

Тема 1 «Нахождение определенных интегралов по формуле Ньютона – Лейбница»

Найти интегралы по формуле Ньютона – Лейбница:

$$1) \int_0^1 \sqrt{1+x} dx$$

$$2) \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{x^2 - x + 1}{x(x^2 + 1)} dx$$

$$3) \int_0^{64} \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[3]{x+1}}$$

$$4) \int_0^5 \frac{x dx}{\sqrt{3x+1}}$$

$$5) \int_0^{\pi/3} x^2 \cos 3x dx$$

$$6) \int_{-1}^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$7) \int_{-2}^2 \frac{x^5 + x^4 + 6x^3 - 9x^2 - x}{x^2 - 9} dx$$

$$8) \int_0^1 \frac{x+1}{x^2 + 4x + 5} dx$$

$$9) \int_{-1}^3 \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}$$

$$10) \int_0^3 \sqrt{\frac{x}{6-x}} dx$$

$$11) \int_0^1 \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x + e^{-x}}} dx$$

$$12) \int_{-1}^1 \frac{\sin^3 x \cos^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} dx$$

$$13) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx$$

$$14) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{(x^3 + 1)}{x^2 \cdot \sqrt{4-x^2}} dx$$

$$15) \int_2^4 \frac{4-x}{x^2 + x - 2} dx$$

$$16) \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(1+x)^4}$$

Домашнее задание по теме «Нахождение определенного интеграла по формуле Ньютона – Лейбница»

Найти интегралы:

1) № 2301. $\int_1^2 \frac{dx}{x+x^3}$; **Ответ:** $\ln \sqrt{\frac{8}{5}}$.

2) № 2311. $\int_0^{\pi/4} \frac{x \sin x dx}{\cos^3 x}$; **Ответ:** $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

3) № 2309. $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx$; **Ответ:** $4 - \pi$.

4) № 2310. $\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 5x + 1}}$; **Ответ:** $\ln \frac{7 + 2\sqrt{7}}{9}$.

5) № 2308. $\int_0^{\sqrt{3}} x^5 \cdot \sqrt{1+x^2} dx$; **Ответ:** $\frac{848}{105}$.

Тема 2 «Приложения определенного интеграла»

- 1) Найти площадь криволинейной трапеции с основанием $[1; 3]$, ограниченную кривой $y = x^3 - 8x^2 + 12x$. **Ответ:** 7,5.
- 2) Найти площадь области, заключенной между параболой $x^2 = 4y$ и кривой $y = \frac{8}{x^2 + 4}$. **Ответ:** $2\pi - \frac{4}{3}$.
- 3) Найти площадь области, ограниченной линиями $x = \sqrt{y+1}$, $y = 0$, $x = 1 + \sqrt{4-y}$. **Ответ:** 3.
- 4) Найти площадь области, ограниченной эллипсом $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t \end{cases}$ ($a, b > 0$). **Ответ:** $S = \pi ab$.
- 5) Найти площадь области, ограниченной кривой $\begin{cases} x = a \sin t, \\ y = b \sin 2t \end{cases}$ ($a, b > 0$). **Ответ:** $S = \frac{8}{3} ab$.
- 6) Найти длину дуги кривой $y = (1+x)^{3/2}$, если $0 \leq x \leq 3$. **Ответ:** $\ell = \frac{1}{27}(40^{3/2} - 13^{3/2})$.
- 7) Найти длину дуги одной арки циклоиды $\begin{cases} x = r(t - \sin t), \\ y = r(1 - \cos t), \end{cases} 0 \leq t \leq 2\pi$. **Ответ:** $\ell = 8r$.
- 8) Найти длину кардиоиды $r = a(\cos \varphi + 1)$ ($a > 0$). **Ответ:** $\ell = 8a$.

**Домашнее задание по теме
«Приложения определенного интеграла»**

1) № 2474.

Найдите площадь области, ограниченной замкнутой линией $y^2 = (1 - x^2)^3$.

Ответ: $3\pi/4$.

2) № 2483.

Найдите площадь области, ограниченной линиями $y = \ln x$ и $y = \ln^2 x$.

Ответ: $3 - e$.

3) № 2490.

Найдите площадь области, ограниченной одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и осью Ox .

Ответ: $3\pi a^2$.

4) № 2496.

Найдите площадь области, ограниченной линией $r = a \sin 2\varphi$ (двупестковая роза).

Ответ: $\pi a^2/4$.

5) № 2523.

Найдите длину дуги линии $y = \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)$ от $x = a$ до $x = b$.

Ответ: $\ln\left(\frac{e^{2b} - 1}{e^{2a} - 1}\right) - b + a$.

6) № 2545.

Найдите длину дуги гиперболической спирали $r\varphi = 1$ от $\varphi_1 = 3/4$ до $\varphi_2 = 4/3$.

Ответ: $5/12 - \ln(2/3)$.

7) № 2538.

Найдите длину петли линии $x = t^2$, $y = t - \frac{1}{3} \cdot t^3$.

Ответ: $4\sqrt{3}$.

Тема 3 «Приложения определенного интеграла»

1. Найти объем тела, ограниченного эллипсоидом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Ответ: $V = \frac{4}{3}\pi abc$.

2. Найти объем тела, которое образовано вращением вокруг оси Ox области, ограниченной линиями $y = 1 - x^2$, $y = 0$.

Ответ: $V_x = \frac{16}{15}\pi$.

3. Найти объем тела, которое образовано вращением вокруг оси Oy области, ограниченной линиями $y = \sin x$, $y = 1$, $x = 0$ ($x \geq 0$).

Ответ: $V_y = \frac{\pi(\pi^2 - 8)}{4}$.

4. Найти объем тела, которое образовано вращением вокруг оси Ox области, ограниченной линиями $y = x^2$, $x = y^2$

Ответ: $V_x = \frac{3}{10}\pi$.

5. Найти объем тела, которое образовано вращением вокруг оси Oy области, ограниченной линиями $y = x$, $y = x^2$.

Ответ: $V_y = \frac{\pi}{6}$.

Тема 4 «Несобственные интегралы»

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$1) \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{1+x}$$

$$6) \int_{-1}^1 \frac{e^{1/x}}{x^3} dx$$

$$2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$$

$$7) \int_{-1/8}^1 \frac{\ln(1 + \sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x^2}} dx$$

$$3) \int_0^{1/e} \frac{dx}{x \ln^2 x}$$

$$8) \int_0^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$4) \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$$

$$9) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1-x^2}$$

$$5) \int_3^5 \frac{x dx}{\sqrt{8x - x^2} - 15}$$

$$10) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2}$$

Домашнее задание по теме «Несобственные интегралы»

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

1) № 2372. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$; **Ответ:** $1 - \ln 2$.

2) № 2380. $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx$; **Ответ:** $\frac{1}{2}$.

3) № 2369. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x dx}{x^2 + 1}$; **Ответ:** расходится.

4) № 2396. $\int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}}$; **Ответ:** $\frac{8}{3}$.

5) № 2404. $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2+2\sqrt{1-x^2}}$; **Ответ:** $\frac{2\pi}{6\sqrt{3}}$.

6) № 2405. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}$; **Ответ:** $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

7) № 2395. $\int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}$; **Ответ:** расходится.

8) № 2426. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$; **Ответ:** π .

Тема 5 «Признаки сходимости несобственных интегралов»

Исследовать сходимость интегралов:

$$1) \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{x^3 + 1}$$

$$9) \int_0^1 \frac{e^x dx}{\sqrt{1 - \cos x}}$$

$$2) \int_1^{+\infty} \frac{x + \sqrt{x+1}}{x^2 + 2\sqrt{x^4 + 1}} dx$$

$$10) \int_0^1 \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[5]{1 - x^3}} dx$$

$$3) \int_2^{+\infty} \frac{\sqrt[7]{3 + 2x^2}}{\sqrt[5]{x^3 - 1}}$$

$$11) \int_0^2 \frac{\ln(1 + \sqrt[5]{x^3}) dx}{e^{\sin x} - 1}$$

$$4) \int_1^{+\infty} \left(1 - \cos \frac{2}{x}\right) dx$$

$$12) \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2 + 1} dx}{\sqrt[3]{16 - x^4}}$$

$$5) \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{x}}{1 + x\sqrt{x}} dx$$

$$13) \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(1 - x^2)^5}}$$

$$6) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x + \sin^2 x}$$

$$14) \int_0^1 \frac{dx}{x - \sin x}$$

$$7) \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x^2 + 1) dx}{x}$$

$$15) \int_0^1 \frac{\cos x dx}{\sqrt[4]{x} - \sin x}$$

$$8) \int_1^{+\infty} \frac{3 + \cos x}{\sqrt{x}} dx$$

$$16) \int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x}$$

$$9) \int_1^{+\infty} \frac{3 + \cos x}{x\sqrt{x}} dx$$

$$19) \int_0^1 \frac{\sin \frac{1}{x}}{x} dx$$

**Домашнее задание по теме
«Признаки сходимости несобственных интегралов»**

Исследовать сходимость несобственных интегралов с помощью признаков сходимости:

1) № 2387. $\int_1^{+\infty} \frac{x^3 + 1}{x^4} dx;$ **Ответ:** расходится.

2) № 2388. $\int_0^{+\infty} \frac{x^{13}}{(x^5 + x^3 + 1)^3} dx;$ **Ответ:** сходится.

3) № 2390. $\int_0^{+\infty} \sqrt{x} \cdot e^{-x} dx;$ **Ответ:** сходится.

4) № 2392. $\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln \ln x};$ **Ответ:** расходится.

5) № 2412. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{1-x^4}};$ **Ответ:** сходится.

6) № 2413. $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}};$ **Ответ:** расходится.

7) № 2415. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{e^{\sin x} - 1};$ **Ответ:** сходится.

8) № 2417. $\int_0^{\pi/2} \frac{\ln \sin x}{\sqrt{x}} dx;$ **Ответ:** сходится.