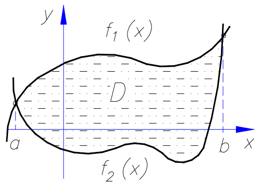
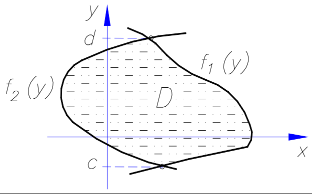
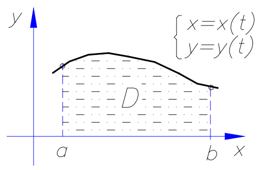
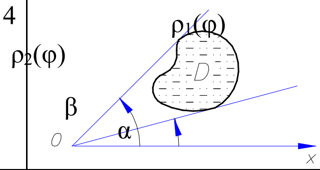
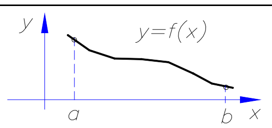
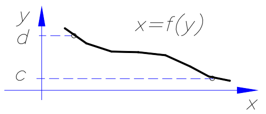
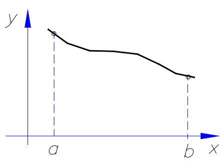
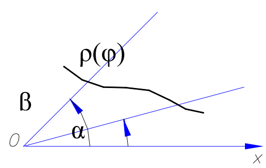
ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Теорема. Если величина Q обладает на $[a,b]$

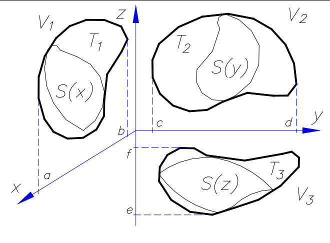
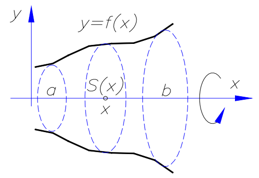
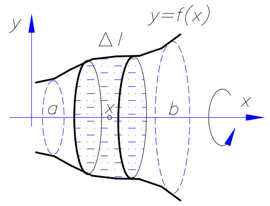
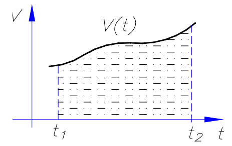
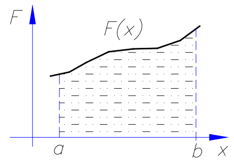
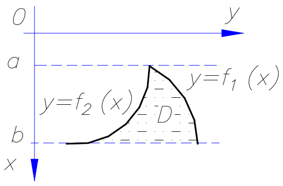
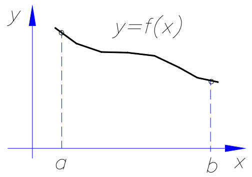
1. свойством аддитивности, а именно, если $a = x_0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n = b$, то $Q=\Delta Q_1+\Delta Q_2+\ldots+\Delta Q_n$, где ΔQ_i - значение Q на $[x_{i-1},x_i]$, $i=1,2,\ldots n$;
2. свойством линейности Q в малом: $\Delta Q \approx f(x)\Delta x$, где $f(x)$ – интегрируемая на $[a,b]$ функция,

то величину Q можно найти интегралом от ее элемента $dQ = f(x)dx$ по промежутку $[a,b]$:

$$Q=\int_a^b f(x)dx$$

Q	№	Чертеж	Система координат и пояснения	Формула	Q
S, площадь плоской фигуры, D	1		Д. С. К. $D=\left\{\begin{matrix} a\le x\le b \\ f_2(x)\le y\le f_1(x)\end{matrix}\right\}$ Одна кривая границы области D не выше другой.	$S=\int_a^b(f_1(x)-f_2(x))dx$	S, площадь плоской фигуры, D
	2		Д. С. К. $D=\left\{\begin{matrix} c\le y\le d \\ f_2(y)\le x\le f_1(y)\end{matrix}\right\}$ Одна кривая границы области D не левее другой.	$S=\int_c^d(f_1(y)-f_2(y))dy$	
	3		Д. С. К. $\alpha\le t\le\beta$ $x(\alpha)=a,\ x(\beta)=b$ $(\ y(t)\ge 0,\ \forall t\in[\alpha,\beta]\ )$ Верхняя граница области задана параметрически	$S=\int_\alpha^\beta y(t)x'_t\,dt$	
	4		П. С. К. $D=\left\{\begin{matrix} \alpha\le\varphi\le\beta \\ \rho_2(\varphi)\le\rho\le\rho_1(\varphi)\end{matrix}\right\}$	$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta(\rho_1^2(\varphi)-\rho_2^2(\varphi))d\varphi$	
l, длина кривой, L	1		Д. С. К. $L=\left\{\begin{matrix} a\le x\le b \\ y=f(x)\end{matrix}\right\}$	$l=\int_a^b\sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx$	l, длина кривой, L
	2		Д. С. К. $L=\left\{\begin{matrix} c\le y\le d \\ x=f(y)\end{matrix}\right\}$	$l=\int_c^d\sqrt{1+(x'_t)^2}\,dy$	
	3		Д. С. К. $L=\left\{\begin{matrix} \alpha\le t\le\beta \\ x=x(t),\ y=y(t) \\ x(\alpha)=a,\ y(\beta)=b\end{matrix}\right\}$ Линия L задана параметрически	$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt$	
	4		П. С. К. $L=\left\{\begin{matrix} \alpha\le\varphi\le\beta \\ \rho=\rho(\varphi)\end{matrix}\right\}$	$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi$	

ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Q	№	Чертеж	Система координат и пояснения	Формула	Q
V, объем тела, T	1		Д. С. К. $T_1=\left\{\begin{matrix} a\le x\le b \\ S(x)\perp 0X \end{matrix}\right\}$ $T_2=\left\{\begin{matrix} c\le y\le d \\ S(y)\perp 0Y \end{matrix}\right\}$ $T_3=\left\{\begin{matrix} e\le z\le f \\ S(z)\perp 0Z \end{matrix}\right\}$	$V_1=\int_a^b S(x)dx$ $V_2=\int_a^b S(y)dy$ $V_3=\int_e^f S(z)dz$	V, объем тела, T
	2		Д. С. К. $T=\left\{\begin{matrix} a\le x\le b,\ y=f(x) \\ \pi y^2=S(x)\perp 0X \end{matrix}\right\}$ Тело T образовано вращением кривой $y=f(x)$ вокруг оси $0X$	$V=\pi\int_a^b y^2(x)dx$	
σ, площадь поверхн. ω	1		Д. С. К. $\omega_x=\left\{\begin{matrix} a\le x\le b \\ y=f(x) \\ \Delta\sigma=2\pi\, y(x)\Delta l \end{matrix}\right\}$ Поверхность ϖ образована вращением кривой $y=f(x)$ вокруг оси $0X$	$\sigma_x=2\pi\int_a^b y(x)\sqrt{1+(y_x')^2}\,dx$	σ, площадь поверхн. ω
			Д. С. К. $\omega_x=\left\{\begin{matrix} \alpha\le t\le\beta \\ y=y(t),\ x=x(t) \\ \Delta\sigma=2\pi\, y(t)\Delta l \end{matrix}\right\}$ Поверхность ϖ образована вращением кривой $y=f(x(t))$, заданной параметрически, вокруг оси $0X$	$\sigma_x=2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt$	
S, путь	1		Д. С. К. $V=\left\{\begin{matrix} t_1\le t\le t_2 \\ V=V(t) \end{matrix}\right\}$ V – скорость прямолинейного движения тела на промежутке времени $[t_1,t_2]$	$s=\int_{t_1}^{t_2} V(t)dt$	S, путь
A, работа	1		Д. С. К. $F=\left\{\begin{matrix} a\le x\le b \\ F=F(x) \end{matrix}\right\}$ Сила F направлена параллельно оси $0X$ на промежутке $[a,b]$	$A=\int_a^b F(x)dx$	A, работа
P, давл	1		Д. С. К. $D=\left\{\begin{matrix} a\le x\le b \\ f_2(x)\le y\le f_1(x) \\ \Delta P=gx\mu(x)(f_1(x)-f_2(x)) \end{matrix}\right\}$ μ - плотность жидкости, давящей на пластину D	$P=g\int_a^b x\mu(x)(f_1(x)-f_2(x))dx$	P, давл
m, масса	1		Д. С. К. $L=\left\{\begin{matrix} a\le x\le b,\ y=f(x) \\ \Delta m=\mu(x)\Delta l \end{matrix}\right\}$ μ - плотность на кривой L	$m=\int_a^b \mu(x)\sqrt{1+(y_x')^2}\,dx$	m, масса

Статические моменты относительно координатных осей S_x, S_y, моменты инерции M_x, M_y, координаты центра тяжести x_c, y_c плоской кривой

$$y=f(x),\ a\le x\le b,\ dl=\sqrt{1+(y_x')^2}\,dx=\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt=\sqrt{\rho^2+(\rho_\varphi')^2}\,d\varphi$$

$$S_x=\int_a^b \mu(x)y\,dl\quad S_y=\int \mu(x)x\,dl\quad M_x=\int_a^b \mu(x)y^2\,dl\quad M_y=\int_a^b \mu(x)x^2\,dl\quad x_c=\frac{S_y}{m}\quad y_c=\frac{S_x}{m}$$