

### ВАРИАНТ № 1

1) Найдите и постройте область определения функции

$$z = \sqrt{2x - y + 4} - \log_3(y + 5x - 1).$$

2) Докажите, что функция  $z = \ln(x^2 + y^2)$  удовлетворяет уравнению

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

3) Найти все частные производные второго порядка от функции  $u = \ln(e^x + e^y)$ .

Найти указанные частные производные сложной функции

4)  $z = \operatorname{arctg} xy$ ,  $x = \frac{u}{v^2}$ ,  $y = \frac{u^2}{v}$ ;  $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$   $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$   $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - ?$

5)  $z = xy \ln(x + y)$ ,  $x = t^2 + 1$ ,  $y = \frac{1}{t^2}$ ;  $\frac{dz}{dt} - ?$

6)  $z = f(x^2 + y^2, xy)$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция  $y = y(x)$  задана неявно уравнением  $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ . Найти  $\frac{dy}{dx}$ .

8) Функция  $z = z(x, y)$  задана неявно уравнением  $z^2 x + x^2 y + y^2 z + 2x - y = 0$ .

Найти  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

9) Для функции  $z = x^2 y^2 - xy^3 - 3y - 1$  найти:

а) производную в точке  $M(2,1)$  в направлении от точки  $M$  к точке  $O(0,0)$ ;

б)  $\operatorname{grad} z$  в точке  $N(2,2)$ .

10) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $y^2 - 2z^2 - x^2 = 1$  в точке  $M(1,2,1)$ . Существует ли на поверхности точка, в которой нормаль к поверхности параллельна оси  $OZ$ ?

11) Исследовать на экстремум функцию  $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$ .

12) Записать формулу Тейлора до членов 3-го порядка малости для функции  $z = \ln(2x - y)$  в окрестности точки  $M(1,1)$

13) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции  $z = x^2 + y^2$  в замкнутой области, ограниченной линиями  $x + y - 1 = 0$ ,  $x = 2$ ,  $y = 2$ .

14) Вычислить приближённо  $1,002 \cdot (2,003)^2$ .

## ВАРИАНТ № 2

1) Найдите и постройте область определения функции

$$z = \sqrt{x + 2y - 2} - \ln(yx).$$

2) Докажите, что функция  $z = xy + xe^{y/x}$  удовлетворяет уравнению

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z.$$

3) Найти все частные производные второго порядка от функции  $u = \frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{y^2}{4x}}$ .

Найти указанные частные производные сложной функции

4)  $z = \frac{x+y}{x-y}$ ,  $x = u^2 v^2$ ,  $y = \frac{u^2}{v^2} - 1$ ;  $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$   $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$   $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - ?$

5)  $z = x^2 y - y^3 x$ ,  $x = te^{-t}$ ,  $y = \frac{e^t}{e^t + 1}$ ;  $\frac{dz}{dt} - ?$

6)  $z = f(x^2 y; -y^3 x)$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция  $y = y(x)$  задана неявно уравнением  $x^2 + y^2 + 2y = 9$ . Найти  $\frac{dy}{dx}$ .

8) Функция  $z = z(x, y)$  задана неявно уравнением  $z^3 + 3x^2 z = 2xy$ .

Найти  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

9) Для функции  $u = xyz$  найти:

а) производную в точке  $M(5,1,2)$  в направлении от точки  $M$  к точке  $N(0,1,1)$ ;

б)  $grad u$  в точке  $K(3,1,1)$ .

10) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $x^2 - y^2 + z^2 = 4$  в точке  $M(1,1,2)$ . В какой точке поверхности нормаль к ней будет иметь направление вектора  $\vec{q} = \{1, -1, 1\}$ .

11) Исследовать на экстремум функцию  $z = \frac{x^3}{3} + 2y^2 - x + y$ .

12) Записать формулу Тейлора до членов 3-го порядка малости для функции  $z = \sin(2\pi x - y)$  в окрестности точки  $M(1,0)$

13) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции  $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1$  в замкнутой области, ограниченной линиями  $y = 0$ ,  $x + y + 1 = 0$ ,  $x = 3$ .

14) Вычислить приближённо  $3,01 \cdot e^{0,01}$ .



**ВАРИАНТ № 3**

1) Найдите и постройте область определения функции

$$z = \sqrt{2 - x + y} - \ln(y + x^2 - 1).$$

2) Докажите, что функция  $z = \ln(x^2 + y^2 + xy)$  удовлетворяет уравнению

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2.$$

3) Найти все частные производные второго порядка от функции  $u = \ln \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ ,  $(a, b - \text{const})$ .

Найти указанные частные производные сложной функции

4)  $z = \arcsin \frac{x}{y}$ ,  $x = u + v$ ,  $y = u^2 + v^2$ ;  $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$   $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$   $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - ?$

5)  $z = \sqrt{xy} + x$ ,  $x = \log_2 t$ ,  $y = 2^t$ ;  $\frac{dz}{dt} - ?$

6)  $z = f(y \sin x; x \cos y)$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция  $y = y(x)$  задана неявно уравнением  $0,5x^2 + 0,25y^2 = 1$ . Найти  $\frac{dy}{dx}$ .

8) Функция  $z = z(x, y)$  задана неявно уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 2z - xz - yz = 2. \text{ Найти } \frac{\partial z}{\partial x} \text{ и } \frac{\partial z}{\partial y}.$$

9) Для функции  $z = (1 + \log_y x)^3$  найти:

а) производную в точке  $M(e, e)$  в направлении от точки  $M$  к точке  $N(3e, -2e)$ ;

б)  $\text{grad} z$  в точке  $K(1, 2)$ .

10) Найти касательные плоскости к поверхности  $\frac{x^2}{21} + \frac{y^2}{6} + \frac{z^2}{4} = 1$ , которые были бы параллельны плоскости  $2x + 2y - 3z = 0$ .

11) Исследовать на экстремум функцию  $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$ .

12) Записать формулу Тейлора до членов 3-го порядка малости для функции  $z = \cos(x - y)$  в окрестности точки  $M(\pi, 0)$ .

13) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции  $z = x^2 + 3y^2 - x + 18y - 4$  в замкнутой области, ограниченной линиями  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$ ,  $y = 2$ .

14) Вычислить приближённо значение функции  $z = \frac{xy}{x^2 - y^2}$  в точке  $M(1,98; 1,01)$ .

**ВАРИАНТ № 4**

1) Найдите и постройте область определения функции

$$z = \sqrt{2x - 3y - 6} - \log_5(y - x^2 + 3).$$

2) Докажите, что функция  $z = x^y$  удовлетворяет уравнению

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = zy(1 + \ln x).$$

3) Найти все частные производные второго порядка от функции  $u = xe^y + ye^x$ .

Найти указанные частные производные сложной функции

4)  $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ ,  $x = \frac{1}{u} + \frac{1}{v}$ ,  $y = u + v$ ;  $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$   $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$   $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - ?$

5)  $z = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ ,  $x = ctgt$ ,  $y = \cos t$ ;  $\frac{dz}{dt} - ?$

6)  $z = f(y + \sin x; x + \cos y)$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция  $y = y(x)$  задана неявно уравнением  $x^3 y + y^3 x = 3 - x^2 y^2$ . Найти  $\frac{dy}{dx}$ .

8) Функция  $z = z(x, y)$  задана неявно уравнением  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0$ .

Найти  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

9) Для функции  $z = \ln(x + y)$  найти:

- а) производную в точке  $M(1,2)$  в направлении от точки  $M$  к точке  $N(-3,6)$ ;
- б)  $grad z$  в точке  $K(1,1)$ .

10) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $3x^2 + y^2 + z^2 = 8$  в точке  $M(1,-1,2)$ . В какой точке поверхности нормаль к ней будет иметь направление вектора  $\vec{q} = \{0,1,1\}$ ?

11) Исследовать на экстремум функцию  $z = x^2 + xy + y^2 - 2xy - 3y$ .

12) Записать формулу Тейлора до членов 3-го порядка малости для функции  $z = e^{x^2 - y}$  в окрестности точки  $M(1,0)$ .

13) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции  $z = (x - 2)^2 + 3y^2$  в замкнутой области, ограниченной линиями  $x = 1, x = 2, y = 0, y = 1$ .

14) Вычислить приближённо значение функции  $z = \frac{1}{2} \ln(y^2 - 2x^2)$  в точке  $M(2,1;3,02)$ .



## ВАРИАНТ № 5

1) Найдите и постройте область определения функции

$$z = \sqrt{2xy} - \lg(y + x - 1).$$

2) Докажите, что функция  $z = \ln(x^2 + xy + y^2)$  удовлетворяет уравнению

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2.$$

3) Найти все частные производные второго порядка от функции  $u = \frac{y}{y^2 - a^2 x^2}$  ( $a = \text{const}$ ).

Найти указанные частные производные сложной функции

4)  $z = \frac{y}{x}$ ,  $x = u^v$ ,  $y = u^2$ ;  $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$   $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$   $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - ?$

5)  $z = \ln(x^2 + y^2)$ ,  $x = \text{tgt}$ ,  $y = \frac{1}{\sin t}$ ;  $\frac{dz}{dt} - ?$

6)  $z = f[\sin(x + y); \cos(x - y)]$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция  $y = y(x)$  задана неявно уравнением  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = a$ . Найти  $\frac{dy}{dx}$ .

8) Функция  $z = z(x, y)$  задана неявно уравнением  $xyz = x + y + z$ . Найти  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

9) Для функции  $u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$  найти:

- а) производную в точке  $M(-3, 1, 0)$  в направлении от точки  $M$  к точке  $O(0, 0, 0)$ ;
- б)  $\text{grad} u$  в точке  $N(1, 2, 2)$ .

10) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $-3x^2 + y^2 + z^2 = 8$  в точке  $M(0, -2, 2)$ . В какой точке поверхности нормаль к ней будет иметь направление вектора  $\vec{q} = \{0, 1, 1\}$ .

11) Исследовать на экстремум функцию  $z = x^3 + y^3 - 3axy$  ( $a > 0$ ).

12) Записать формулу Тейлора до членов 3-го порядка малости для функции  $z = e^{x-y^2}$  в окрестности точки  $M(0, 1)$ .

13) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции  $z = x - 2y - 3$  в замкнутой области, ограниченной линиями  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x + y = 1$ .

14) Вычислить приближённо  $\sin 59^\circ \cdot \text{tg} 46^\circ$ .

**ВАРИАНТ № 6**

1) Найдите и постройте область определения функции

$$z = \sqrt{2x - y^2} - \log_2(y - 2x + 1).$$

2) Докажите, что функция  $z = xy + xe^{y/x}$  удовлетворяет уравнению

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z.$$

3) Найти все частные производные второго порядка от функции  $u = x \sin \frac{x}{y}$ .

Найти указанные частные производные сложной функции

4)  $z = \ln \frac{x}{y}$ ,  $x = \ln(e + uv)$ ,  $y = 1 + uv$ ;  $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$   $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$   $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - ?$

5)  $z = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{y}{x}}$ ,  $x = \sqrt{t}$ ,  $y = \ln t$ ;  $\frac{dz}{dt} - ?$

6)  $z = f\left[\frac{x}{y}; x^2 - y^2\right]$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция  $y = y(x)$  задана неявно уравнением

$$2(x^2 + y^2) + 3(2y^2 + 1) + 8(2x - y) - 4x = 0. \text{ Найти } \frac{dy}{dx}.$$

8) Функция  $z = z(x, y)$  задана неявно уравнением  $z^3 - 3xyz = a^3$ . Найти  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

9) Для функции  $z = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$  найти:

- а) производную в точке  $M(3; 1)$  в направлении от точки  $M$  к точке  $N(6, 5)$ ;
- б)  $grad z$  в точке  $K(2, 1)$ .

10) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $3x^2 + y^2 - 4z^2 = -12$  в точке  $M(1, -1, 2)$ . В какой точке поверхности нормаль к ней будет иметь направление оси  $OZ$ ?

11) Исследовать на экстремум функцию  $z = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$ .

12) Записать формулу Тейлора до членов 3-го порядка малости для функции  $z = \sqrt{x + y}$  в окрестности точки  $M(2, 2)$ .

13) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции  $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$  в замкнутой области, ограниченной линиями  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $2x + 3y - 12 = 0$ .

14) Вычислить приближённо  $(5, 2)^2 + (3, 96)^2$ .



**ВАРИАНТ № 7**

1) Найдите и постройте область определения функции

$$z = \sqrt{y-4} \cdot \sqrt{x} - \lg(x^2 + 1).$$

2) Проверьте, выполняется ли равенство  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{2}$  для функции

$$z = \sqrt{x} \cdot \sin \frac{y}{x}.$$

3) Найти все частные производные второго порядка от функции  $u = \cos xy^2$ .

Найти указанные частные производные сложной функции

4)  $z = \operatorname{tg}(x + y)$ ,  $x = 2^{uv}$ ,  $y = u - v$ ;  $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$   $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$   $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - ?$

5)  $z = x^y$ ,  $x = \operatorname{arctg} t$ ,  $y = \ln t$ ;  $\frac{dz}{dt} - ?$

6)  $z = f[x^2 + y^3; xy]$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция  $y = y(x)$  задана неявно уравнением  $x^2(x + y) = y^2(x - y)$ . Найти  $\frac{dy}{dx}$ .

8) Функция  $z = z(x, y)$  задана неявно уравнением  $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ . Найти  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

9) Для функции  $u = xy + yz + xz - x^2 - y^2 - z^2$  найти:

а) производную в точке  $M(1; 2; -3)$  в направлении от точки  $M$  к точке

$N(3, 3, -1)$ ;

б)  $\operatorname{grad} u$  в точке  $K(1, 0, 1)$ .

10) Записать уравнения касательной и нормали к поверхности  $x^2 - 2y^2 + 4z^2 = 9$  в точке  $M(1, -2, -2)$ . Существует ли на поверхности точка, в которой нормаль к поверхности параллельна оси  $OY$ ?

11) Исследовать на экстремум функцию  $z = x^2 + xy^2 + 3axy$  ( $a > 0$ ).

12) Записать формулу Тейлора до членов 3-го порядка малости для функции  $z = \frac{x}{y}$  в окрестности точки  $M(1, 1)$ .

13) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции  $z = x^2 - 2y^2 + 4x$  в замкнутой области, ограниченной линиями  $x = 2$ ,  $y = 2$ ,  $x + y = 2$ .

14) Вычислить приближённо  $\sqrt{(3,01)^2 + (3,98)^2}$ .

### ВАРИАНТ № 8

1) Найдите и постройте область определения функции

$$z = \sqrt{y-2} + \ln(x+2).$$

2) . Проверьте, выполняется ли равенство  $2x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$  для функции

$$z = e^{x/y^2}.$$

3) Найти все частные производные второго порядка от функции  $u = \sin(x^2 + xy)$ .

Найти указанные частные производные сложной функции

4)  $z = \ln(2x + 3y), \quad x = u^2 + v^2, \quad y = u^2 - v^2; \quad \frac{\partial z}{\partial u} - ? \quad \frac{\partial z}{\partial v} - ? \quad \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - ?$

5)  $z = e^{x-2y}, \quad x = \sin t, \quad y = t^3; \quad \frac{dz}{dt} - ?$

6)  $z = f[x - y; xy], \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция  $y = y(x)$  задана неявно уравнением  $xy - \ln y = 1$ . Найти  $\frac{dy}{dx}$ .

8) Функция  $z = z(x, y)$  задана неявно уравнением  $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1$ . Найти  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

9) Для функции  $u = xy^2 + z^3 - xyz$  найти:

- а) производную в точке  $M(1; 1; 2)$  в направлении, образующим с осями координат углы  $60^\circ$ ,  $45^\circ$  и  $60^\circ$  соответственно;
- б) *gradu* в точке  $N(2, 1, 1)$ .

10) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $x^2 + 2y^2 - z^2 = 2$  в точке  $M_0(-1; 1; -1)$ . Существует ли на поверхности точка, в которой нормаль к поверхности параллельна оси  $OY$ ?

11) Исследовать на экстремум функцию  $z = x^2 + y^2 + 2x + 4y$ .

12) Записать формулу Тейлора до членов 2-го порядка малости для функции  $u = x^{yz}$  в окрестности точки  $M(1, 1, 0)$ .

13) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции  $z = 4x + 2y + 4x^2 + y^2 + 6$  в замкнутой области, ограниченной линиями  $x = 0, y = 0, x + y + 2 = 0$ .

14) Вычислить приближённо  $\arcsin \frac{0,2}{1,3}$ .



### ВАРИАНТ № 9

1) Найдите и постройте область определения функции

$$z = \sqrt{2xy} - \lg(y + x - 1).$$

2) Докажите, что функция  $z = e^{x^2+y^2}$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = 4z.$$

3) Найти все частные производные второго порядка от функции  $u = xy^2 + \sin \frac{x}{y}$ .

Найти указанные частные производные сложной функции

4)  $z = 2^{\frac{x}{y}}$ ,  $x = 3u - 4v$ ,  $y = 2uv$ ;  $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$   $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$   $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - ?$

5)  $z = \sin xy$ ,  $x = t^2$ ,  $y = e^{-t}$ ;  $\frac{dz}{dt} - ?$

6)  $z = f[x^2 + y^3; xy]$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция  $y = y(x)$  задана неявно уравнением  $y - \sin x - \cos(x - y) = 0$ . Найти  $\frac{dy}{dx}$ .

8) Функция  $z = z(x, y)$  задана неявно уравнением  $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0$ . Найти  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

9) Для функции  $z = \operatorname{arctg}(xy)$  найти:

- а) производную в точке  $M(1,1)$  в направлении биссектрисы первого координатного угла;
- б)  $\operatorname{grad} z$  в точке  $N(1,0)$ .

10) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $x^2 + 2y^2 - z^2 = 2$  в точке  $M(1,1,1)$ . Существует ли на поверхности точка, в которой нормаль к поверхности параллельна оси  $OZ$ ?

11) Исследовать на экстремум функцию  $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$ .

12) Записать формулу Тейлора до членов 2-го порядка малости для функции  $u = \ln(x - y + z)$  в окрестности точки  $M(1,0,1)$ .

13) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции  $z = 2xy + x^2 - 4x + 8y$  в замкнутой области, ограниченной линиями  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 2$ .

14) Вычислить приближённо  $0,99^{1,01}$ .

**ВАРИАНТ № 10**

1) Найдите и постройте область определения функции

$$z = \sqrt{\frac{x}{y}} - \lg(y - x + 2).$$

2) Докажите, что функция  $z = \sqrt{x} \sin \frac{y}{x}$  удовлетворяет уравнению

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{2}.$$

3) Найти все частные производные второго порядка от функции  $u = x^2 e^{\frac{y}{x}}$ .

Найти указанные частные производные сложной функции

4)  $z = 2x - y^2$ ,  $x = \ln(u + v)$ ,  $y = \ln u + \ln v$ ;  $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$   $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$   $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - ?$

5)  $z = \sqrt[3]{y+1}$ ,  $x = 3t+1$ ,  $y = \ln t$ ;  $\frac{dz}{dt} - ?$

6)  $z = f[\sin(x+y); x-y]$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция  $y = y(x)$  задана неявно уравнением  $x \sin y - \cos y + \cos xy = 0$ . Найти  $\frac{dy}{dx}$ .

8) Функция  $z = z(x, y)$  задана неявно уравнением  $x \cos y + y \cos z + z \cos x = 1$ .

Найти  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

9) Для функции  $z = 3x^4 - xy + y^3$  найти:

а) производную в точке  $M(1,2)$  в направлении, составляющем с осью  $Ox$  угол в  $60^\circ$ , а с осью  $Oy$  – тупой угол;

б)  $grad z$  в точке  $N(2,1)$ .

10) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $y^2 - 2z^2 + x^2 = 3$  в точке  $M(-2,1,1)$ . Существует ли на поверхности точка, в которой нормаль к поверхности параллельна оси  $OZ$ ?

11) Исследовать на экстремум функцию  $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$ .

12) Записать формулу Тейлора до членов 2-го порядка малости для функции  $u = e^{x-y+z}$  в окрестности точки  $M(1,0,1)$ .

13) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции  $z = 4x + 2y + 4x^2 + y^2 + 6$  в замкнутой области, ограниченной линиями  $x = 0$ ,  $y = 1$ ,  $x + y + 2 = 0$ .

14) Вычислить приближённо  $\sqrt{(1,02)^2 + (1,97)^3}$ .



**ВАРИАНТ № 11**

1) Найдите и постройте область определения функции

$$z = \sqrt{2y + 4x + 4} - \ln(y - x).$$

2) Докажите, что функция  $z = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$  удовлетворяет уравнению

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}.$$

3) Найти все частные производные второго порядка от функции  $u = x \cdot 2^{\frac{x}{y}}$ .

Найти указанные частные производные сложной функции

4)  $z = \frac{1}{\sin xy}$ ,  $x = \frac{1}{\sqrt{u+1}}$ ,  $y = \frac{v}{u}$ ;  $\frac{\partial z}{\partial u} = ?$   $\frac{\partial z}{\partial v} = ?$   $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = ?$

5)  $z = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}$ ,  $x = (t-1)^2$ ,  $y = 4^{tgt}$ ;  $\frac{dz}{dt} = ?$

6)  $z = f[x + y^2; x - y]$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = ?$

7) Функция  $y = y(x)$  задана неявно уравнением  $\cos xy = x + 2y$ . Найти  $\frac{dy}{dx}$ .

8) Функция  $z = z(x, y)$  задана неявно уравнением  $\ln z = x + y + z - 1$ . Найти  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

9) Для функции  $z = \ln(e^x + e^y)$  найти:

а) производную в точке  $O(0,0)$  в направлении вектора  $\bar{e} = \{-3, 4\}$ ;

б)  $grad z$  в точке  $N(1,1)$ .

10) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $2x^2 - y^2 + z^2 = 2$  в точке  $M(1,1,1)$ . Существует ли на поверхности точка, в которой касательная плоскость к поверхности параллельна плоскости  $XOY$ ?

11) Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^2 + 3y^2 - x + 18y - 4.$$

12) Записать формулу Тейлора до членов 2-го порядка малости для функции  $u = \cos(x - y)$  в окрестности точки  $M(\pi, 0)$ .

13) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции  $z = 2x + 4y + x^2 + y^2$  в замкнутой области, ограниченной линиями  $x = 0$ ,  $y = 1$ ,  $x + y - 2 = 0$ .

14) Вычислить приближённо значение функции  $z = \frac{x+y}{x-y}$  в точке  $M(2,04; 2,95)$ .

ВАРИАНТ № 12

1) Найдите и постройте область определения функции

$$z = \sqrt{y - 2x - 2} - \ln(yx).$$

2) Докажите, что функция  $z = xy + xe^{y/x}$  удовлетворяет уравнению

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z.$$

3) Найти все частные производные второго порядка от функции  $u = \ln \frac{a}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  ( $a - const$ ).

Найти указанные частные производные сложной функции

4)  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $x = \sqrt{u} + v$ ,  $y = uv$ ;  $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$   $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$   $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - ?$

5)  $z = \arcsin \frac{y}{x}$ ,  $x = 3^{-t}$ ,  $y = t^3$ ;  $\frac{dz}{dt} - ?$

6)  $z = f[x^2 - y^2; xy]$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция  $y = y(x)$  задана неявно уравнением  $2^x + 2^y = 2^{x+y}$ . Найти  $\frac{dy}{dx}$ .

8) Функция  $z = z(x, y)$  задана неявно уравнением  $z^3 + xz + y - 2x = 0$ . Найти  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

9) Для функции  $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$  найти:

а) производную в точке  $O(0,0,0)$  в направлении вектора  $\vec{e} = \{1, -2, 3\}$ ;

б)  $grad u$  в точке  $O(0,0,0)$ .

10) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 9$  в точке  $M(1,0,2)$ . Существует ли на поверхности точка, в которой нормаль к поверхности параллельна оси  $OZ$ ?

11) Исследовать на экстремум функцию  $z = xy - x^2y - xy^2$ .

12) Записать формулу Тейлора до членов 2-го порядка малости для функции  $u = \sin(x - y)$  в окрестности точки  $M(\pi, 0)$ .

13) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции  $z = 2x + x^2 + y^2$  в замкнутой области, ограниченной линиями  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x + y + 1 = 0$ .

14) Вычислить приближённо  $\sqrt[5]{1,002} \cdot \sqrt[3]{7,995}$ .



ВАРИАНТ № 13

1) Найдите и постройте область определения функции

$$z = \sqrt{2 - 2y + 4x} - \sqrt{x^2 y}.$$

2) Докажите, что функция  $z = x^y$  удовлетворяет уравнению

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = zy(1 + \ln x).$$

3) Найти все частные производные второго порядка от функции  $u = \ln(x + e^y)$ .

Найти указанные частные производные сложной функции

4)  $z = y^x$ ,  $x = 3u^2 + 1$ ,  $y = u^3 + v^3$ ;  $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$   $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$   $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - ?$

5)  $z = e^{x^2 y}$ ,  $x = \lg t$ ,  $y = \frac{1}{t^3}$ ;  $\frac{dz}{dt} - ?$

6)  $z = f[x + y^2; \frac{x}{y}]$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция  $y = y(x)$  задана неявно уравнением  $x - y = \arcsin x - \arcsin y$ . Найти  $\frac{dy}{dx}$ .

8) Функция  $z = z(x, y)$  задана неявно уравнением  $2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z + 8 = 0$ .

Найти  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

9) Для функции  $z = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$  найти:

- а) производную в точке  $M(1,2)$  в направлении от точки  $M$  к точке  $N(2,0)$ ;
- б)  $grad z$  в точке  $K(2,2)$ .

10) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $x^2 - 10y + 2z^2 = 2$  в точке  $M(2,1,2)$ . Существует ли на поверхности точка, в которой нормаль к поверхности параллельна оси  $OZ$ ?

11) Исследовать на экстремум функцию  $z = 6x^3 y^2 - x^4 y^2 - x^3 y^3$ .

12) Записать формулу Тейлора до членов 3-го порядка малости для функции  $u = x^3 y - yz^2 + xyz$  в окрестности точки  $M(1,1,1)$ .

13) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции  $z = 2x + y - 3$  в замкнутой области, ограниченной линиями  $x = 0, y = 0, x + y + 1 = 0$ .

14) Вычислить приближённо  $0,97^{1,05}$ .

ВАРИАНТ № 14

1) Найдите и постройте область определения функции

$$z = \sqrt{y - 2x} - \sqrt{x + y - 2}.$$

2) Докажите, что функция  $z = ye^{x^2 - y^2}$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

3) Найти все частные производные второго порядка от функции  $u = ye^{\frac{x}{y}}$ .

Найти указанные частные производные сложной функции

4)  $z = \left(\frac{x}{y}\right)^2$ ,  $x = \sin(2u + v)$ ,  $y = \cos(u + 2v)$ ;  $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$   $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$   $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - ?$

5)  $z = 2^{\frac{x}{y}}$ ,  $x = \frac{1}{\sqrt{t}}$ ,  $y = \operatorname{arctg} \sqrt{t}$ ;  $\frac{dz}{dt} - ?$

6)  $z = f\left[xy^2; \frac{x^2}{y}\right]$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция  $y = y(x)$  зада на неявно уравнением  $x^3 + ax^2y + bxy^2 + y^3 = 0$ . Найти  $\frac{dy}{dx}$ .

8) Функция  $z = z(x, y)$  задана неявно уравнением  $x^3 + 2y^3 + z^3 - 2xyz - 2y + 8 = 0$ .

Найти  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

9) Для функции  $z = \sin(x^2 + y^2)$  найти:

а) производную в точке  $M(1,1)$  в направлении от точки  $M$  к точке  $N(3,7)$ ;

б)  $\operatorname{grad} z$  в точке  $K\left(0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$ .

10) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $x^2 + 2y^2 - z^2 = 0$  в точке  $M(1, 1, 3)$ . Существует ли на поверхности точка, в которой нормаль к поверхности параллельна оси  $OY$ ?

11) Исследовать на экстремум функцию  $z = x^2 + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ .

12) Записать формулу Тейлора до членов 3-го порядка малости для функции  $u = x^2yz - xyz^2 + xy^2z$  в окрестности точки  $M(1,1,1)$ .

13) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции  $z = x - 2y - 3$  в замкнутой области, ограниченной линиями  $x = 2, y = 2, x + y - 1 = 0$ .

14) Вычислить приближённо значение функции  $z = \sqrt{x^3 + y^3}$  в точке  $M(1,02; 1,97)$ .



**ВАРИАНТ № 15**

1) Найдите и постройте область определения функции

$$z = \sqrt{y + 4x} - \sqrt{x - 2y}.$$

2) Докажите, что функция  $z = \ln(x^2 + xy + y^2)$  удовлетворяет уравнению

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2..$$

3) Найти все частные производные второго порядка от функции  $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Найти указанные частные производные сложной функции

4)  $z = x^3 + y$ ,  $x = e^{u-v}$ ,  $y = e^{u+v}$ ;  $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$   $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$   $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - ?$

5)  $z = \frac{x}{y^2}$ ,  $x = \cos \frac{1}{t}$ ,  $y = \frac{1}{\cos t}$ ;  $\frac{dz}{dt} - ?$

6)  $z = f[\ln(x + y); x - y]$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция  $y = y(x)$  задана неявно уравнением  $x^2 - 2xy + 1 = 0$ . Найти  $\frac{dy}{dx}$ .

8) Функция  $z = z(x, y)$  задана неявно уравнением  $xz^5 + y^2z - x^3 = 0$ . Найти  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

9) Для функции  $z = \arcsin \frac{x}{x+y}$  найти:

а) производную в точке  $M(1,1)$  в направлении от точки  $M$  к точке  $N(2,2)$ ;

б)  $grad z$  в точке  $K(3,4)$ .

10) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $x^2 + 2y^2 - z^2 + 1 = 0$  в точке  $M(1,1,2)$ . Существует ли на поверхности точка, в которой нормаль к поверхности параллельна оси  $OY$ ?

11) Исследовать на экстремум функцию  $z = 2x^2 + 6xy + 5y^2 - x + 4y - 5$ .

12) Записать формулу Тейлора до членов 3-го порядка малости для функции  $u = x^3 - z^3 + xy^2$  в окрестности точки  $M(1,1,1)$ .

13) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции  $z = e^{2x}(x + y^2)$  в замкнутой области, ограниченной линиями  $x = 0, y = 0, x = 3, y = 2$ .

14) Вычислить приближённо  $\sqrt{(2,98)^2 + (4,01)^2}$ .

ВАРИАНТ № 16

1) Найдите и постройте область определения функции

$$z = \sqrt{2x - y + 4} - \log_3(y + 5x - 1).$$

2) Докажите, что функция  $z = e^{x/y}$  удовлетворяет уравнению

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

3) Найти все частные производные второго порядка от функции  $u = \operatorname{tg} \frac{y}{x}$ .

Найти указанные частные производные сложной функции

4)  $z = y^{2x}$ ,  $x = u \cdot v$ ,  $y = \frac{v}{u}$ ;  $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$   $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$   $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - ?$

5)  $z = \operatorname{arctg} \frac{1}{xy}$ ,  $x = \sqrt[3]{t}$ ,  $y = \frac{1}{\sqrt[3]{t}}$ ;  $\frac{dz}{dt} - ?$

6)  $z = f[x + y^2; x^2 - y] + \sin xy$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция  $y = y(x)$  задана неявно уравнением  $y = 1 + xe^y$ . Найти  $\frac{dy}{dx}$ .

8) Функция  $z = z(x, y)$  задана неявно уравнением  $x - yz + e^z = 0$ . Найти  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

9) Для функции  $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$  найти:

а) производную в точке  $M(3,4)$  в направлении радиус-вектора точки  $M$ ;

б)  $\operatorname{grad} z$  в точке  $K\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ .

10) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + 2z = 2$  в точке  $M(-2,3,0)$ . Существует ли на поверхности точка, в которой нормаль к поверхности параллельна оси  $OY$ ?

11) Исследовать на экстремум функцию  $z = 2x^2 + xy^2 - 16x$ .

12) Записать формулу Тейлора до членов 3-го порядка малости для функции  $u = \ln(x^3 y^3)$  в окрестности точки  $M(1,1)$ .

13) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции  $z = x + y - 3xy$  в замкнутой области, ограниченной линиями  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x + y + 2 = 0$ .

14) Вычислить приближённо  $(1,1)^{3,97}$ .



ВАРИАНТ № 17

1) Найдите и постройте область определения функции

$$z = \ln(y + x - 1) + \sqrt{x} - \sqrt{y}.$$

2) Докажите, что функция  $z = e^{x/y}$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

3) Найти все частные производные второго порядка от функции  $u = \sqrt[3]{x^3 + y^2}$ .

Найти указанные частные производные сложной функции

4)  $z = \frac{x}{y}$ ,  $x = u^2 + v^2$ ,  $y = u \cdot v$ ;  $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$   $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$   $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - ?$

5)  $z = \sin \frac{x}{\sqrt{y}}$ ,  $x = 3t^2$ ,  $y = \sqrt{t^2 + 1}$ ;  $\frac{dz}{dt} - ?$

6)  $z = f[e^{x+y}; x - y] + e^{x+y}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция  $y = y(x)$  задана неявно уравнением  $a^2(x^4 + y^4) - x^3 y^2 = 9a^6$ . Найти  $\frac{dy}{dx}$ .

8) Функция  $z = z(x, y)$  задана неявно уравнением  $x + y + z = e^z$ . Найти  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

9) Для функции  $z = x^2 + y^2 - 3x + 2y$  найти:

- а) производную в точке  $O(0,0)$  в направлении от точки  $M$  к точке  $N(3,4)$ ;
- б)  $grad z$  в точке  $O(0,0)$ .

10) Записать уравнения касательной и нормали к поверхности  $2x^2 - 2y^2 + 7z^2 = -3$  в точке  $M(4,7,3)$ . Существует ли на поверхности точка, в которой касательная плоскость к поверхности параллельна плоскости  $XOZ$ ?

11) Исследовать на экстремум функцию  $z = 2 + (x - y)^2 + (y - 1)^4$ .

12) Записать формулу Тейлора до членов 3-го порядка малости для функции  $u = e^{x^2 + y}$  в окрестности точки  $M(1,1)$ .

13) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции  $z = xy - x - y$  в замкнутой области, ограниченной линиями  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x + y - 3 = 0$ .

14) Вычислить приближённо значение функции  $z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$  в точке  $M(1,01; 1,03)$ .

ВАРИАНТ № 18

1) Найдите и постройте область определения функции

$$z = \sqrt{2y - 4x + 3} + \ln(x - 3y + 3).$$

2) Докажите, что функция  $z = \frac{1}{x^3 - y^3}$  удовлетворяет уравнению

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = -3z.$$

3) Найти все частные производные второго порядка от функции  $u = e^x(x \cos y - y \sin y)$ .

Найти указанные частные производные сложной функции

4)  $z = x^2 + y^3$ ,  $x = 2u + 4v^3$ ,  $y = 3u^2 + v$ ;  $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$   $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$   $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - ?$

5)  $z = e^{x-2y}$ ,  $x = \sin^2 t$ ,  $y = t^3$ ;  $\frac{dz}{dt} - ?$

6)  $z = f[x + y^2; x^2 - y] + \sin xy$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция  $y = y(x)$  задана неявно уравнением  $x^4 + y^4 = 2x^2 y^2$ . Найти  $\frac{dy}{dx}$ .

8) Функция  $z = z(x, y)$  задана неявно уравнением  $e^z - xyz - 1 = 0$ . Найти  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

9) Для функции  $z = \ln(x^2 + y^2)$  найти:

а) производную в точке  $M(1,3)$  в направлении вектора  $\vec{l} = \{1, -2\}$ ;

б)  $grad z$  в точке  $N(1,0)$ .

10) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $2x^2 - 2y^2 - z^2 = 2$  в точке  $M(-2,1,2)$ . Существует ли на поверхности точка, в которой нормаль к поверхности параллельна оси  $OZ$ ?

11) Исследовать на экстремум функцию  $z = x^2 - xy + y^2 - x$ .

12) Записать формулу Тейлора до членов 3-го порядка малости для функции  $u = e^{x+y^2}$  в окрестности точки  $M(0,1)$ .

13) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции  $z = x^2 + 3y^2 + x - y$  в замкнутой области, ограниченной линиями  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x + y - 1 = 0$ .

14) Вычислить приближённо значение функции  $z = 1 + \sqrt{y + x^2}$  в точке  $M(0,99; 0,02)$ .



ВАРИАНТ № 19

1) Найдите и постройте область определения функции

$$z = \sqrt{2x + 2y + 6} - \ln(4y - x + 4).$$

2) Докажите, что функция  $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$  удовлетворяет уравнению

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = -2z.$$

3) Найти все частные производные второго порядка от функции  $u = y \cos \frac{2x}{y}$ .

Найти указанные частные производные сложной функции

4)  $z = x^3 - y^3$ ,  $x = u \cdot v$ ,  $y = u^2 + v^2$ ;  $\frac{\partial z}{\partial u} = ?$   $\frac{\partial z}{\partial v} = ?$   $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = ?$

5)  $z = \frac{3}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ,  $x = r \cos t$ ,  $y = r \sin t$  ( $r = \text{const}$ );  $\frac{dz}{dt} = ?$

6)  $z = f\left[\frac{x}{y}; x^2 - y^2\right] + \ln(x - y)$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = ?$

7) Функция  $y = y(x)$  задана неявно уравнением  $y^3 - 3y + 2x = 0$ . Найти  $\frac{dy}{dx}$ .

8) Функция  $z = z(x, y)$  задана неявно уравнением  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$ .

Найти  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

9) Для функции  $z = 3ux^2$  найти:

- а) производную в точке  $M(-9, 12)$  в направлении биссектрисы первого координатного угла;
- б)  $\text{grad} z$  в точке  $M(-9, 12)$ .

10) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $x^2 - 2y^2 - z^2 = 1$  в точке  $M(1, 1, 1)$ . Существует ли на поверхности точка, в которой нормаль на поверхности параллельна оси  $OZ$ ?

11) Исследовать на экстремум функцию  $z = x^2 - 2xy + y^4$ .

12) Записать формулу Тейлора до членов 3-го порядка малости для функции  $u = x^4 + y^3 + z^2xy + x^2y^2z^2$  в окрестности точки  $M(1, 1, 0)$ .

13) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции  $z = x^2 + y^2 - 2x - 4y$  в замкнутой области, ограниченной линиями  $x = 2$ ,  $y = 2$ ,  $x + y - 4 = 0$ .

14) Вычислить приближённо  $2,003^2 \cdot 3,998^3$ .

**ВАРИАНТ № 20**

1) Найдите и постройте область определения функции

$$z = \sqrt{y - 2x + 4} - \lg(x + 2y + 6).$$

2) Докажите, что функция  $z = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$  удовлетворяет уравнению

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}.$$

3) Найти все частные производные второго порядка от функции  $u = \arccos \sqrt{\frac{x}{y}}$ .

Найти указанные частные производные сложной функции

4)  $z = \sqrt{xy}$ ,  $x = u^2 - v^2$ ,  $y = e^{uv}$ ;  $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$   $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$   $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - ?$

5)  $z = \ln \cos \frac{\sqrt{x}}{y}$ ,  $x = \sqrt[3]{t+1}$ ,  $y = 3^t$ ;  $\frac{dz}{dt} - ?$

6)  $z = f[xy; x^2 - y^2] + \varphi(xy)$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция  $y = y(x)$  задана неявно уравнением  $x^3 + y^3 - 2xy - 0$ . Найти  $\frac{dy}{dx}$ .

8) Функция  $z = z(x, y)$  задана неявно уравнением  $z^3 + zxy - x = 0$ . Найти  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

9) Для функции  $z = \ln\left(x + \frac{1}{y}\right)$  найти:

а) производную в точке  $M(1,1)$  в направлении от точки  $M$  к точке  $O(0,0)$ ;

б)  $grad z$  в точке  $M(1,1)$ .

10) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $2z + y^2 + x^2 = 0$  в точке  $M(1,1,-1)$ . Существует ли на поверхности точка, в которой нормаль к поверхности параллельна оси  $OY$ ?

11) Исследовать на экстремум функцию  $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$ .

12) Записать формулу Тейлора до членов 3-го порядка малости для функции  $u = x^2 + y^3 + zxy + x^3 y^3 z^3$  в окрестности точки  $M(1,1,1)$ .

13) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции  $z = xy^2 - 3x^2$  в замкнутой области, ограниченной линиями  $x = -1, y = -1, x = 0, y = 0$ .

14) Вычислить приближённо  $e^{1,02} \cdot 2,96$ .