ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Дифференциал I порядка функции $z = f(x,y)$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

2. Дифференциал II порядка функции $z = f(x,y)$

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

3. Производная сложной функции

$z = f(x,y),\ x = x(t),\ y = y(t)$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

4. Производная сложной функции

$z = f(x,y),\quad y = y(x)$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$$

5. Производная сложной функции

$z = f(x,y),\ x = x(u,v),\ y = y(u,v)$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$$

6. Производная неявной функции

$F(x,y) = 0,\quad y = y(x)$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$$

7. Производная неявной функции

$F(x,y,z) = 0,\quad z = z(x,y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}$$

8. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

а) $z = f(x,y),\ M_0(x_0, y_0, z_0)$

$T:\ z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$

$$L:\ \frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

б) $F(x,y,z) = 0,\ M_0(x_0, y_0, z_0)$

$T:\ F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0$

$$L:\ \frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}$$

9. Экстремум функции двух переменных $z = f(x,y)$

а) найти критические точки $\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow M_0(x_0, y_0)$

б) найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0) = A,\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_0) = B,\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_0) = C$

в) найти $D = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = A \cdot C - B^2$

- если $D < 0$, то экстремума нет
- если $D > 0,\ A > 0$, то M_0 – точка минимума
- если $D > 0,\ A < 0$, то M_0 – точка максимума
- если $D = 0$, то необходимо дополнительное исследование

10. Наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ в ограниченной замкнутой области *D*

а) найти критические точки данной функции, лежащие в области D и вычислить значения функции в этих точках;

б) найти наибольшее и наименьшее значения функции на границе области D;

г) сравнить все полученные значения и выбрать наибольшее и наименьшее из них.

11. Градиент функции $u = u(x, y, z)$

$$\overline{grad u} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\}.$$

12. Производная функции $u = u(x, y, z)$ по направлению вектора $\bar{l} = \{x_1, y_1, z_1\}$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$ где

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{|l|},\ \cos\beta = \frac{y_1}{|l|},\ \cos\gamma = \frac{z_1}{|l|},$$

$$|\bar{l}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.$$