_0(1;3;10)$.

Получим: $C = \frac{10}{1+9} = 1$.

Подставляя значение $C=1$ в уравнение поверхности уровня, получим уравнение $\frac{z}{x^2 + y^2} = 1$ или $z = x^2 + y^2$.

Поверхностью уровня в точке M_0 , таким образом, является параболоид вращения $z = x^2 + y^2$ (рис. 5).

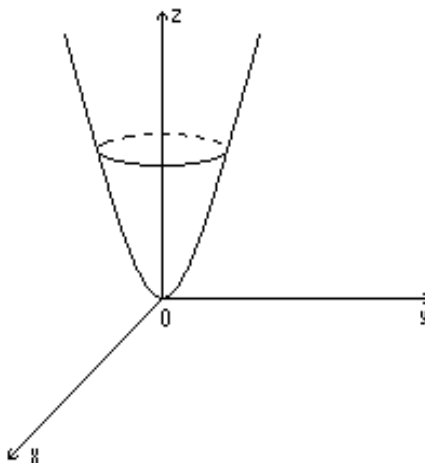


Рис. 5

Упражнения

Задание 1. Найти и изобразить в плоскости XOY область определения функции.

$z = \ln(4 + 4x - y^2)$	$z = \ln(x^2 + y^2 - 1)$
$z = \frac{\pi}{3} y^2 \sqrt{x^2 - y^2}$	$z = \arcsin \frac{y}{x}$
$z = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{x-y}}$	$z = \frac{xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$
$z = \frac{x}{y} - \ln((x+2)(1-y))$	$z = \frac{1}{\sqrt{5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9}}$
$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$	$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + 2\ln(9 - x^2 - 9y^2)$

Задание 2. Найти уравнения и построить линии уровня функций.

$z = 2x + y$	$z = x^2 - y^2 - 4y$
$z = x^2 - 4y^2$	$z = xy$
$z = x^2 + y^2 + 2x$	$z = \sqrt{x/y}$
$z = e^{xy}$	$z = \ln(y/x)$

2. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Предел функции. Рассмотрим плоскость и систему Oxy декартовых прямоугольных координат на ней.

Из аналитической геометрии знаем, что каждой упорядоченной паре чисел (x, y) можно сопоставить единственную точку M плоскости и наоборот, каждой точке M плоскости соответствует единственная пара чисел. Поэтому в дальнейшем, говоря о точке, мы будем часто подразумевать соответствующую ей пару чисел (x, y) и наоборот.

Введем важное для дальнейшего изложения понятие: *окрестность точки*.

Круговой δ -окрестностью точки $M_0(x_0, y_0)$ называется круг радиуса δ с центром в точке M_0 , т. е. множество точек $M(x, y)$, координаты которых удовлетворяют неравенству: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2$

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой области D и $M_0(x_0, y_0)$ – точка, лежащая внутри или на границе этой области.

Конечное число A называется *пределом функции* $z = f(x, y)$ при $M \rightarrow M_0$ (или $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$), если для любого положительного числа ε можно найти такое положительное число δ , что неравенство

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon$$

выполняется для всех точек $M(x, y)$ из области D , отличных от $M_0(x_0, y_0)$, координаты которых удовлетворяют неравенству:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2$$

Смысл этого определения состоит в том, что значения функции $z = f(x, y)$ как угодно мало отличаются от числа A в точках достаточно малой окрестности точки M_0 .

Употребляются следующие обозначения предела:

$$A = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = \lim_{M \rightarrow M_0} f(M), \quad f(x, y) \rightarrow A \quad \text{при} \quad x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0.$$

Аналогичное определение предела можно привести для функций трех и более переменных.

В случае трех переменных имеем: $u = f(M) = f(x, y, z)$; координаты точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ удовлетворяют неравенству

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < \delta^2.$$

В таком случае $A = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0 \\ z \rightarrow z_0}} f(x, y, z) = \lim_{M \rightarrow M_0} f(M).$

Для функций нескольких переменных, справедливы основные теоремы о пределах для функций одной переменной. Например, теоремы о пределе суммы, произведения и частного двух функций.

Непрерывность функции в точке.

Функция $z = f(M)$ называется непрерывной в точке A , если для нее в этой точке существует конечный предел, совпадающий со значением $f(A)$ функции в точке:

$$\lim_{M \rightarrow A} f(M) = f(A).$$

Сформулируем определение непрерывности на языке $\varepsilon - \delta$.

Функция $z = f(M)$ называется непрерывной в точке A , если для любого положительного числа ε можно найти такое положительное число δ , что неравенство $|f(M) - f(A)| < \varepsilon$ выполняется для всех точек $M(x, y)$ из области D , отличных от $A(x_A, y_A)$, координаты которых удовлетворяют неравенству:

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 < \delta^2.$$

В случае функции трех переменных: $u = f(M) = f(x, y, z)$, $A(x_A, y_A, z_A)$.

Координаты точек M из области D удовлетворяют неравенству

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 < \delta^2.$$

Очевидно, приведенное определение справедливо для функции n переменных $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Итак, функция $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ или $u = f(M)$ называется непрерывной в точке A , если выполняются условия:

- 1) если функция $u = f(M)$ определена в точке A ;
- 2) существует предел $\lim_{M \rightarrow A} f(M)$;
- 3) $\lim_{M \rightarrow A} f(M) = f(A)$

Функция называется непрерывной в области D , если она непрерывна в каждой точке этой области. Если в точке A нарушено одно из условий 1-3, то

точка A называется точкой *разрыва функции*. Точки разрыва могут быть изолированными, образовывать линии разрыва, поверхности разрыва.

Например, функция $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$ имеет разрыв в точке $(0,0)$, а функция

$z = \frac{xy}{x - y}$ имеет линию разрыва $y = x$.

Упражнения

Задание 1. Найдите точки разрыва следующих функций.

$u = \sin \frac{1}{xy}$	$u = \frac{xy}{x + y}$
$u = \ln(1 - x^2 - y^2)$	$u = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$

3. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Пусть дана функция $u = f(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n)$. Придадим приращение Δx_k , оставив остальные переменные неизменными:

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_k + \Delta x_k, \dots, x_n).$$

Тогда разность

$$\Delta u_k = f(x_1, x_2, \dots, x_k + \Delta x_k, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n)$$

называется *частным приращением* функции u по переменной x_k в точке $(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n)$.

Частной производной функции u по переменной x_k называется предел отношения частного приращения к приращению соответствующего аргумента, когда последний стремится к нулю.

Обозначаются частные производные $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ или u'_{x_k} .

Итак, согласно определению,

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_k + \Delta x_k, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n)}{\Delta x_k}. \quad (1)$$

Для функции n переменных, таким образом, можно найти n частных производных (при условии дифференцируемости функции).

Из (1) следует, что частные производные функции $z = f(x, y)$ двух переменных имеют вид:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}. \quad (2)$$

Таким образом, частные производные по одному из аргументов – это обычные производные от одной переменной, которые получаются из данной функции, когда другие переменные фиксируются, т.е. считаются постоянными.

Часто применяется и другое обозначение частных производных:

$$z'_x, z'_y \text{ или } f'_x, f'_y.$$

Пример 3.1. Найти частные производные функции

$$z = 3x^2 y^3 + x + 2y.$$

Решение. Для нахождения частной производной z'_x фиксируем y , т.е. считаем величину y постоянной, а для нахождения z'_y постоянной считаем переменную x , тогда получим:

$$z'_x = 3y^3 (x^2)' + x' = 6xy^3 + 1; \quad z'_y = 3x^2 (y^3)' + (2y)' = 9x^2 y^2 + 2.$$

Пример 3.2. Найти частные производные функции $z = x^y$.

$$\text{Решение. } z'_x = (x^y)'_x = yx^{y-1}, \quad z'_y = (x^y)'_y = x^y \cdot \ln x.$$

Пример 3.3. Найти частные производные функции $z = \operatorname{arctg}^2 \frac{x}{y}$.

Решение.

$$z'_x = \left(\operatorname{arctg}^2 \frac{x}{y} \right)'_x = 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$z'_y = \left(\arctg^2 \frac{x}{y} \right)'_y = 2 \arctg \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{-x}{y^2} = -2 \arctg \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

4. ПОЛНОЕ ПРИРАЩЕНИЕ И ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ

Пусть функция $z = f(x, y)$ не только непрерывна, но и имеет в каждой точке (x, y) непрерывные частные производные $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$. Закрепим некоторую пару значений x и y , а затем придадим им приращения Δx и Δy . Тогда наша функция получит приращение

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y), \quad (3)$$

которое называется *полным приращением*.

Представим полное приращение в виде:

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) + f(x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = \\ &= (f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)) + (f(x, y + \Delta y) - f(x, y)). \end{aligned}$$

По определению частной производной имеем:

$$\begin{aligned} \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)}{\Delta x} &\rightarrow f'_x \Rightarrow \\ \Rightarrow f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) &= f'_x(x, y) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} &\rightarrow f'_y(x, y) \Rightarrow \\ \Rightarrow f(x, y + \Delta y) - f(x, y) &= f'_y(x, y) \cdot \Delta y + \beta \cdot \Delta y \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\Delta z = f'_x(x, y) \Delta x + f'_y(x, y) \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y. \quad (4)$$

Полным дифференциалом функции $z = f(x, y)$ называется главная часть $f'_x(x, y) \Delta x + f'_y(x, y) \Delta y$ ее приращения Δz , линейная относительно приращений Δx и Δy . Обозначается символом dz . Итак:

$$dz = f'_x(x, y) \Delta x + f'_y(x, y) \Delta y$$

С учетом того, что приращение независимой переменной равно дифференциалу, т.е. $\Delta x = dx$ и $\Delta y = dy$, получим формулу полного дифференциала:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad \text{или} \quad dz = z'_x dx + z'_y dy \quad (5)$$

Поскольку Δz (формула 4) от dz (формула 5) отличается на бесконечно малую, то принимая $dz \approx \Delta z$, полный дифференциал применяют для приближенных вычислений, т.е. считая, что

$$dz = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

находят приращенное значение функции:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = dz + f(x, y) \quad (6)$$

Пример 4.1. Вычислить приближенно с помощью дифференциала $\sqrt{4,05^2 + 3,07^2}$.

Решение. Искомое число будем рассматривать как значение функции $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ при $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, если $x_0 = 4$, $y_0 = 3$, $\Delta x = 0,05$, $\Delta y = 0,07$.

$$\text{Найдем } f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(4 + 0,05, 3 + 0,07) = \sqrt{4,05^2 + 3,07^2}.$$

Имеем:

$$f(x, y) = f(4, 3) = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5.$$

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$dz\Big|_{\substack{x=4 \\ y=3}} = \frac{4 \cdot 0,05 + 3 \cdot 0,07}{5} \approx 0,08.$$

Тогда искомое значение функции по формуле (6) равно:

$$\sqrt{4,05^2 + 3,07^2} = 5 + 0,08 = 5,08.$$

Упражнения

Задание 1. Найти частные производные и полный дифференциал функции

	$z = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$		$z = (5x^2y - y^3 + 7)^5$
	$z = \operatorname{arctg} \frac{x^3}{y}$		$z = \cos \frac{x-y}{x^2 + y^2}$
	$z = xy \ln(x+y)$		$z = e^{-(x^3+y^3)}$
	$z = e^{\sin y}$		$z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$
	$z = (\sin x)^y$		$z = (x + \ln xy)^3$
	$z = \frac{\cos x^2 y}{y}$		$z = \sin \sqrt{\frac{y}{x+y}}$

Задание 2. Вычислить значения частных производных функции в точке

M_0 .

$f(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad M_0(0, -1, 1)$
$f(x, y, z) = (\sin x)^{yz}, \quad M_0(\pi/6, 1, 2)$
$f(x, y, z) = \ln\left(x + \frac{y}{2x}\right), \quad M_0(1, 2, 1)$
$f(x, y, z) = \ln(x^3 + 2y^3 - z^3), \quad M_0(2, 1, 0)$

Задание 3. Вычислить приближенно при помощи полного

дифференциала (считать $1^\circ = \frac{\pi}{180} \approx 0,017$; $\frac{\pi}{2} \approx 1,57$).

	$\sqrt[3]{(2,92)^2 - (1,03)^2}$		$\sin 44^\circ \cdot \cos 31^\circ$
	$\sqrt{(1,02)^2 + (0,05)^2}$		$\sqrt{e^{0,03} + 5 \cdot 2,97}$
	$\cos 29^\circ \cdot \operatorname{tg} 44^\circ$		$\ln(\sqrt[3]{1,02} + \sqrt[4]{0,99} - 1)$
	$\frac{2}{\sqrt{1,95^3 + 1,05^3 + 1}}$		$\operatorname{arctg}\left(\frac{1,97}{1,02} - 1\right)$

5. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Пусть дана функция $z = 8x^2y^2 + 16xy^2 - 9x$. Тогда

$$z'_x = 16xy^2 + 16y^2 - 9,$$

$$z'_y = 16x^2y + 32xy$$

Если от полученных функций вновь найти частные производные, то получим *частные производные второго порядка*:

$$(z'_x)_x = (16xy^2 + 16y^2 - 9x)_x = 16y^2 - 9,$$

$$(z'_y)_y = (16x^2y + 32xy)_y = 16x^2 + 32x,$$

$$(z'_x)_y = (16xy^2 + 16y^2 - 9x)_y = 32x + 32y,$$

$$(z'_y)_x = (16x^2y + 32xy)_x = 32x + 32y.$$

Обозначаются *частные производные второго порядка*, или просто *вторые производные*:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \text{ или } z''_{xx}, z''_{yy}, z''_{xy}, z''_{yx}.$$

Важно! В обозначениях первого вида двойки не обозначают квадрат выражения, а лишь порядок производной.

Две последние производные из рассмотренного примера называются *смешанными*.

Как следует из примера, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$. (7)

Можно убедиться на примерах, что смешанные производные не зависят от порядка дифференцирования.

Приведенное правило распространяется на непрерывные производные рассматриваемого порядка.

Аналогично определяются и обозначаются частные производные порядка выше второго. Результат многократного дифференцирования функции по различным переменным не зависит от очередности дифференцирования при

условии, что возникающие при этом смешанные частные производные непрерывны.

Как известно, первый дифференциал определяется по формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Дифференциал второго порядка определяется как

$$d^2 z = d(dz).$$

Имеем:

$$\begin{aligned} d^2 z &= d\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx\right) + d\left(\frac{\partial z}{\partial y} dy\right) = \\ &= d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) dy + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \\ &+ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} dy dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2. \quad (8)$$

При выводе формулы (8) мы рассматривали dx и dy как постоянные, не зависящие от x и y величины, а также использовали равенство $z''_{xy} = z''_{yx}$.

Аналогично для дифференциала третьего порядка можно вывести формулу

$$d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3. \quad (9)$$

Пример 5.1. Найти частные производные второго порядка функции

$$z = \arctg \frac{y}{x}.$$

Решение. Имеем $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \right)'_y = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Или в иных обозначениях:

$$z'_x = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad z'_y = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \right)'_x = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

$$z''_{yy} = (z'_y)'_y = \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right)'_y = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \right)'_y = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Упражнения

Задание 1. Найти вторые частные производные, убедиться в том, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \quad (\text{или } z''_{xy} = z''_{yx}).$$

	$z = e^{x^2 - y^2}$		$z = \operatorname{ctg}(x + y)$
	$z = \operatorname{tg} \frac{x}{y}$		$z = \cos(xy^2)$
	$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$		$u = \arccos \sqrt{\frac{x}{y}}$

Задание 2. Проверить, удовлетворяет ли указанному уравнению данная функция $u(x, y)$.

$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u = \frac{y}{x}$
$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 3(x^3 - y^3), \quad u = \ln \frac{y}{x} + x^3 - y^3$
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u = \ln(x^2 + (y+1)^2)$
$y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - (1 + y \ln x) \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u = x^y$

Задание 3. Найти дифференциалы второго порядка для функций.

$u = x / y$	$u = \sqrt{x^2 + y^2}$
$u = \frac{x}{x^2 + y^2}$	$u = xyz$
$u = x^3 + y^3 - 3xy(x - y)$	$u = x^{y^2}$

6. КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ

Плоскость, в которой расположены все касательные прямые к линиям на поверхности, проходящим через данную ее точку M_0 , называется *касательной плоскостью* к поверхности в точке M_0 .

Уравнение касательной плоскости к поверхности $F(x, y, z) = 0$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид:

$$F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)+F'_z(M_0)(z-z_0)=0 \quad (10)$$

Если функция $z = f(x, y)$ выражается явно из уравнения поверхности $F(x, y, z) = 0$, то формула (10) примет вид:

$$z - z_0 = f'_x(M_0)(x - x_0) + f'_y(M_0)(y - y_0). \quad (11)$$

Обозначив здесь $z - z_0 = \Delta z$, $(x - x_0) = \Delta x$, $(y - y_0) = \Delta y$, получим:

$$\Delta z = f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y,$$

или

$$df(x_0, y_0) = \Delta z,$$

т.е. полный дифференциал функции двух переменных равен приращению аппликаты касательной плоскости. Таково геометрическое истолкование полного дифференциала функции $z = f(x, y)$.

Прямая, проведенная через точку M_0 поверхности перпендикулярно касательной плоскости, называется *нормалью к поверхности*.

Уравнение нормали к поверхности в данной точке M_0 имеет вид:

$$\frac{(x-x_0)}{F'_x(M_0)} = \frac{(y-y_0)}{F'_y(M_0)} = \frac{(z-z_0)}{F'_z(M_0)}. \quad (12)$$

На рис.6 изображены: α – касательная плоскость; $\vec{n}$ – вектор нормали к поверхности $F(x, y, z) = 0$ в точке M_0 .

Пример 6.1. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2 + y^2$ в точке $M(1,1,2)$ (рис. 6).

Решение. Здесь $F = z - x^2 - y^2$, $F'_x = -2x$, $F'_y = -2y$, $F'_z = 1$.

В точке $M(1,1,2)$ получим $F'_x = F'_y = -2$, $F'_z = 1$. Согласно формулам (10) и (12) уравнения касательной плоскости и нормали соответственно имеют вид:

$$2x + 2y - z - 2 = 0, \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-1}.$$

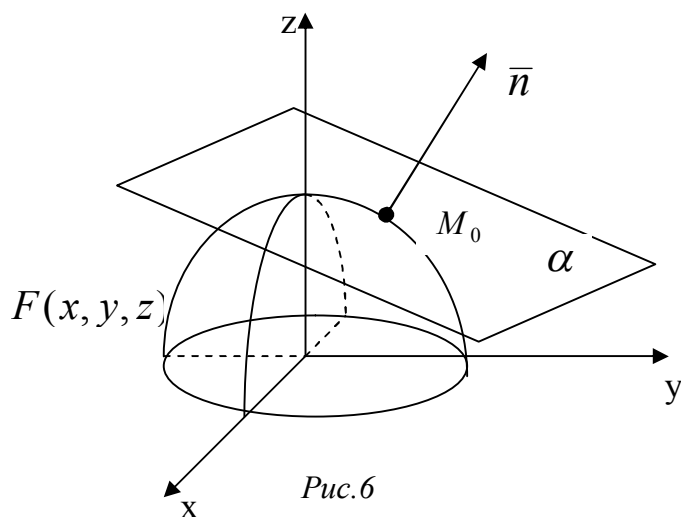


Рис.6

Упражнения 5

Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке M .

$z = x^2 + 2y^2, \quad M(1, 1, 3)$
$x \cdot z^2 - x^2 y + y^2 z + 2x - y - 6 = 0, \quad M(5, 1, 2)$
$z = (x - y)^2 - xy - \frac{3x}{y}, \quad M(2, 2, 1)$
$z = 3\left(\frac{1}{x} + y\right)^2 - \frac{2x^2}{y^2}, \quad M(1, 1, 10)$
$xyz - z^3 + yz - x + 1 = 0, \quad M(1, 2, 2)$

7. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ И НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ

Производная сложной функции. Если $u = f(M)$ – дифференцируемая функция переменных $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n$, которые сами являются дифференцируемыми функциями независимой переменной t :

$$x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t), \dots, x_n = \varphi_n(t),$$

то производная сложной функции $u = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$ вычисляется по

формуле

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt} \quad (13)$$

Для функции двух переменных $z = f(x, y)$, согласно формуле(4), имеем:

$$\Delta z = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y.$$

Если функция $z = f(x, y)$ сложная, т.е. $x = x(t), y = y(t)$ и $z = f(x(t), y(t))$, то

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = f'_x(x, y)\frac{\Delta x}{\Delta t} + f'_y(x, y)\frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha\Delta x + \beta\Delta y.$$

Тогда

$$z'_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(f'_x(x, y)\frac{\Delta x}{\Delta t} + f'_y(x, y)\frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha\Delta x + \beta\Delta y \right) = f'_x \cdot x'_t + f'_y \cdot y'_t.$$

Эту формулу можно записать в равносильных видах:

$$z'_t = z'_x \cdot x'_t + z'_y \cdot y'_t \quad (14)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \quad (14')$$

Пример 7.1. Найти $\frac{du}{dt}$, если $u = xyz$, где $x = t^2 + 1, y = \ln t, z = \operatorname{tg} t$.

Решение. По формуле (14') имеем $\frac{du}{dt} = yz \cdot 2t + xz \cdot \frac{1}{t} + xy \cdot \sec^2 t$.

Производная неявной функции. Пусть, например, функция двух переменных задана неявно, т.е. уравнением

$$F(x, y, z) = 0. \quad (15)$$

1. Выражение $F(x, y, z)$ следует продифференцировать почленно, а затем найти дифференциал, откуда получим искомую производную.

2. Пусть задана функция $y = f(x)$ уравнением

$$F(x, y) = 0, \quad (16)$$

связывающему x и y неразрешимое относительно зависимой переменной $y(x)$.

Дифференцируя тождество (16) по x , согласно правилу дифференцирования

сложной функции, получим:

$$F'_x(x, y) + F'_y(x, y) \frac{dy}{dx} = 0.$$

Отсюда вытекает формула для производной неявной функции:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}. \quad (17)$$

Если рассматривать функцию $F(x, y, z)$ как неявную относительно $z = f(x, y)$, то, учитывая, что находя $\frac{\partial z}{\partial x}$, мы считаем y постоянным, и пользуясь формулой (17), получим формулы нахождения частных производных неявной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}. \quad (18)$$

Кроме того, если рассматривать функции $y = f(x, z)$, $x = f(y, z)$, то частные производные этих функций вычисляются аналогично:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_y}, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{F'_z}{F'_y}, \quad \frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_x}, \quad \frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{F'_z}{F'_x}. \quad (19)$$

Рассмотрим оба случая на примерах.

Пример 7.2. Дана функция

$$x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0.$$

Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Решение. Имеем:

$$F(x, y, z) = x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0.$$

Продифференцируем почленно:

$$3x^2 dx + 6y^2 dy + 3z^2 dz - 3yz dx - 3xz dy - 3xy dz - 2dy = 0,$$

откуда выразим полный дифференциал dz :

$$dz = \frac{(3x^2 - 3yz)dx + (6y^2 - 3xz - 2)dy}{3xy - 3z^2} = \underbrace{\frac{3x^2 - 3yz}{3xy - 3z^2}}_{\frac{\partial z}{\partial x}} dx + \underbrace{\frac{6y^2 - 3xz - 2}{3xy - 3z^2}}_{\frac{\partial z}{\partial y}} dy.$$

Итак, $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3x^2 - 3yz}{3xy - 3z^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{6y^2 - 3xz - 2}{3xy - 3z^2}.$

Пример 7.3. Найти частные производные функции, заданной уравнением $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

Решение. Имеем $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Найдем частные производные: $F'_x = 2x, \quad F'_y = 2y, \quad F'_z = 2z$. Откуда по формуле (18)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}.$$

Упражнения

Задание 1. Вычислить значение производной сложной функции при $t = t_0$.

$u = e^{x-2y}, \quad x = \sin t, \quad y = t^3, \quad t_0 = 0$
$u = \ln(e^x + e^{-y}), \quad x = t^2, \quad y = t^3, \quad t_0 = -1$
$u = y^x, \quad x = \ln(t-1), \quad y = e^{t/2}, \quad t_0 = 2$
$u = e^{y-2x+2}, \quad x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad t_0 = \pi/2$

Задание 2. Вычислить значения частных производных функций $z(x, y)$, заданных неявно, в данной точке $M(x, y, z)$.

$x^2 + y^2 + z^2 - z - 4 = 0,$ $M(2, 1, 1)$	$x^3 + y^3 + z^3 - xy = 2,$ $M(-1, 0, 1)$
$3x - 2y + z = xz + 5,$ $M(1, 1, -1)$	$e^x + x + 2y + z = 4,$ $M(1, 1, 0)$

8. ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ И ГРАДИЕНТ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

Производная скалярного поля. В физике при изучении тех или иных физических явлений, характеризующих скалярное поле $u = f(M)$, весьма важно знать скорость изменения этого поля в направлении некоторого вектора $\vec{l}$ ($\vec{l} \neq 0$).

Поэтому одной из основных характеристик скалярного поля является скорость изменения функции поля в заданном направлении $\vec{l}$.

Пусть скалярное поле определяется скалярной функцией $u = f(M)$. Выберем две точки M_0 и M в области задания скалярного поля G так, чтобы вектор $\overrightarrow{M_0M}$ был параллелен вектору $\vec{l}$. Обозначим приращение скалярного поля в точке M_0 через $\Delta u = f(M) - f(M_0)$, а $\Delta d = |\overrightarrow{M_0M}|$. Отношение $\frac{\Delta u}{\Delta d}$ есть средняя скорость изменения скалярного поля на единицу длины по данному направлению $\vec{l}$.

Если существует предел $\frac{\Delta u}{\Delta d}$ при $M \rightarrow M_0$ ($\Delta d \rightarrow 0$), то он называется производной функции $u = f(M)$, в данной точке M_0 по направлению $\vec{l}$ и обозначается $\frac{\partial u(M_0)}{\partial \vec{l}}$, т. е.

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{l}} \right|_{M_0} = \lim_{\Delta d \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta d} = \lim_{\Delta d \rightarrow 0} \frac{f(M) - f(M_0)}{\Delta d} \quad \text{при } \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{l}.$$

Пусть в пространстве введена декартова система координат $Oxyz$ и пусть функция $u(M) = F(x, y, z)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, тогда производная данной функции по направлению $\vec{l}$ вычисляется по формуле:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{l}} \right|_{M_0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0} \cdot \cos \alpha + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0} \cdot \cos \beta + \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_0} \cdot \cos \gamma, \quad (20)$$

где $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ - направляющие косинусы ненулевого вектора

$$\vec{l} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

которые находятся по формулам: $\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$

$$\cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad (21)$$

Символы $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0}, \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0}, \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_0}$ обозначают частные производные от

функции $u = f(M)$ в точке M_0 .

При этом, если: $\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{l}} \right|_{M_0} > 0$, то поле возрастает,

если $\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{l}} \right|_{M_0} < 0$, то поле убывает,

если $\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{l}} \right|_{M_0} = 0$, то поле стационарно

в окрестности точки M_0 в направлении ненулевого вектора $\vec{l}$.

Пример 8.1. Найти производную скалярного поля $u = xy + yz + xz$ в точке $M_0(0, -2, -1)$ в направлении $\vec{l} = \{12; -3; -4\}$.

Решение. Найдем направляющие косинусы вектора $\vec{l}$.

Длину вектора найдем по его координатам:

$$|\vec{l}| = \sqrt{144 + 9 + 16} = 13.$$

Тогда согласно формуле (21) имеем:

$$\cos \alpha = \frac{12}{13}, \quad \cos \beta = -\frac{3}{13}, \quad \cos \gamma = -\frac{4}{13}.$$

Вычислим значение частных производных в точке M_0 .

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0} = (y+z)|_{M_0} = -7, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0} = (x+z)|_{M_0} = 8, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_0} = (y+x)|_{M_0} = 9.$$

Используя формулу (20), получим

$$\left. \frac{\partial U}{\partial \vec{l}} \right|_{M_0} = (-7) \cdot \frac{12}{13} + 8 \cdot \left(-\frac{3}{13} \right) + 9 \left(-\frac{4}{13} \right) = -\frac{134}{13} < 0,$$

следовательно, скалярное поле в точке M_0 в направлении данного вектора $\vec{l}$ убывает.

Пример 8.2. Вычислить производную плоского скалярного поля $u = \operatorname{arctg} xy$ в точке $M_0(1;1)$ по направлению вдоль параболы $y = x^2$ (в сторону возрастания абсциссы).

Решение. Направлением $\vec{l}$ параболы $y = x^2$ в точке $M_0(1;1)$ считается направление касательной к параболе в этой точке. Определим угол наклона касательной к оси Ox :

$$\operatorname{tg} \alpha = y'(1) = 2x|_{x=1} = 2,$$

$$\text{тогда } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos \beta = \sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Найдем значения частных производных в точке M_0 :

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{M_0} = \frac{y}{1+x^2 y^2} \Big|_{M_0} = \frac{1}{2}, \quad \left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{M_0} = \frac{x}{1+x^2 y^2} \Big|_{M_0} = \frac{1}{2}$$

Подставляя найденные величины в формулу (20), получим

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{l}} \right|_{M_0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{3}{2\sqrt{5}} > 0,$$

следовательно, скалярное поле в точке M_0 в направлении данного вектора $\vec{l}$ возрастает.

Градиент скалярного поля. Пусть имеем скалярное поле, определяемое функцией $u = f(x, y, z) = f(M)$, где функция предполагается дифференцируемой в области G .

Градиентом скалярного поля $u = f(M)$ в точке $M \in G$ называется вектор, обозначаемый символом $grad(u)$, координатами которого в прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ являются значения частных производных функции поля $u = f(M)$ вычисленных в точке M .

$$grad(u) = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}. \quad (22)$$

С производной по направлению ненулевого вектора $\vec{l}$ градиент связан соотношением

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = (grad(u), \vec{l}_0), \quad (23)$$

где $\vec{l}_0 = \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}$ единичный вектор по направлению $\vec{l}$.

Свойства градиента. Пусть заданы скалярные поля, которые определяются дифференцируемыми функциями $u = f(x, y, z)$ и $v = g(x, y, z)$. Тогда для градиентов суммы, произведения, частного данных функций справедливы равенства:

1. $grad(u + v) = grad(u) + grad(v)$;
2. $grad(Cu) = C \cdot grad(u)$;
3. $grad(u \cdot v) = v \cdot grad(u) + u \cdot grad(v)$;
4. $grad\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot grad(u) - u \cdot grad(v)}{v^2}, \quad (v \neq 0).$

Физические и геометрические свойства градиента.

1. Градиент в каждой точке направлен по нормали к поверхности уровня (или к линии уровня, если поле плоское) в этой точке.
2. Градиент в каждой точке направлен в сторону наибо́льшего возрастания скалярного поля в этой точке.

3. Модуль градиента равен наибольшему значению производной по направлению в данной точке поля:

$$|grad(u)| = \max \left| \frac{\partial u}{\partial l} \right|_M = \sqrt{\left(\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M \right)^2 + \left(\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|_M \right)^2 + \left(\left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|_M \right)^2}. \quad (24)$$

Из перечисленных свойств следует, что вектор $gradU(M)$ указывает направление и определяет величину наибольшего изменения скалярного поля в данной точке M .

Пример 8.3. Найти градиент скалярного поля

$$u = x^2 - 2xy + 3z^2$$

в точке $M_0(-1;1;2)$.

Решение. Запишем согласно (22) формулу градиента:

$$grad(u) = \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M \vec{i} + \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|_M \vec{j} + \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|_M \vec{k}.$$

Вычислим частные производные в точке M_0 :

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0} = (2 - y)|_{M_0} = 1; \quad \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0} = 2x|_{M_0} = -2; \quad \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_0} = 2z|_{M_0} = 4.$$

Окончательно имеем: $grad(u) = \vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$.

Пример 8.4. Найти единичный вектор нормали к поверхности уровня скалярного поля $u = x^2 + y^2 + z^2$.

Решение. Поверхности уровня данного скалярного поля – сферы:

$$x^2 + y^2 + z^2 = C \quad (C \geq 0).$$

Найдем градиент скалярного поля $u = f(M)$ в точке $M \in G$:

$$grad(u) = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}.$$

Так как градиент направлен по нормали к поверхности уровня в точке $M(x, y, z)$, то для единичного вектора нормали получим выражение:

$$\vec{n} = \frac{gradU(M)}{|gradU(M)|} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|},$$

где $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ – радиус-вектор точки $M(x, y, z)$.

Заметим, что это выражение можно сразу получить из геометрических соображений.

Упражнения

Задание 1. Найти производную скалярного поля $u(x, y, z)$ в точке M по направлению нормали к поверхности S , образующей острый угол с положительным направлением оси Oz .

$u = 4 \ln(3 + x^2) - 8xyz,$ $S : x^2 - 2y^2 + 2z^2 = 1,$ $M(1, 1, 1)$	$u = x\sqrt{y} + y\sqrt{z},$ $S : 2x^2 - y^2 + 4z^2 = 0,$ $M(2, 4, 4)$
$U = x\sqrt{y} - yz^2$ $S : x^2 + y^2 = 4z,$ $M(2, 1, -1)$	$S : z = x^2 - y^2$ $U = \sqrt{xy} - \sqrt{4 - z^2},$ $M(1, 1, 0)$

Задание 2. Найти производную скалярного поля $u(x, y, z)$ в точке M по направлению вектора $\vec{l}$.

$u = xy - \frac{x}{y},$ $\vec{l} = 5\vec{i} + \vec{j} - \vec{k},$ $M(-4, 3, -1)$	$u = \ln(x + \sqrt{z^2 + y^2}),$ $\vec{l} = -2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k},$ $M(1, -3, 4)$
$u = x^2 - \arctg(y + z),$ $\vec{l} = 3\vec{j} - 4\vec{k},$ $M(2, 1, 1)$	$\vec{l} = (1, -2, 1)$ $u = x^2 + y^2 - z^2$ $M_0(-3, -2, 5)$
$u = \sqrt{2y^2 + 9z^2},$ $M_0(3, -2)$ $\vec{l} = (4, 5)$	$u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}},$ $M_0(1, 1, 1)$ $\vec{l} = (-2, -3, 4)$

Задание 3. Найти угол между градиентами скалярных полей $v(x, y, z)$ и $u(x, y, z)$ в заданной точке M .

$v = \frac{4\sqrt{6}}{x} + \frac{\sqrt{6}^3}{9y} + \frac{3}{z}, \quad u = x^2 y z^3, \quad M\left(2, \frac{1}{3}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$
$v = 9\sqrt{2}x^3 - \frac{y^3}{2\sqrt{2}} - \frac{4z^3}{\sqrt{3}}, \quad u = \frac{z^3}{xy^2}, \quad M\left(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$
$v = \frac{3}{x} + \frac{4}{y} - \frac{1}{\sqrt{6}z}, \quad u = \frac{z}{x^3 y^2}, \quad M\left(1, 2, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$
$v = x^2 - y^2 - 3z^2, \quad u = \frac{x}{yz^2}, \quad M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

9. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ

Функция $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ или $u = f(M)$ имеет *максимум (минимум)* в точке $P(x_{p1}, x_{p2}, \dots, x_{pn})$, если существует такая окрестность этой точки, для каждой точке M которой выполняется неравенство

$$f(p) > f(M) \text{ (соответственно } f(p) < f(M) \text{)}.$$

Максимум и минимум функции называются ее *экстремумами*.

Необходимое условие экстремума. Если дифференцируемая функция $u = f(M)$ достигает экстремума в точке P , то все частные производные равны нулю в этой точке:

$$f'_{x1}(P) = f'_{x2}(P) = \dots = f'_{xn}(P) = 0 \quad (25)$$

(25) – необходимое условие экстремума функции.

Точки, в которых выполняется условие (25), называются *стационарными*.

Таким образом, если P – точка экстремума функции $u = f(M)$, то либо P – стационарная точка, либо в этой точке функция не является дифференцируемой.

Достаточное условие экстремума. Пусть $P(x_{p1}, x_{p2}, \dots, x_{pn})$ – стационарная точка функции $u = f(M)$, причем эта функция дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки P и все ее вторые частные производные непрерывны в точке P . Тогда:

1) если второй дифференциал d^2u имеет постоянный знак при любом наборе приращений $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ в точке P , не равных одновременно нулю, то функция $u = f(M)$ имеет в точке P экстремум, а именно:

при $d^2u < 0$ функция имеет максимум;

при $d^2u > 0$ функция имеет минимум;

2) если второй дифференциал d^2u принимает как отрицательные, так и положительные значения, то точка P не является точкой экстремума;

3) если существуют такие наборы приращений $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$, при которых $d^2u = 0$, то точка P может быть точкой экстремума, а может и не быть ею. В этом случае требуется дополнительное исследование.

В частном случае, для функции двух переменных, достаточные условия экстремума можно сформулировать следующим образом

Пусть $P(x_p, y_p)$ – стационарная точка функции $z = f(x, y)$, причем эта функция дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки P и все ее вторые производные непрерывны в этой точке. Введем обозначения:

$$A = z''_{xx}(P), \quad B = z''_{xy}(P), \quad C = z''_{yy}(P)$$

и дискриминант D равен:

$$D = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Тогда:

1) если $D > 0$, то функция $z = f(x, y)$ имеет в точке P экстремум. А именно, при $A < 0$ ($C < 0$) имеет максимум, а при $A > 0$ ($C > 0$) – минимум;

2) если $D < 0$, то в точке P нет экстремума;

3) если $D = 0$, то требуется дополнительное исследование.

Пример 9.1. Исследовать функцию $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$ на экстремум.

Решение. Найдем частные производные первого порядка и приравняем их нулю:

$$z'_x = (2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2)'_x = 6x^2 - y^2 + 10x,$$

$$z'_y = (2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2)'_y = -2xy + 2y.$$

Получим систему уравнений и решим ее:

$$\begin{cases} 6x^2 - y^2 + 10x = 0, \\ -2xy + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x^2 - y^2 + 10x = 0 \\ y(-x + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0, \\ 6x^2 - y^2 + 10x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 6x^2 - y^2 + 10x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0, \\ x = 0, \\ y = 0, \\ x = -5/3, \\ x = 1, \\ y = 4, \\ x = 1, \\ y = -4. \end{cases}$$

Получили четыре стационарные точки:

$$P_1(0, 0), \quad P_2(-5/3, 0), \quad P_3(1, 4), \quad P_4(1, -4).$$

Найдем частные производные второго порядка:

$$z''_{xx} = 12x + 10, \quad z''_{xy} = -2y, \quad z''_{yy} = -2x + 2.$$

Составим дискриминант для каждой из стационарных точек.

$$A = z''_{xx}(P_1) = 12x + 10 \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 10, \quad B = z''_{xy}(P_1) = -2y \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 0,$$

$$C = z''_{yy}(P_1) = -2x + 2 \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 2, \quad D_1 = AC - B^2 = 20 > 0$$

следовательно P_1 – точка минимума ($A > 0$).

Аналогично дискриминант в каждой из точек

$$P_2(0, -5/3), \quad P_3(-1, 2), \quad P_4(-1, -2).$$

$$D_2 = -10 \cdot \frac{16}{3} - 0 < 0 \Rightarrow P_2 \text{ – не является экстремальной точкой.}$$

$$D_3 = 22 \cdot 0 - 64 < 0 \Rightarrow P_2 \text{ – не является экстремальной точкой.}$$

$$D_4 = 22 \cdot 0 - 64 = -42 < 0 \Rightarrow P_2 \text{ – не является экстремальной точкой.}$$

Ответ. $P_1(0,0)$ – точка минимума функции.

Упражнение

Исследовать функцию на экстремум.

$z = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 14y$	.	$z = x^2 + y^2 + xy - 3x - 6y$
$z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y$	.	$z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$
$z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$	.	$z = e^{x/2}(x + y)^2$
$z = \frac{1}{2}xy + (47 - x - y)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right)$	.	$z = x^3 + y^3 - 15xy$

10. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

Задача условного экстремума функции $z = f(x, y)$ состоит в том, чтобы на некоторой заданной линии L найти такую точку $P(x, y)$, в которой значение функции $z = f(x, y)$ было наибольшим или наименьшим. Такие точки называются точками условного экстремума функции $z = f(x, y)$ на линии L , заданной уравнением связи $\varphi(x, y) = 0$.

Ясно, что точка обычного экстремума является точкой условного экстремума, обратное, вообще говоря, неверно.

Пусть задана функция $z = f(x, y)$ и уравнение связи $\varphi(x, y) = 0$, из которого выразим $y = \psi(x)$ и получим функцию одной переменной $z = f(x, \psi(x))$, которую исследуем на экстремум.

Если уравнение связи задано параметрически $y = y(t), x = x(t)$, перейдем к функции от одной переменной $z = f(x(t), y(t))$.

Рассмотрим случай, когда уравнение связи более сложное и y явно не выражается из уравнения связи $\varphi(x, y) = 0$.

Полный дифференциал данной функции $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$ разделим на dx , получим полную производную

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx} = f'_x - f'_y \frac{\varphi'_y}{\varphi'_x},$$

т.к. $y'_x = -\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}$ как производная неявной функции.

В точке условного экстремума полная производная равна нулю:

$$f'_x - f'_y \frac{\varphi'_y}{\varphi'_x} = 0 \Rightarrow \frac{f'_x}{f'_y} = \frac{\varphi'_y}{\varphi'_x} = -\lambda,$$

откуда получаем систему
$$\begin{cases} f'_x + \lambda \varphi'_x = 0, \\ f'_y + \lambda \varphi'_y = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

Систему легко запомнить, если составить вспомогательную функцию $\Phi(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$, называемую функцией Лагранжа, λ – множитель Лагранжа. Тогда

$$\begin{cases} \Phi'_x = f'_x + \lambda \varphi'_x = 0, \\ \Phi'_y = f'_y + \lambda \varphi'_y = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

Решив полученную систему, найдем точку $P(x, y)$ условного экстремума. При этом, если второй дифференциал функции Лагранжа <0 , то $P(x, y)$ точка максимума; если же >0 , то минимум.

Можно составить определитель $\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & \Phi''_{xx} & \Phi''_{xy} \\ \varphi'_y & \Phi''_{xy} & \Phi''_{yy} \end{vmatrix}.$

Если значение определителя Δ в точке условного экстремума <0 , то имеем условный максимум, если же >0 , то – минимум.

Пример 10.1. Найти условный экстремум функции $z = x + 2y$ при $x^2 + y^2 = 5$.

Решение. Уравнение связи $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 5$. Составим функцию Лагранжа $\Phi(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5)$. Имеем:

$$\begin{cases} f'_x + \lambda\varphi'_x = 0, \\ f'_y + \lambda\varphi'_y = 0, \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \lambda \cdot 2x = 0, \\ 2 + \lambda \cdot 2y = 0, \\ x^2 + y^2 - 5 = 0. \end{cases}$$

Решением системы являются две тройки чисел:

$$x_1 = -1, \quad y_1 = -2, \quad \lambda_1 = \frac{1}{2}; \quad x_2 = 1, \quad y_2 = 2, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2},$$

которым соответствуют две функции Лагранжа:

$$\Phi_1(x, y, \lambda) = x + 2y + \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 5),$$

$$\Phi_2(x, y, \lambda) = x + 2y - \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 5).$$

Получили две точки $P_1(-1; -2)$; $P_2(1; 2)$.

Для $P_1(-1; -2)$; $\lambda = \frac{1}{2}$ имеем:

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 5 \Rightarrow \varphi'_x = 2x, \quad \varphi'_y = 2y, \quad \varphi'_x(P_1) = -2, \quad \varphi'_y(P_1) = -4,$$

$$\Phi_{xx}(P_1) = 1, \quad \Phi_{xy}(P_1) = 0, \quad \Phi_{yy}(P_1) = 1,$$

$$\Delta_{P_1} = - \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & \Phi_{xx} & \Phi_{xy} \\ \varphi'_y & \Phi_{xy} & \Phi_{yy} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 20 > 0, \text{ следовательно, } P_1(-1; -2) - \text{точка}$$

условного минимума. $z = x^2 + y^2$.

$$\text{Для } P_2(1; 2); \lambda = -\frac{1}{2} \text{ имеем: } \Delta_{P_2} = - \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -20 < 0, \quad \text{значит,}$$

$P_2(1; 2)$ – точка условного максимума.

Упражнения

Исследовать функцию на условный экстремум.

·	$z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$ при $x + y + 3 = 0$	·	$z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ при $x + y = 2$
	$z = \frac{x - y - 4}{\sqrt{2}}$ при $x^2 + y^2 = 1$		$z = xy$ при $2x + 3y = 5$
·	$z = 2x + y$ при $x^2 + y^2 = 1$	·	$z = xy^2$ при $x + 2y = 1$
·	$z = x^2 + y^2$ при $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 3$	·	$z = x^2 + y^2$ в круге $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 \leq 9$

11. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ

Пусть функция $z = f(x, y)$ задана и непрерывна в некоторой области S , ограниченной замкнутым контуром K . Тогда своего наибольшего (наименьшего) значения эта функция достигает либо на границе K области, либо в экстремальной точке, принадлежащей области S . Рассмотрим на примере.

Пример 10.1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$$

в замкнутой области, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 4$.

Решение. Область D , ограниченная данными линиями, изображена на рисунке:

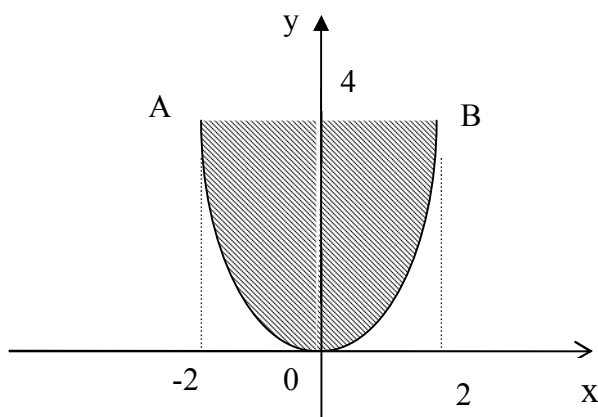


Рис.

Точки пересечения линий: $A(-2,4)$ и $B(2,4)$.

Точки, в которых функция принимает наибольшее и наименьшее значения, находятся среди стационарных точек внутри области и точек границы области.

1. Найдем стационарные точки функции, лежащие внутри заданной области.

Для этого найдем частные производные

$$z'_x = 6x^2 + 8x - 2y, \quad z'_y = 2y - 2x$$

и решим систему уравнений
$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 + 8x - 2y = 0, \\ 2x - 2y = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ y = -1. \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Из найденных нами точек $(-1,-1)$ и $(0,0)$ первая лежит вне области, а вторая – на ее границе.

2. Найдем наибольшее и наименьшее значения функции на границе заданной области. Граница состоит из участков AOB параболы и AB прямой.

На участке AOB имеем $y = x^2$, поэтому $z = x^4 + 4x^2, x \in [-2,2]$.

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции

$$z = x^4 + 4x^2 \text{ на } x \in [-2,2]$$

следует вычислить значения функции z в точках $x = -2$ и $x = 2$ и стационарных точках функции, лежащих внутри отрезка $[-2,2]$.

Имеем: $z(-2) = z(2) = 32$.

Стационарные точки функции определяются уравнением $z' = 0$.

Так как $z' = 4x^3 + 8x$, то $z' = 0$ при $x = 0$.

Так как $0 \in [-2,2]$, находим значение функции z при $x = 0$: $z(0) = 0$.

На участке AB границы имеем:

$$y = 4, \quad z = 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16, \quad x \in [-2,2].$$

Решая уравнение $z' = 0$, получаем

$$6x^2 + 8x - 8 = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = \frac{2}{3}.$$

Так как $\frac{2}{3} \in [-2, 2]$, находим: $z\left(\frac{2}{3}\right) = 16\frac{22}{27}$.

Сравнивая значения z на участках AOB и AB , получаем, что наибольшее значение заданной функции равно 32, а наименьшее значение z равно 0. И эти значения достигаются в граничных точках $(-2, 4)$, $(2, 4)$ и $(0, 0)$. Итак,

$$\max_D z = z(-2, 4) = z(2, 4) = 32, \min_D z = z(0, 0) = 0.$$

Упражнение 13

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x, y)$ в области D , ограниченной заданными линиями.

$z = x^2 + 2xy + 4x - y^2,$ $D : x + y + 2 = 0, x = 0, y = 0$	$z = 4 - 2x^2 - y^2,$ $D : y = 0, y = \sqrt{1 - x^2}$
$z = 4 - 3xy + 5x^2 + y^2,$ $D : x = -1, x = 1, y = -1, y = 1$	$z = x^3 + y^3 - 3xy,$ $D : 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 2$
$z = x^2 - xy + y^2 - 4x,$ $D : 2x + 3y - 12 = 0, y = 0, x = 0.$	$z = x^2 + 3y^2 + x - y,$ $D : x + y = 1, y = 1, x = 1$
$z = xy,$ $D : x^2 + y^2 \leq 1$	$z = 1 - x^2 - y^2,$ $D : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 1$

12. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

1. Определение функции нескольких переменных. Примеры.
2. Линии и поверхности уровня функции нескольких переменных.
3. Область определения функций нескольких переменных.

4. Предел функции нескольких переменных.
5. Понятие непрерывности функций нескольких переменных.
6. Частное и полное приращение функций нескольких переменных.
7. Частные производные, их обозначение и правила нахождения.
8. Частные производные высших порядков, их обозначение.
9. Полный дифференциал функций нескольких переменных.
10. Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям.
11. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Их уравнения.
12. Нахождение частных производных сложных функций и функций, заданных неявно.
13. Производная по направлению, ее вычисление.
14. Градиент скалярного поля, связь градиента и производной по направлению.
15. Экстремум функции нескольких переменных. Необходимое и достаточное условия существования экстремума.
16. способ отыскания наибольшего и наименьшего значений функции двух переменных в ограниченной области.
17. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.

13. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задание 1. Найти и изобразить в плоскости XOY область определения функции

	$z = \frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}$		$z = \sqrt{(x-y)(y+2x-4)}$
	$z = \frac{1}{x} + \ln(4x - y^2 + 8)$		$z = \frac{1}{x-y} + \frac{\ln y}{\sqrt{2x+3y}}$
	$z = \frac{3 - \sqrt{xy}}{y - x^3}$		$z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}} + \frac{x-1}{x^2 + y^2 - 4}$
	$z = \frac{2x-y}{\ln(1-x^2+y)}$		$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 9} + \ln\left(1 - \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9}\right)$
	$z = \frac{\ln x + \sqrt{y}}{y - x^2}$		$z = \sqrt{3y} + \frac{x}{\sqrt{1-x-y}}$
	$z = 2 - \arccos(1-x-y)$		$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} - \ln(9 - x^2 - y^2)$
	$z = \sqrt{y-x^2} + \frac{xy}{y-2}$		$z = \ln \frac{x}{y} + \frac{x+y}{y-x^3}$
	$z = \sqrt{(x+y)(y-2)}$		$z = 3x + \arcsin(2x-y)$
	$z = \sqrt{e^{xy}(x-y^2)}$		$z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$
	$z = \frac{\ln((x-1)(y+2))}{x-y}$		$z = \sqrt{-4x^2 - 9y^2 + 16x + 18y + 11}$
	$z = \arcsin \frac{x-y}{2} + \frac{1}{xy}$		$z = \sqrt{9 - 9x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$
	$z = \sqrt{y-x} - 3 \ln \frac{x^2}{y}$		$z = \ln(x^2 + 4y^2 - 2x - 8y - 1)$

$z = \frac{\sqrt{4y - x^2 - y^2}}{x^2 + y^2 - 2y}$	$z = \ln((1-x)(y-2)) + \frac{1}{x+1}$
--	---------------------------------------

Задание 2. Найти частные производные и полный дифференциал функции.

$z = \ln(y^2 - e^{-x})$	$z = \arcsin \sqrt{xy}$
$z = \operatorname{arctg}(x^2 + y^2)$	$z = \cos(x^3 - 2xy)$
$z = \sin \sqrt{\frac{y}{x^3}}$	$z = \operatorname{tg}(x^3 + y^2)$
$z = \operatorname{ctg} \sqrt{xy^3}$	$z = e^{-x^2 + y^2}$
$z = \ln(3x^2 - y^4)$	$z = \operatorname{arctg}(xy^2)$
$z = \cos \sqrt{x^2 + y^2}$	$z = \arccos\left(\frac{y}{x}\right)$
$z = \sin \sqrt{x - y^3}$	$z = \operatorname{tg}(x^3 \cdot y^4)$
$z = \operatorname{ctg}(3x^2 - 2\sqrt{y})$	$z = \ln(\sqrt{xy} - 1)$
$z = e^{2x^2 - y^5}$	$z = \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{y^3}\right)$
$z = \arcsin(2x^3 y)$	$z = \cos(x - \sqrt{xy^3})$
$z = \sin \frac{x+y}{x-y}$	$z = \operatorname{tg} \frac{2x - y^3}{x}$
$z = \operatorname{ctg} \sqrt{\frac{x}{x-y}}$	$z = e^{-\sqrt{x^2 + y^2}}$
$z = \ln(3x^2 - y^2)$	$z = \arccos(x - y^2)$

Задание 3. Вычислить значения частных производных функции в заданной точке.

	$f(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}}, \quad M_0(1, 0, 1)$
	$f(x, y, z) = \ln \cos(x^2 y^2 + z), \quad M_0(0, 0, \pi/4)$
	$f(x, y, z) = \sqrt{x + y^2 + z^3}, \quad M_0(3, 4, 2)$
	$f(x, y, z) = \arctg(x \cdot y^2 + z), \quad M_0(2, 1, 0)$
	$f(x, y, z) = \sqrt{z} \sin \frac{y}{x}, \quad M_0(2, 0, 4)$
	$f(x, y, z) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + z^2}}, \quad M_0(-1, 1, 0)$
	$f(x, y, z) = \arcsin\left(\frac{x^2}{y} - z\right), \quad M_0(2, 5, 0)$
	$f(x, y, z) = \arctg \frac{xz}{y^2}, \quad M_0(2, 1, 1)$
	$f(x, y, z) = \ln \sin\left(x - 2y + \frac{z}{4}\right), \quad M_0(1, 1/2, \pi)$
	$f(x, y, z) = \frac{y}{x} + \frac{z}{y} - \frac{x}{z}, \quad M_0(1, 1, 2)$
	$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - z^2}}, \quad M_0(1, 2, 2)$
	$f(x, y, z) = \ln(x + y^2) - \sqrt{x^2 y^2}, \quad M_0(5, 2, 3)$
	$f(x, y, z) = \sqrt{z} \cdot x^y, \quad M_0(1, 2, 4)$
	$f(x, y, z) = \frac{-z}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad M_0(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})$
	$f(x, y, z) = \ln(x^3 + \sqrt[3]{y} - z), \quad M_0(2, 1, 8)$

	$f(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{x^4 + y^2}}, M_0(2, 3, 25)$
	$f(x, y, z) = 8\sqrt[5]{x^3 + y^2 + z}, M_0(3, 2, 1)$
	$f(x, y, z) = \ln(\sqrt[5]{x} + \sqrt[4]{y} - z), M_0(1, 1, 1)$
	$f(x, y, z) = \frac{-2x}{\sqrt{y^2 + z^2}}, M_0(3, 0, 1)$
	$f(x, y, z) = z \cdot e^{-(x^2 + y^2)/2}, M_0(0, 0, 1)$
	$f(x, y, z) = \frac{\sin(x - y)}{z}, M_0(\pi/2, \pi/3, \sqrt{3})$
	$f(x, y, z) = \sqrt{z} \cdot \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y}), M_0(4, 1, 4)$
	$f(x, y, z) = \frac{xz}{x - y}, M_0(3, 1, 1)$
	$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos z}, M_0(3, 4, \pi/2)$
	$f(x, y, z) = z \cdot e^{-xy}, M_0(0, 1, 1)$
	$f(x, y, z) = \arcsin(x\sqrt{y} - yz^2), M_0(0, 4, 1)$

Задание 4. Вычислить приближенно при помощи полного

дифференциала (считать $1^\circ = \frac{\pi}{180} \approx 0,017$; $\frac{\pi}{2} \approx 1,57$).

	$\sqrt{1,04^2 + \ln(1,02)}$		$\sqrt{0,98^2 + 2,02^2}$
	$\sqrt{1,04^4 + 1,98^3}$		$\sin 28^\circ \cdot \operatorname{tg} 44^\circ$
	$\sqrt{5e^{0,02} + 11 \cdot 1,97^2}$		$\ln(1,02^3 - 0,03^2)$
	$4 + 3 \cdot 0,89^{2,02}$		$3 + 3 \cdot 0,98^{1,05}$
	$\sqrt{\cos 1,55 + 3,98^2}$		$\sqrt{4,05^2 + 2,96^2}$
	$\sqrt{11,97 + 2,02^2}$		$\ln(0,97^2 - 0,08^3)$

	$\sqrt{1,05^3 + 1,97^3}$		$6,03^3 \cdot \sin 29^\circ$
	$\sqrt{\sin^2 1,55 + 8e^{0,02}}$		$\sqrt[3]{2,01^3 + 117,1}$
	$\operatorname{arctg} \frac{1,04}{0,92}$		$\cos 61^\circ - 2\operatorname{tg} 44^\circ$
	$1,02^3 \cdot 0,97^2$		$\ln(0,09^3 + 0,99^3)$
	$\sqrt[3]{1,09^5 + 7,05}$		$3 - 2,03^2 \cdot 3,98^3$
	$\cos 59^\circ \cdot \operatorname{tg} 46^\circ$		$3,03^{2,02} - 4$
	$0,96^2 \cdot 1,02^3$		$\sqrt{0,97^2 + 2,04^3}$

Задание 5. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке M .

	$5(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + yz + zx) - 9 = 0, \quad M(1, 1, 1)$
	$(x + y - z)^2 - 3y + 2x - z - 13 = 0, \quad M(1, 2, -1)$
	$(x + 2y)^2 - (x + 4y - 2z) = 0, \quad M(-1, 2, -1)$
	$z^3 + 3x^2z + xz + y^2z^2 + y - 2x - 20 = 0, \quad M(-1, 2, -2)$
	$z^3 + x^2 - y^2 - 2x + yz - 8 = 0, \quad M(3, -1, 2)$
	$z \ln(x + z) - \frac{xy}{z} = 2, \quad M(-2, 3, 3)$
	$3x^2 - y^2 + \sqrt{x + z} + 3y - 5z + 2 = 0, \quad M(4, -4, 5)$
	$z^3 + x^3 + y^3 - 3xyz + 2x - 3y - 30 = 0, \quad M(2, 2, -2)$
	$z^2 - x^2 - y^2 - z + 3x - 5y - 12 = 0, \quad M(1, -1, 3)$
	$xz - xy + yz + 2x - 3y + 2z = 0, \quad M(1, -2, -10)$
	$z^2 + xy - yz - 3 = 0, \quad M(-1, -2, -3)$
	$xz^2 - x^2y + y^2z^2 + 2x - y - 10 = 0, \quad M(1, 2, 2)$

	$z = x^2 - xy^2 - 2x + 3y, \quad M(2, -1, -5)$
	$z^3 + 3x^2y + 2xz + yz + y - 2x + 2 = 0, \quad M(1, -2, 2)$
	$z = x^2y - xy^3 - 2x + xy - y, \quad M(1, -1, -2)$
	$xyz - 2(x^2 + y^2 + z^2) + 5 = 0, \quad M(1, -1, -1)$
	$(x + 2y - z)^2 - xz = 0, \quad M(2, 1, 2)$
	$x \ln y - z \ln y + 2y \ln x + 2x - 2z = 0, \quad M(1, 1, 1)$
	$xyz = x + 2y - 3z^2 + 21, \quad M(-1, -2, 2)$
	$z^2 \ln x - x^2 \ln z + y^2 xz - 4 = 0, \quad M(1, 2, 1)$
	$5z^2 + x^2 + y^2 + 6xz - 6yz - 6xy - 25 = 0, \quad M(1, -1, 1)$
	$(x-1)^2 + (y+z)^2 - (1-z)^2 + xy + yz = 0, \quad M(1, -1, -1)$
	$-2(x+2)^2 - (y+1)^2 + 4(z-1)^2 + x^2 - y^2 + z^2 = 0,$ $M(-1, -1, 1)$
	$xyz + \frac{x^2}{2} - 3y + 2z - \frac{y^2}{2} - 3 = 0, \quad M(-1, 1, 2)$
	$x^2y + xz^2 - y^2z - 2x + 3y - 5z + 10 = 0, \quad M(1, 1, 2)$
	$(x + 2y - z)^2 + (y + 2z)^2 + 24 = 0, \quad M(1, 2, 2)$

Задание 6. Вычислить значение производной сложной функции

$u = u(x, y)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$ при $t = t_0$

	$u = x^2 e^y, \quad x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad t_0 = \pi$
	$u = \ln(e^x + e^y), \quad x = t^2, \quad y = t^3, \quad t_0 = 1$
	$u = x^y, \quad x = e^t, \quad y = \ln t, \quad t_0 = 1$
	$u = e^{y-2x}, \quad x = \sin t, \quad y = t^3, \quad t_0 = 0$
	$u = x^2 e^y, \quad x = \sin t, \quad y = \sin^2 t, \quad t_0 = \pi/2$

	$u = \ln(e^{-x} + e^y), \quad x = t^2, \quad y = t^3, \quad t_0 = -1$
	$u = e^{y-2x-1}, \quad x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad t_0 = \pi/2$
	$u = \arcsin \frac{x}{y}, \quad x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad t_0 = \pi$
	$u = \arccos \frac{2x}{y}, \quad x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad t_0 = \pi$
	$u = \frac{x^2}{y+1}, \quad x = 1-2t, \quad y = \arctgt, \quad t_0 = 0$
	$u = \frac{x}{y}, \quad x = e^t, \quad y = 2-e^{2t}, \quad t_0 = 0$
	$u = \ln(e^{-x} + e^{-2y}), \quad x = \ln t, \quad y = t^3, \quad t_0 = 1$
	$u = \sqrt{x+y^2+3}, \quad x = \ln t, \quad y = t^2, \quad t_0 = 1$
	$u = \arcsin \frac{x^2}{y}, \quad x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad t_0 = \pi$
	$u = \frac{x^2}{y}, \quad x = 1-2t, \quad y = 1+\arctgt, \quad t_0 = 0$
	$u = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}, \quad x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad t_0 = \pi/4$
	$u = \sqrt{x^2 + y + 3}, \quad x = \ln t, \quad y = t^2, \quad t_0 = 1$
	$u = \arcsin \frac{x}{2y}, \quad x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad t_0 = \pi$
	$u = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}, \quad x = \sin 2t, \quad y = \operatorname{tg}^2 t, \quad t_0 = \pi/4$
	$u = \sqrt{x+y+3}, \quad x = \ln t, \quad y = t^2, \quad t_0 = 1$
	$u = \frac{y}{x}, \quad x = e^t, \quad y = 1-e^{2t}, \quad t_0 = 0$

	$u = \arcsin \frac{2x}{y}, \quad x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad t_0 = \pi$
	$u = \ln(e^{2x} + e^y), \quad x = t^2, \quad y = t^4, \quad t_0 = 1$
	$u = \operatorname{arctg}(x + y), \quad x = t^2 + 2, \quad y = 4 - t^2, \quad t_0 = 1$
	$u = \sqrt{x^2 + y^2 + 3}, \quad x = \ln t, \quad y = t^3, \quad t_0 = 1$
	$u = \operatorname{arctg}(xy), \quad x = t + 3, \quad y = e^t, \quad t_0 = 0$

Задание 7. Вычислить значения частных производных функций $z(x, y)$, заданных неявно, в данной точке $M(x, y, z)$.

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4,$ $M(2, 1, 1)$	$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = \frac{3}{2}$ $M(\pi/4, 3\pi/4, \pi/4)$
$z^3 + 3xyz + 3y = 7,$ $M(1, 1, 1)$	$e^{z-1} - \cos^2 x + \cos^2 y = -1$ $M(0, \pi/2, 1)$
$x^2 + y^2 + z^2 - 6x = 0,$ $M(1, 2, 1)$	$xy = z^2 - 1,$ $M(0, 1, -1)$
$x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 2,$ $M(1, 1, 1)$	$x^2 + y^2 + z^2 + 2xz = 5,$ $M(0, 2, 1)$
$x \cos y + y \cos z + z \cos x =$ $= \pi/2, \quad M(0, \pi/2, \pi)$	$3x^2 y^2 + 2xyz^2 - 2x^3 z +$ $+ 4y^3 z = 4, \quad M(2, 1, 2)$
$x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z +$ $+ 2 = 0, \quad M(1, 1, 1)$	$x + y + z + 2 = xyz,$ $M(2, -1, -1)$
$x^2 + y^2 + z^2 - 2xz = 2,$ $M(0, 1, -1)$	$e^z - xyz - x + 1 = 0,$ $M(2, 1, 0)$

$x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y = 15, \quad M(1, -1, 2)$	$x^2 - 2xy - 3y^2 + 6x - 2y + z^2 - 8z + 20 = 0, \quad M(0, -2, 2)$
$x^2 + y^2 + z^2 - y + z = 3, \quad M(1, 2, 0)$	$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - yz - 4x - 3y - z = 0, \quad M(1, -1, 1)$
$x^2 - y^2 - z^2 + 2x - 4y + 6z + 12 = 0, \quad M(0, 1, -1)$	$\sqrt{x^2 + y^2} + z^2 - 3z = 3, \quad M(4, 3, 1)$
$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 59, \quad M(3, 1, 4)$	$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2xz = 17, \quad M(-2, -1, 2)$
$x^3 - z^3 - 3xyz = 27, \quad M(3, 1, 3)$	$\ln z = x + 2y - z + \ln 3, \quad M(1, 1, 3)$
$2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z + 6 = 0, \quad M(2, 1, 1)$	$z^2 = xy - z - x^2 - 4, \quad M(2, 1, 1)$

Задание 8. Найти производную скалярного поля $u(x, y, z)$ в точке M по направлению нормали к поверхности S , образующей острый угол с положительным направлением оси Oz .

$u = -2\ln(x^2 - 5) - 4xyz, \quad S: x^2 + 2y^2 - 2z^2 = 1, \quad M(1, 1, 1)$	$u = \frac{x^2 y}{4} - \sqrt{x^2 + 5z^2}, \quad S: z^2 = x^2 + 4y^2 - 4, \quad M\left(-2, \frac{1}{2}, 1\right)$
$u = 7\ln\left(\frac{1}{13} + x^2\right) - 4xyz, \quad S: 7x^2 - 4y^2 + 4z^2 = 7, \quad M(2, 2, 1)$	$u = \arctg \frac{y}{x} - 8xyz, \quad S: x^2 + y^2 - 2z^2 = 10, \quad M(2, 2, -1)$

$u = xz^2 - \sqrt{x^3 y},$ $S: x^2 - y^2 - 3z + 12 = 0,$ $M(2, 2, 4)$	$u = x\sqrt{y} - yz^2,$ $S: x^2 + y^2 = 4z,$ $M(2, 1, -1)$
$u = \ln(1 + x^2) - xy\sqrt{z},$ $S: x^2 - y^2 + z^2 = 16,$ $M(1, -2, 4)$	$u = \sqrt{x^2 + y^2} - z,$ $S: x^2 + y^2 = 24z,$ $M(3, 4, 1)$
$u = x\sqrt{y} - (z + y)\sqrt{x},$ $S: x^2 - y^2 + z^2 = 4,$ $M(1, 1, -2)$	$u = \sqrt{xy} - \sqrt{4 - z^2},$ $S: z = x^2 - y^2,$ $M(1, 1, 0)$
$u = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2},$ $S: 2x^2 - y^2 + z^2 - 1 = 0,$ $M(1, -3, 4)$	$u = \ln(1 + x^2 + y^2) - \sqrt{x^2 + z^2},$ $S: x^2 - 6x + 9y^2 + z^2 =$ $4z + 4, \quad M(3, 0, 4)$

Найти производную скалярного поля $u(x, y, z)$ в точке M по направлению вектора $\vec{l}$

$u = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2},$ $\vec{l} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k},$ $M(1, 1, 1)$	$u = x + \ln(x^2 + y^2),$ $\vec{l} = -2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k},$ $M(2, 1, 1)$
$u = x^2 y - \sqrt{xy + z^2},$ $\vec{l} = 2\vec{j} - 2\vec{k},$ $M(1, 5, -2)$	$u = y \ln(x^2 + 1) - \operatorname{arctg} z,$ $\vec{l} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k},$ $M(0, 1, 1)$
$u = x(\ln y - \operatorname{arctg} z),$ $\vec{l} = 8\vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k},$ $M(-2, 1, -1)$	$u = \ln(3 - x^2) + xy^2 z,$ $\vec{l} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k},$ $M(1, 3, 2)$
$u = \sin(x + 2y) + \sqrt{xyz},$ $\vec{l} = 4\vec{i} + 3\vec{j},$ $M\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 3\right)$	$u = x^2 y^2 z - \ln(z - 1),$ $\vec{l} = 5\vec{i} - 6\vec{j} + 2\sqrt{5}\vec{k},$ $M(1, 1, 2)$

$u = x^3 - \sqrt{y^2 + z^2},$ $\vec{l} = \vec{j} - \vec{k},$ $M(1, -3, 4)$	$u = \frac{\sqrt{x}}{y} - \frac{yz}{x + \sqrt{y}},$ $\vec{l} = 2\vec{i} + \vec{k},$ $M(4, 1, -2)$
$u = \sqrt{xy} + \sqrt{9 - z^2},$ $\vec{l} = -2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k},$ $M(1, 1, 0)$	$u = 2\sqrt{x+y} + y \cdot \arctg z,$ $\vec{l} = 4\vec{i} - 3\vec{k},$ $M(3, 2, -1)$
$u = z^2 + 2\arctg(x - y),$ $\vec{l} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k},$ $M(1, 2, -1)$	$u = \ln(x^2 + y^2) + xyz,$ $\vec{l} = \vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k},$ $M(1, -1, 2)$

Задание 9. Найти угол между градиентами скалярных полей $v(x, y, z)$ и $u(x, y, z)$ в заданной точке M .

$v = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3, \quad u = \frac{yz^2}{x^2}, \quad M\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
$v = 3\sqrt{2}x^2 - \frac{y^2}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}z^3, \quad u = \frac{z^2}{xy^2}, \quad M\left(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$
$v = 6\sqrt{6}x^3 - 6\sqrt{6}y^3 + 2z^3, \quad u = \frac{xz^2}{y}, \quad M\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 3\right)$
$v = \frac{\sqrt{6}}{2x} - \frac{\sqrt{6}}{2y} + \frac{2}{3z}, \quad u = \frac{yz^2}{x}, \quad M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
$v = 3\sqrt{2}x^2 - \frac{y^2}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{2}z^2, \quad u = \frac{xy^2}{z^2}, \quad M\left(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$
$v = \frac{3}{x} + \frac{4}{y} - \frac{1}{\sqrt{6}z}, \quad u = \frac{x^3y^2}{z}, \quad M\left(1, 2, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$
$v = -\frac{4\sqrt{2}}{x} + \frac{\sqrt{2}}{9y} + \frac{1}{\sqrt{3}z}, \quad u = \frac{1}{x^3yz}, \quad M\left(2, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

	$v = \frac{6}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}z}, \quad u = \frac{x^2}{y^2z^3}, \quad M\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
	$v = x^2 + 9y^2 + 6z^2, \quad u = xyz, \quad M\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$
	$v = \frac{2}{x} + \frac{3}{2y} - \frac{\sqrt{6}}{4z}, \quad u = \frac{y^3}{x^2z}, \quad M\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2}\right)$
	$v = \sqrt{2}x^2 + \frac{3y^2}{\sqrt{2}} - 6\sqrt{2}z^2, \quad u = xy^2z, \quad M\left(1, \frac{2}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$
	$v = -\frac{\sqrt{6}}{2x} + \frac{\sqrt{6}}{2y} - \frac{2}{3z}, \quad u = \frac{x}{yz^2}, \quad M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
	$v = \frac{6}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}z}, \quad u = \frac{y^2z^3}{x^2}, \quad M\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
	$v = \frac{1}{\sqrt{2}x} + \frac{2\sqrt{2}}{y} - \frac{3\sqrt{3}}{2z}, \quad u = \frac{y^2z^3}{x}, \quad M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
	$v = 6\sqrt{6}x^3 - 6\sqrt{6}y^3 + 2z^3, \quad u = \frac{y}{xz^2}, \quad M\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 1\right)$
	$v = x^2 - y^2 - 3z^2, \quad u = \frac{yz^2}{x}, \quad M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
	$v = \frac{3x^2}{\sqrt{2}} - \frac{y^2}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}z^2, \quad u = \frac{z^2}{x^2y^2}, \quad M\left(\frac{2}{3}, 2, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$
	$v = \frac{x^3}{\sqrt{2}} - \frac{y^3}{\sqrt{2}} - \frac{8z^3}{\sqrt{3}}, \quad u = \frac{x^2}{y^2z^3}, \quad M\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{\frac{3}{4}}\right)$
	$v = \frac{3}{2}x^2 + 3y^2 - 2z^2, \quad u = x^2yz^3, \quad M\left(2, \frac{1}{3}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$
	$v = 9\sqrt{2}x^3 - \frac{y^3}{2\sqrt{2}} - \frac{4z^3}{\sqrt{3}}, \quad u = \frac{xy^2}{z^3}, \quad M\left(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

	$v = \sqrt{2}x^2 - \frac{3y^2}{\sqrt{2}} - 6\sqrt{2}z^2, \quad u = \frac{1}{xy^2z}, \quad M\left(1, \frac{2}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$
	$v = x^2 + 9y^2 + 6z^2, \quad u = \frac{1}{xyz}, \quad M\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$
	$v = \frac{1}{\sqrt{2}x} - \frac{2\sqrt{2}}{y} - \frac{3\sqrt{3}}{2z}, \quad u = \frac{x}{y^2z^3}, \quad M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
	$v = -\frac{4\sqrt{2}}{x} + \frac{\sqrt{2}}{9y} + \frac{1}{\sqrt{3}z}, \quad u = x^2yz, \quad M\left(2, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$
	$v = \frac{x^3}{\sqrt{2}} - \frac{y^3}{\sqrt{2}} - \frac{8z^3}{\sqrt{3}}, \quad u = \frac{y^2z^3}{x^2}, \quad M\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
	$v = -\frac{3x^3}{\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{2}y^3}{3} + \frac{24z^3}{\sqrt{3}}, \quad u = \frac{y^2z}{x^2}, \quad M\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{2}\right)$

Задание 10. Найти вторые частные производные, убедиться в том, что

$$z''_{xy} = z''_{yx}.$$

	$z = \sin(x^2 - y)$		$z = \operatorname{arctg}(x + y)$
	$z = \arcsin(x - y)$		$z = \arccos(2x + y)$
	$z = \operatorname{arcctg}(x - 3y)$		$z = \ln(3x^2 - 2y^2)$
	$z = e^{2x^2 + y^2}$		$z = \operatorname{ctg}(x / y)$
	$z = \operatorname{tg}\sqrt{xy}$		$z = \cos(x^2y^2 - 5)$
	$z = \sin \sqrt{x^3y}$		$z = \arcsin(x - 2y)$
	$z = \arccos(4x - y)$		$z = \operatorname{arctg}(5x + 2y)$
	$z = \operatorname{arctg}(2x - y)$		$z = \ln(4x^2 - 5y^3)$
	$z = e^{\sqrt{x+y}}$		$z = \arcsin(4x + y)$

	$z = \arccos(x - 5y)$		$z = \sin \sqrt{xy}$
	$z = \cos(3x^2 - y^3)$		$z = \operatorname{arctg}(3x + 2y)$
	$z = \ln(5x^2 - 3y^4)$		$z = \operatorname{arcctg}(x - 4y)$
	$z = \ln(5xy - 4)$		$z = \operatorname{tg}(xy^2)$

Задание 11. Проверить, удовлетворяет ли указанному уравнению данная функция $u(x, y)$.

	$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 2u, \quad u = \frac{xy}{x+y}$
	$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u = e^{xy}$
	$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad u = \sin^2(x - ay)$
	$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u = y \sqrt{\frac{y}{x}}$
	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad u = \frac{1}{\sqrt{x+y+z}}$
	$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u = e^{-\cos(x+ay)}$
	$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad u = (x-y)(y-z)(z-x)$
	$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = u, \quad u = x \ln \frac{y}{x}$
	$y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u = \ln(x^2 + y^2)$

	$x^2 \frac{\partial u}{\partial x} - xy \frac{\partial u}{\partial y} + y^2 = 0, \quad u = \frac{y^2}{3x} + \arcsin(xy)$
	$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2xy = 0, \quad u = e^{xy}$
	$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0, \quad u = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$
	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1)$
	$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + u = 0, \quad u = \frac{2x+3y}{x^2 + y^2}$
	$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = 1, \quad u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
	$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 2u, \quad u = (x^2 + y^2) \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{y}$
	$9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u = e^{-(x+3y)} \sin(x+3y)$
	$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u = xe^{x/y}$
	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$
	$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$
	$\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad u = \ln(x + e^{-y})$
	$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u = \arcsin \frac{x}{x+y}$

	$\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u}{y^2}, \quad u = \frac{y}{(x^2 - y^2)^5}$
	$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x+y}{x-y}, \quad u = \frac{x^2 + y^2}{x-y}$
	$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{u}, \quad u = \sqrt{2xy + y^2}$
	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u = \ln(x^2 - y^2)$

Задание 12. Исследовать функцию на экстремум.

$z = y\sqrt{x - y^2} - x + 6y$	$z = 2(x + y) - x^2 - y^2$
$z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$	$z = xy(6 - x - y)$
$z = (x - 1)^2 + 2y^2$	$z = x^2 + 3(y + 2)^2$
$z = x^2 + y^2 - xy + x + y$	$z = xy - 3x^2 - 2y^2$
$z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$	$z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$
$z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$	$z = xy - x^2 - y^2 + 9$
$z = xy(12 - x - y)$	$z = 2xy - 5x^2 - 3y^2 + 2$
$z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$	$z = 2xy - 2x^2 - 4y^2$
$z = x^3 + y^3 - 3xy$	$z = (x - 5)^2 + y^2 - 1$
$z = (x - 2)^2 + 2y^2 - 10$	$z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$
$z = 6(x - y) - 3x^2 - 3y^2$	$z = 4(x - y) - x^2 - y^2$

$z = x^2 + y^2 + xy + x - y + 1$	$z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$
$z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$	$z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5$

Задание 13. Найти наибольшее и наименьшее значения

функции $z = z(x, y)$ в области D , ограниченной заданными линиями.

$z = x^2 - 2xy + 5 \cdot \frac{y^2}{2} - 2x,$ $D: y = 2, y = 0, x = 0, x = 2$	$z = 2x^2 + 2xy - 4x - \frac{y^2}{2},$ $D: y = 2x, y = 2, x = 0$
$z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1,$ $D: x + y + 1 = 0, y = 0, x = -3$	$z = 3x^2 + 3y^2 - x - y + 1,$ $D: x - y - 1 = 0, y = 0, x = 5$
$z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2,$ $D: x + y - 1 = 0, y = 0, x = 0$	$z = 2x^2 + 3y^2 + 1,$ $D: y = 3\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}, y = 0$
$z = xy - 2x - y,$ $D: y = 4, y = 0, x = 0, x = 3$	$z = \frac{x^2}{2} - xy,$ $D: y = 8, y = 2x^2$
$z = x^2 + 2xy - 10,$ $D: y = 0, y = x^2 - 4$	$z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1,$ $D: x + y = 3, y = 0, x = 0$
$z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2,$ $D: y = 1, y = 0, x = 0, x = 1$	$z = 2x^3 - xy^2 + y^2,$ $D: y = 6, y = 0, x = 0, x = 1$
$z = x^2 + 2xy - 4x - y^2,$ $D: y = x + 1, y = 0, x = 3$	$z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8,$ $D: y = 1 - x, y = 0, x = 0$
$z = 5x^2 - 3xy + x^2,$ $D: y = 1, y = 0, x = 1, x = 0$	$z = x^2 + 2xy - 4x + 8y,$ $D: y = 2, y = 0, x = 0, x = 1$
$z = 3x + y - xy,$ $D: y = x, y = 4, x = 0$	$z = xy - x - 2y,$ $D: y = x, y = 0, x = 3$

	$z = xy - 3x - 2y,$ $D : y = 4, y = 0, x = 0, x = 4$		$z = x^2 + xy - 2,$ $D : y = 3x^2 - 4, y = 0$
	$z = x^3 + y^3 - 3xy,$ $D : y = 2, y = -1, x = 0, x = 2$		$z = x^2 - y(4 - x - y),$ $D : y = 6 - x, y = 0, x = 0$
	$z = 4(x - y) - x^2 - y^2,$ $D : y = 2, y = 0, x = 0, x = 1$		$z = x^2 + 2xy - 4x - y^2,$ $D : y = x + 1, y = 0, x = 3$
	$z = -9x^2 + 6xy - 9y^2 + 4x + 4y,$ $D : y = 2, y = 0, x = 0, x = 1$		$z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y,$ $D : y = x + 2, y = 0, x = 2$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бугров, Я.С., Никольский, С.М. Высшая математика. Задачи – М. Наука, 1987.
2. Данко, П.Е., Попов, А.Г., Кожевникова, Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М. Высш. шк., 1999.
3. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. – М. Наука, 1990.
4. Кудрявцев, Л.Д. Курс математического анализа. – М. Наука, 1983.
5. Кузнецов, Л.А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты. – М.: Высш. шк., 1983.
6. Мантуров, О.В. Курс высшей математикм. – М.: Высш. шк., 1986, 1991.
Сборник задач по математике для втузов.– Ч. 1 / под ред. А.В. ефимова, Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1986.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Определение функций нескольких переменных	3
2. Предел и непрерывность функции двух переменных	10
3. Частные производные	13
4. Полное приращение и полный дифференциал	15
5. Производные и дифференциалы высших порядков	18
6. Касательная плоскость и нормаль к поверхности	21
7. Дифференцирование сложных и неявных функций	23
8. Производная по направлению и градиент скалярного поля	27
9. Экстремум функции	33
10. Условный экстремум	36
11. Наибольшее и наименьшее значения функции	39
12. Теоретические вопросы	42
13. Задания для самостоятельной работы	43
Библиографический список	61

Ермилова Нелли Александровна,
доцент кафедры ОМиИ АмГУ;

Павельчук Анна Владимировна,
ассистент кафедры ОМиИ АмГУ

Функции нескольких переменных. Учебно-методическое пособие.

Заказ 432.