

Домашнее задание по теме «ФНП: определение, предел»

Найти область определения функций:

1) 2987. $z = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{x-y}}$;

2) 2990. $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$;

3) 2998. $z = \ln x - \ln \sin y$;

4) 2992. $z = \frac{\sqrt{4x - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)}$;

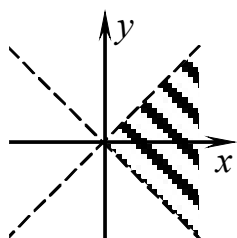
Найти пределы или доказать, что они не существуют:

6) 3005. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}$

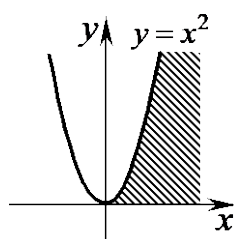
7) 3003. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{1 + x^2 + y^2} - 1}$

8) 3008. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1 + x^2 y^2)^{-\frac{1}{x^2 + y^2}}$

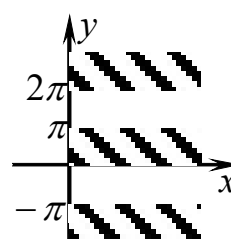
Ответы: 1)



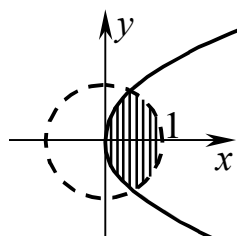
2)



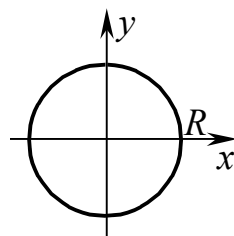
3)



4)



5)



6) 0;

7) 2;

8) 1.

Домашнее задание по теме «Дифференцирование ФНП №1»

1) 3071. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = (2x + y)^{2x+y}$.

2) 3089. Найти $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{x=y=z=1}$, если $u = \ln(1 + x + y^2 + z^3)$.

3) 3187. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если $z = \operatorname{arctg}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$.

4) 3191. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если $z = y^{\ln x}$.

5) 3193. Найти $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$, если $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2xz}$.

6) 3196. Найти $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$, если $u = \sin(xy)$.

7) 3414.

Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности

$$z = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \text{ в точке } M_0\left(1; 1; \frac{\pi}{4}\right).$$

Ответ: $x - y + 2z - \frac{\pi}{2} = 0$, $\frac{x-1}{-1/2} = \frac{y-1}{1/2} = \frac{z-\pi/4}{1}$.

8) 3423.

Показать, что поверхности

$$x + 2y - \ln z + 4 = 0 \text{ и } x^2 - xy - 8x + z + 5 = 0$$

касаются друг друга в точке $M_0(2; -3; 1)$ (т.е. имеют в этой точке общую касательную плоскость)

Ответ: $x + 2y - z - 3 = 0$.

9) 3435.

На поверхности $x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z = 12$ найти точки, в которых касательные плоскости параллельны координатным плоскостям.

Ответ: параллельно плоскости xOy : $M_1(0; 3; 3)$ и $M_2(0; 3; -7)$;

параллельно плоскости xOz : $M_3(0; 8; -2)$ и $M_4(0; -2; -2)$;

параллельно плоскости yOz : $M_5(5; 3; -2)$ и $M_6(-5; 3; -2)$;

10) В какой точке эллипсоида $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ нормаль к нему образует

равные углы с осями координат?

Ответ: $M_{1,2}(\pm 4/3; \pm 4/3; 1/3)$.

Домашнее задание по теме «Дифференцирование ФНП №2»

1) 3127. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z = x^2 y - y^2 x$, $x = u \cos v$, $y = u \sin v$.

2) 3126. Найти $\frac{\partial z}{\partial t}$, если $z = \arcsin(x - y)$, $x = 3t$, $y = 4t^3$.

3) 3131. Найти $\frac{\partial u}{\partial x}$, если $u = \arcsin\left(\frac{x}{z}\right)$, $z = \sqrt{x^2 + 1}$.

4) 3137.

Доказать, что функция $z = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$, где $x = u + v$, $y = u - v$, удовле-

творяет соотношению $\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u - v}{u^2 + v^2}$.

5) 3152. Найти $\frac{dy}{dx}$, если $\operatorname{arctg}\left(\frac{x + y}{a}\right) - \frac{y}{a} = 0$.

Ответ: $\frac{dy}{dx} = \frac{a^2}{(x + y)^2}$.

6) 3155. Найти $\frac{dy}{dx}$, если $y^x = x^y$.

Ответ: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y^x \ln y - yx^{y-1}}{xy^{x-1} - x^y \ln x}$.

7) 3164. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $e^z - xyz = 0$.

Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{e^z - xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{e^z - xy}$.

8) 3163. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z^3 + 3xyz = a^2$.

Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-3yz}{3z^2 + 3xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-3xz}{3z^2 + 3xy}$.

9) 3114. Вычислить приближенно $\ln(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1)$.

Ответ: 0,005.

10) Вычислить приближенно $\sqrt{1,02^3 + 1,97^3}$.

Ответ: 2,95.

Домашнее задание по теме «Экстремумы ФНП»

Найти экстремумы функций:

1) 3272.

$$z = 4(x - y) - x^2 - y^2$$

Ответ: $M(2; -2)$ – точка максимума.

2) 3276.

$$z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$$

Ответ: $M_1(5; 6)$ – точка минимума.

3) $z = x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5$.

Ответ: экстремумов нет.

Домашнее задание по теме «Производная по направлению. Градиент»

1) 3455(1,2).

1) Найти производную функции $u = xy^2 + z^3 - xyz$ в точке $M(1; 1; 2)$ в направлении, образующем с осями координат углы соответственно в 60° , 45° , 60° .

2) Найти производную функции $w = xyz$ в точке $A(5; 1; 2)$ в направлении \overline{AB} , где $B(9; 4; 14)$.

Ответ: 1) $\frac{\partial u}{\partial \ell}(M) = 5$; 2) $\frac{\partial u}{\partial \ell}(A) = \frac{98}{13}$.

3) 3442.

Каково направление наибольшего изменения функции $\varphi(x, y, z) = x \sin z - y \cos z$ в начале координат?

Ответ: $\text{grad}\varphi(0; 0; 0) = \{0; -1; 0\}$.