## Занятие 1. Понятие функции нескольких переменных. Предел и непрерывность ФНП. Дифференцирование ФНП

I. Найти и изобразить на плоскости область определения функций. Указать точки и линии разрыва:

1) $z = 4 - x - 2y$

2) $z = \dfrac{4xy}{x^2 + y^2}$

3) $z = \dfrac{x^2 + y - 3}{y^2 - 6x}$

4) $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

6) $z = \dfrac{1}{\sqrt{xy}}$

7) $z = \arcsin(x + y)$

8) $z = \dfrac{1}{x-2} - \ln(xy)$

9) $z = \sqrt{x^2 - 9} + \sqrt{9 - y^2}$

II. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \dfrac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x + y)\cdot \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\cdot \sin\left(\dfrac{1}{y}\right)$

3) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}} \dfrac{tgxy}{y}$

4) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 y^2}$

5) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$

6) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x}{x + y}$

7) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2x^3 + 3y^2}{x^2 + y^2}$

8) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{x + 2y}{x^2 - 2xy + 2y^2}$

III. Найти частные производные первого и второго порядка от функций:

1) $u = xy + \dfrac{x}{y}$;

2) $u = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

3) $u = \dfrac{1}{3}\sqrt{(x^2 + y^2)^3}$;

4) $u = x^y$.

## Занятие 2. Дифференцирование ФНП

I. Найти производные указанного порядка:

1) $u = x\ln(xy)$, $\qquad \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - ?$

2) $u = x^{x+y}$ $\qquad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - ?\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - ?$

3) $u = e^{xyz}$ $\qquad \dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} - ?$

4) $u = \left(\dfrac{x}{y}\right)^z$ $\qquad \dfrac{\partial u}{\partial x} - ?\quad \dfrac{\partial u}{\partial y} - ?\quad \dfrac{\partial u}{\partial z} - ?\quad \dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} - ?$

II. Найти частные производные указанного порядка от сложных функций:

1) $z = x^2 \ln y,\quad x = \dfrac{u}{v},\quad y = 3u - 2v.$

$z'_u - ?\quad z'_v - ?\quad z''_{uu} - ?\quad z''_{uv} - ?\quad z''_{vv} - ?$

2) $z = \sqrt{x^2 + y^2},\quad x = u \cdot v,\quad y = \dfrac{v}{u}.$

$z'_u - ?\quad z'_v - ?\quad z''_{uv} - ?$

3) $w = z^2 \cdot \ln(e^x + e^y),\quad x = u^2 + v^2,\quad y = u \cdot v,\quad z = \dfrac{1}{u}.$

$w'_u - ?\quad w'_v - ?\quad w''_{vv} - ?$

4) $z = x^y,\quad x = \cos t,\quad y = \ln t.$ $\qquad \dfrac{dz}{dt} - ?\quad \dfrac{d^2 z}{dt^2} - ?$

5) $z = arctg(xy),\quad y = e^x.$ $\qquad \dfrac{dz}{dx} - ?\quad \dfrac{d^2 z}{dx^2} - ?$

6) $z = tg(3t + 2x^2 - y),\quad x = \ln t,\quad y = \sqrt{t}$ $\qquad \dfrac{dz}{dt} - ?$

III. Найти производные функций, заданных неявно

а) $y = y(x)$:

1) $y \sin x - \cos(x - y) = 0$

2) $\dfrac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) - arctg\dfrac{y}{x} = 0$

3) $\ln 2 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$

б) $z = z(x, y)$:

4) $z \cdot \ln(x + y) - \dfrac{xy}{z} = 0$

5) $x + y + z = e^z$

6) $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1$

IV. Записать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в точке $M_0$:

а) $z = 1 + x^2 + y^2$, $\quad M_0(1;\,1;\,3)$;

б) $x(y+z)(xy-z)+8=0$, $\quad M_0(2;\,1;\,3)$.

V. Вычислить приближенно:

а) $(1{,}04)^{2{,}02}$

б) $\dfrac{\sin 1{,}49 \cdot arctg 0{,}07}{2^{2{,}95}}$

**Ответ:** а) $1{,}08$, б) $0{,}01$.

## Занятие 3. Экстремум ФНП
### Характеристики скалярного поля

I. Исследовать на экстремум функции:

1) $\boldsymbol{z = x^3 + y^3 - 3xy}$

2) $\boldsymbol{z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5}$

3) $\boldsymbol{z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2}$

II. Найти характеристики скалярного поля:

1. Найти $\dfrac{\partial u}{\partial \ell}(M_0)$. Определить характер изменения функции в направлении $\overline{\ell}$ в точке $M_0$, если

$$u(x,y,z) = \frac{z}{x+y}, \quad \overline{\ell} = \left\{\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}\right\}, \quad M_0(1;1;0).$$

2. Найти $\dfrac{\partial u}{\partial \ell}(M_1)$, $\dfrac{\partial u}{\partial \ell}(M_3)$. Определить характер изменения функции в направлении $\overline{\ell}$ в точках $M_1$ и $M_3$, если

$$u(x,y,z) = (x+y^2)^3 + \sin xyz, \quad \overline{\ell} = \overline{\mathbf{M_1M_2}},$$
$$M_1(1;0;1), \quad M_2(4;4;1), \quad M_3\left(2/3;\, 0;\, -3/2\right).$$

3. Найти $\dfrac{\partial u}{\partial \ell}(M_0)$. Определить характер изменения функции в направлении $\overline{\ell}$ в точке $M_0$, если

$$u(x,y,z)=\frac{x}{yz^2}+x\ln yz,\quad M_0(3;1;1),$$

$\overline{\ell}$ составляет с осями координат углы $\alpha=\pi/3$, $\beta=\pi/4$, $\gamma$ – острый.

4. По какому направлению должна двигаться точка $M(x;y;z)$ при переходе через точку $M_0(-1;1;1)$, чтобы функция $u(x,y,z)=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}$ возрастала с наибольшей скоростью?