Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Томский политехнический университет
Томский государственный университет

В. Н. Задорожный, В. Ф. Зальмеж, А. Ю. Трифонов, А. В. Шаповалов

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
для технических университетов

Интегральное исчисление

Учебное пособие

Допущено Учебно-методическим объединением по образованию в области прикладной математики и управления качеством в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности 073000 – Прикладная математика

Издательство ТПУ

Томск 2006

УДК 581
Б14

Б14 **В. Н. Задорожный, В. Ф. Зальмеж,**
А. Ю. Трифонов, А. В. Шаповалов
Высшая математика для технических университетов. III.
Интегральное исчисление: Учебное пособие. —
Томск: Изд-во ТПУ, 2006. — 665 с.

Настоящее пособие представляет собой изложение первой части курса «Высшая математика» и содержит материал по разделам этого курса: «Интегральное исчисление». Оно содержит теоретический материал в объёме, предусмотренном ныне действующей программой курса высшей математики для инженерно-физических и физических специальностей университетов. Теоретический курс дополнен индивидуальными заданиями для самостоятельного решения по каждому разделу. Предлагаемое пособие может быть полезно студентам старших курсов, магистрантам и аспирантам, специализирующимся в области теоретической и математической физики.

Пособие предназначено для студентов физических и инженерно-физических специальностей.

УДК 581

Рекомендовано к печати Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета

Работа частично поддержана грантом Президента Российской Федерации
№ МД-246.2003.02

Рецензенты

Доктор физико-математических наук, профессор Томского государственного
педагогического университета, г. Томск
Бухбиндер И.Л.

Доктор физико-математических наук, профессор Томского государственного
университета, г. Томск
Багров В.Г.

Содержание

ЧАСТЬ I
Интегральное исчисление

ГЛАВА 1
Интегральное исчисление функции одной переменной

1. Первообразная. Неопределенный интеграл, его свойства

В разделе «Функции одной переменной» главы «Дифференциальное исчисление» мы ввели понятие производной и научились находить производную элементарных функций. Здесь мы будем решать обратную задачу: известна производная $f'(x)$ от функции $f(x)$ и требуется найти саму функцию.

С точки зрения механической это означает, что по известной скорости движения материальной точки необходимо восстановить закон ее движения.

♦ Функция $F(x)$ называется первообразной функцией для функции $f(x)$ на $]a,b[$, если $F(x)$ дифференцируема на $]a,b[$ и $F'(x) = f(x)$.

Аналогично дается понятие первообразной на $[a,b]$, но в точках a и b нужно рассматривать односторонние пределы.

Например, $F(x) = \sqrt{x}$ есть первообразная для функции $f(x) = 1/2\sqrt{x}$ на $]0,\infty[$, так как $(\sqrt{x})' = 1/2\sqrt{x}$; $F(x) = \sin 2x$ есть первообразная для функции $f(x) = 2\cos 2x$ на $]-\infty,\infty[$, так как $F'(x) = (\sin 2x)' = 2\cos 2x$, а $F(x) = \ln|x|$ есть первообразная для функции $f(x) = 1/x$ на $]0,\infty[$, так как $(\ln|x|)' = 1/x$.

Теорема 1.1. *Если $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ на $]a,b[$, то $F(x)+C$, где C – любое постоянное число, также является первообразной для этой функции.*

Доказательство. Продифференцировав $(F(x)+C)' = F'(x) = f(x)$, убеждаемся в справедливости утверждения.

Теорема 1.2. *Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две первообразные для функции $f(x)$ на $]a,b[$, то $F_1(x) - F_2(x) = C$ на $]a,b[$, где C – некоторая постоянная.*

Доказательство. По условию $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$. Составим функцию $\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x)$. Очевидно, что

$$\Phi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

для всех $x \in]a,b[$. Отсюда в силу теоремы 1.1 следует, что $\Phi(x) = C$, т.е. $F_1(x) - F_2(x) = C$.

Таким образом, из теорем 1.1 и 1.2 следует, что если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на $]a,b[$, то любая другая первообразная $\Phi(x)$ для $f(x)$ на $]a,b[$ имеет вид $\Phi(x) = F(x) + C$, где C – константа.

♦ Семейство первообразных $F(x)+C$ для функции $f(x)$ на $]a,b[$ называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ и обозначается символом

$$\int f(x)dx. \tag{1.1}$$

Знак $\int$ называется интегралом; $f(x)dx$ – подынтегральным выражением, $f(x)$ – подынтегральной функцией, а x – переменной интегрирования.

Итак, если $F(x)$ – одна из первообразных для $f(x)$, то, согласно определению,

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \tag{1.2}$$

где C – произвольная постоянная.

Операция нахождения неопределенного интеграла называется интегрированием функции $f(x)$. Отметим, что если $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$, то подынтегральное выражение $f(x)dx = F'(x)dx = d[F(x)]$ является дифференциалом первообразной $F(x)$.

♢ Дифференцирование есть действие прямое и однозначное, так как непрерывная функция $F(x)$ не может иметь двух различных производных. Так, если $F(x) = \sin x$, то $F'(x) = (\sin x)' = \cos x$ одна. Интегрирование есть действие обратное, и оно есть действие многозначное, дающее для заданной функции $f(x)$ не один результат $F(x)$, а бесчисленное их множество $F(x) + C$.

Доказывается, что если $f(x)$ непрерывна на $]a, b[$, то для нее существует первообразная на $]a, b[$, а следовательно, и неопределенный интеграл.????

Учение об интегрировании функций и свойствах их первообразных называется интегральным исчислением.

Отметим ряд свойств неопределенного интеграла, следующих из его определения.

Свойства неопределенного интеграл

Свойство 1. Справедливо соотношение

$$d\int f(x)dx = f(x)dx.$$

Действительно,

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Отсюда

$$d\int f(x)dx = d[F(x) + C] = dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx.$$

Свойство 2. Справедливо соотношение

$$\int dF(x) = F(x) + C,$$

Имеем

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} F(x) + C.$$

♢ Из свойств 1 и 2 следует, что операции вычисления интеграла и дифференциала взаимно обратны, (за исключением, того что к $F(x)$ нужно добавить некоторую постоянную C).

Свойство 3. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла

$$\int Af(x)dx = A\int f(x)dx + C,$$

где A – постоянное число, C – некоторая постоянная.

Продифференцировав левую и правую части соотношения, убеждаемся в справедливости утверждения.

Свойство 4. Интеграл от суммы равен сумме интегралов

$$\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx + C,$$

где C – некоторая постоянная.

Действительно,

$$\left[\int f(x)dx + \int g(x)dx\right]' = \left[\int f(x)dx\right]' + \left[\int g(x)dx\right]' \overset{\text{def}}{=} f(x)+g(x).$$

С другой стороны,

$$\left\{\int [f(x)+g(x)]dx\right\}' \overset{\text{def}}{=} f(x)+g(x),$$

т.е. функции

$$\int f(x)dx + \int g(x)dx \quad \text{и} \quad \int [f(x)+g(x)]dx$$

являются первообразными одной и той же функции $f(x)+g(x)$. Но тогда они отличаются на некоторую постоянную C.

Свойство 5. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции.

Действительно, из определения интеграла следует

$$\left[\int f(x)dx\right]' = [F(x)+C]' = f(x).$$

2. Таблица основных формул интегрирования

При нахождении неопределенных интегралов пользуются таблицей интегралов, которую легко составить, с помощью таблицы производных и определения неопределенного интеграла. Справедливость равенств, приведенных в ней, можно проверить дифференцированием.

1. $\displaystyle\int 0\cdot dx = C;$
2. $\displaystyle\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1;$
3. $\displaystyle\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad x \neq 0;$
4. $\displaystyle\int dx = x + C;$
5. $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a < 0,\ a \neq 1;$

$$\int e^x dx = e^x + C;$$

6. $$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$

7. $$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,$$

8. $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C, \end{cases} \qquad 1 < x < 1;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C;$$

9. $$\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arcctg} x + C; \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C;$$

10. $$\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C;$$

$$\int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C;$$

11. $$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C, \quad x \neq 0;$$

12. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C = \begin{cases} \operatorname{Arcsh} x + C, \\ \operatorname{Arcch} x + C; \end{cases}$$

13. $$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C, \quad |x| \neq 1;$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C, \quad |x| \neq a.$$

Доказано, что следующие интегралы не выражаются через элементарные функции:

1. $\displaystyle\int e^{-x^2} dx$ – интеграл Пуассона;
2. $\displaystyle\int \cos x^2 dx, \quad \int \sin x^2 dx$ – интегралы Френеля;
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\ln x}$ – интегральный логарифм;
4. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{x} dx$ – интегральный косинус;
5. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{x} dx$ – интегральный синус.

Эти интегралы хотя и существуют, но не выражаются через элементарные функции. Существуют способы их вычисления с помощью бесконечных степенных рядов, которые мы рассмотрим позднее.

3. Методы интегрирования

3.1. Непосредственное интегрирование. Подведение под знак дифференциала

Дан $\int f(x)dx$, требуется найти для $f(x)$ первообразную $F(x)$.

Метод непосредственного интегрирования состоит в том, что подынтегральное выражение $f(x)dx$ данного интеграла сравнивается с подынтегральными выражениями табличных интегралов и, если оно там есть, то интеграл найден. Если же он там отсутствует, то его нужно привести к одному из табличных, употребляя те или иные приемы, некоторые из которых требуют большой изобретательности, удачи, «математического чутья», и достигнуть этого можно только практикой.

Пример 3.1. Найти

$$\int \sqrt[3]{x}dx.$$

Решение. Запишем этот интеграл в виде

$$\int \sqrt[3]{x}dx = \int x^{1/3}dx.$$

Получили табличный интеграл:

$$\int x^{1/3}dx = \frac{x^{1/3+1}}{1/3+1} + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + C.$$

Пример 3.2. Найти

$$\int \sin 3x dx.$$

Решение. Запишем этот интеграл в виде

$$\int \sin 3x dx = \frac{1}{3}\int \sin 3x d(3x).$$

Получили табличный интеграл:

$$\int \sin 3x d(3x) = -\frac{1}{3}\cos 3x + C.$$

Пример 3.3. Найти

$$\int \frac{dx}{x-2}.$$

Решение. Заметим, что $d(x-2) = dx$. Тогда интеграл запишется в виде

$$\int \frac{dx}{x-2} = \int \frac{d(x-2)}{x-2}.$$

Это табличный интеграл:

$$\int \frac{d(x-2)}{x-2} = \ln|x-2| + C.$$

Пример 3.4. Найти

$$\int \cos mx \, dx.$$

Решение. Заметим, что $d(mx) = m\,dx$. Тогда интеграл запишется в виде

$$\int \cos mx \, dx = \frac{1}{m} \int \cos mx \, d(mx).$$

Это табличный интеграл:

$$\frac{1}{m} \int \cos mx \, d(mx) = \frac{1}{m} \sin mx + C.$$

Пример 3.5. Найти

$$\int \cos x \sin^3 x \, dx.$$

Решение. Заметим, что $d(\sin x) = \cos x \, dx$. Тогда интеграл запишется в виде

$$\int \cos x \sin^3 x \, dx = \int \sin^3 x \, d(\sin x).$$

Это табличный степенной интеграл:

$$\int \sin^3 x \, d(\sin x) = \frac{1}{4} \sin^4 x + C.$$

Пример 3.6. Найти

$$\int \frac{3x^2 - 4x - 1}{x^3 - 2x^2 - x + 1} dx.$$

Решение. Заметим, что

$$d(x^3 - 2x^2 - x + 1) = (3x^2 - 4x - 1)dx,$$

т.е. числитель является дифференциалом знаменателя. Тогда интеграл запишется в виде

$$\int \frac{3x^2 - 4x - 1}{x^3 - 2x^2 - x + 1} dx = \int \frac{d(x^3 - 2x^2 - x + 1)}{x^3 - 2x^2 - x + 1}.$$

Получили табличный интеграл:

$$\int \frac{d(x^3 - 2x^2 - x + 1)}{x^3 - 2x^2 - x + 1} = \ln|x^3 - 2x^2 - x + 1| + C.$$

3.2. Интегрирование методом подстановки и замены переменных

Пусть требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, который не является табличным и непосредственно не находится. Один из наиболее эффективных приемов интегрирования – замена переменных.

Идея этого метода состоит в том, что при нахождении интеграла переменную x заменяют некоторой новой независимой переменной t по формуле $x = \varphi(t)$.

Теорема 3.1. *Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена и дифференцируема на интервале $]c, d[$ и пусть для функции $f(x)$ существует на интервале $]a, b[$ первообразная $F(x)$, т.е.*

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \tag{3.1}$$

Тогда всюду на $]c, d[$ для функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ существует первообразная, равная $F(\varphi(t))$, т.е.

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C. \tag{3.2}$$

Доказательство. Действительно,

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = F'_x(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Следовательно,

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(x)dx\Big|_{x=\varphi(t)}. \tag{3.3}$$

♦ Формула (3.3) называется формулой интегрирования подстановкой.

♢ Формулу (3.2) можно использовать использовать в обратном порядке

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}. \tag{3.4}$$

♦ Соотношение (3.4) называется формулой интегрирования заменой переменных.

♢ Подстановка $x = \varphi(t)$ должна быть такой, получившийся интеграл был табличным или легко сводился к табличному.

Пример 3.7. Найти

$$\int e^{x^2} x\, dx.$$

Решение. 1. Сделаем подстановку $x^2 = t$, тогда $2x\, dx = dt$, т.е. $x\, dx = \frac{1}{2}dt$.

2. Следовательно,

$$\int e^{x^2} x\, dx = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + C,$$

где $t = x^2$. Окончательно имеем

$$\int e^{x^2} x\, dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

Пример 3.8. Найти
$$\int 4x^2\sqrt[3]{x^3+1}dx.$$

Решение. Сделаем подстановку $x^3+1=t^3$. Тогда $3x^2dx=3t^2dt$ и
$$4\int x^2\sqrt[3]{x^3+1}dx=4\int \sqrt[3]{t^3}dt=t^4+C,$$
где $t=\sqrt[3]{x^3+1}$. Окончательно получим
$$4\int x^2\sqrt[3]{x^3+1}dx=\sqrt[3]{(x^3+1)^4}+C.$$

3.3. Интегрирование по частям

Интегрированием по частям называется нахождение интеграла по формуле
$$\int u\,dv=uv-\int v\,du, \tag{3.5}$$
где u и v – дифференцируемые функции от x. С помощью формулы (3.5) отыскание интеграла $\int u\,dv$ сводится к нахождению другого интеграла: $\int v\,du$. Ее применение целесообразно в тех случаях, когда последний интеграл либо проще исходного, либо подобен ему.

Теорема 3.2. *Пусть даны две дифференцируемые на* $]a,b[$ *функции* $u(x)$ *и* $v(x)$. *Тогда*
$$d(uv)=v\,du+u\,dv. \tag{3.6}$$
Проинтегрировав обе части равенства, получим
$$\int d(uv)=\int v\,du+\int u\,dv.$$
Если существует интеграл $\int u\,dv$, *то существует и интеграл* $\int v\,du$, *причём*
$$uv=\int v\,du+\int u\,dv,$$
т.е.
$$\int u\,dv=uv-\int v\,du.$$

Это и есть формула интегрирования по частям, которая применяется к выражениям, представимым в виде произведения двух сомножителей. При этом в качестве u берётся функция, которая при дифференцировании упрощается, а в качестве dv – та часть подынтегрального выражения, интеграл от которой известен или может быть найден. Чтобы удачно разбить подынтегральное выражение на множители, нужна практика и некоторые рекомендации.

Пример 3.9. Найти
$$\int \ln x\,dx.$$

Решение. Применим интегрирование по частям. Положим $u = \ln x$, $dv = dx$, тогда $v = x$ и $du = dx/x$. Интеграл запишется в виде

$$\int \ln x\,dx = uv - \int v\,du = x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = x\ln x - x + C.$$

$\lozenge$ Если под знаком интеграла стоит произведение полинома на показательную функцию, то за u принимается полином.

Пример 3.10. Найти $\displaystyle\int x^2e^x dx.$

Решение. Чтобы найти интеграл, применим интегрирование по частям. Под знаком интеграла стоит произведение полинома $x^2 + 0x + 0$ на показательную функцию e^x. Положим $u = x^2$, $dv = e^x dx$, тогда $du = 2x\,dx$, $v = e^x$, и интеграл запишется в виде

$$\int x^2e^x dx = uv - \int v\,du = x^2e^x - \int 2xe^x dx.$$

Интеграл в этом выражении нельзя найти прямыми методами, поэтому применим снова интегрирование по частям. На этот раз положим $u = 2x$, $dv = e^x dx$, тогда $du = 2dx$, $v = e^x$, и получим

$$\int 2xe^x dx = uv - \int v\,du = 2xe^x - \int e^x 2dx = 2xe^x - 2e^x.$$

Окончательно запишем

$$\int x^2e^x dx = x^2e^x - (2xe^x - 2e^x) + C = (x^2 - 2x + 2)e^x + C.$$

$\lozenge$ Если подынтегральное выражение представляет собой произведение полинома $P_n(x)$ и тригонометрической или показательной функции, то за u нужно принимать полином, а за dv – тригонометрическую функцию.

Пример 3.11. Найти

$$1)\quad \int x\sin 2x\,dx;$$

$$2)\quad \int (x+1)\cos x\,dx.$$

Решение. Под знаком интеграла стоит произведение полинома x и тригонометрической функции $\sin 2x$, поэтому положим $u = x$, $dv = \sin 2x dx$, тогда $du = dx$, $v = -\frac{1}{2}\cos 2x$, а интеграл запишется в виде

$$\int x\sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}x\cos 2x - \int\Big(-\frac{1}{2}\Big)\cos 2x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\int \cos 2x\,d(2x) = -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

Аналогично находится второй интеграл.

$\lozenge$ Если подынтегральное выражение представляет собой произведение полинома $P_n(x)$ и логарифмической функции, то за u нужно принимать полином, а за dv – логарифмическую функцию.

Пример 3.12. Найти $\displaystyle\int (x+3)\ln x\,dx$.

Решение. Под знаком интеграла стоит произведение полинома x и логарифмической функции $\ln x$, поэтому положим $u = \ln x$, $dv = (x+3)dx$, тогда $du = dx/x$, $v = x^2/2 + 3x$, а интеграл запишется в виде

$$\int (x+3)\ln x\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + 3x\right)\ln x - \int\left(\frac{x}{2} + 3\right)dx = \frac{x^2}{6} + 3x + C.$$

◊ Если подынтегральное выражение представляет собой произведение полинома $P_n(x)$ на обратную тригонометрическую функцию, то за u нужно принимать обратную тригонометрическую функцию, а за dv – $P_n(x)dx$.

◊ Если подынтегральное выражение представляет собой произведение полинома показательной функции на тригонометрическую, то такие интегралы находятся следующим образом.

Пример 3.13. Найти $\displaystyle\int e^x\cos x\,dx$.

Решение. Для интегрирования по частям положим $u = e^x$, $dv = \cos x\,dx$, тогда $du = e^x dx$, $v = \sin x$, а интеграл запишется в виде

$$\int e^x\cos x\,dx = e^x\sin x - \int e^x\sin x\,dx.$$

Интеграл в этом выражении снова найдем интегрированием по частям, приняв $u = e^x$, $dv = \sin x\,dx$. Тогда $du = e^x dx$, $v = -\cos x$ и

$$\int e^x\sin x\,dx = -e^x\cos x - \int(-\cos x)e^x dx.$$

Теперь исходный интеграл запишется в виде

$$\int e^x\cos x\,dx = e^x\sin x + e^x\cos x - \int e^x\cos x dx + C.$$

Отсюда следует

$$2\int e^x\cos x\,dx = e^x\sin x + e^x\cos x + C,$$

т.е.

$$\int e^x\cos x\,dx = \frac{1}{2}[e^x(\sin x + \cos x) + C].$$

3.4. Разложение целой рациональной функции на простейшие множители

♦ Полиномом n-ой степени или целой рациональной функцией относительно x называется функция вида

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \quad \text{или} \quad \sum_{k=0}^{n} a_kx^k, \tag{3.7}$$

где $n \in \mathbb{Z}$ – целое число, степень полинома; a_k $(k = \overline{1,n})$ – коэффициенты полинома, действительные или комплексные числа, а x – переменная, которая может принимать как действительные, так и комплексные значения.

Если число $x = x_1$, будучи подставленным в (3.7), обращает полином в нуль, то оно называется корнем полинома.

Сформулируем без доказательств несколько теорем.

Теорема 3.3. *Если $a+ib$ – корень полинома (3.7), то и сопряженное значение $a-ib$ также является корнем этого полинома, т.е. комплексные корни целой рациональной функции попарно сопряженными.*

Теорема 3.4 (основная теорема алгебры). *Полином степени n (3.7) имеет на комплексной плоскости ровно n нулей (с учетом их кратности).*

Доказательство см., например, в [1].

Воспользовавшись основной теоремой алгебры, можно доказать еще одну.

Теорема 3.5. *Если полином n-ой степени (3.7) имеет n действительных и различных корней x_k, $k=\overline{1,n}$, то полином (3.7) можно разложить на n линейных множителей вида $(x-x_k)$ и множитель, равный коэффициенту при x^n, т.е.*

$$P_n(x) = a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n). \tag{3.8}$$

◊ В курсе средней школы было доказано, что полином второй степени (квадратный трёхчлен) ax^2+bx+c разлагается на множители:

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2),$$

где x_1 и x_2 есть действительные корни трёхчлена $P_2 = ax^2+bx+c$.

Если корни полинома (3.7) окажутся равными, т.е.

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x',$$

x' – корень кратности n, то полином (3.7) разлагается на множители так:

$$P_n(x) = a_n \underbrace{(x-x')(x-x')\cdots(x-x')}_{n \text{ множителей}} = a_n(x-x')^n. \tag{3.9}$$

Пусть среди корней полинома (3.7) есть кратные, т.е. x_1 – корень кратности α (корень повторяется α раз), x_2 – корень кратности β, x_m – корень кратности γ, причем кратность всех корней в сумме равна степени полинома ($\alpha+\beta+\cdots+\gamma=n$). Тогда, объединив одинаковые сомножители в разложении полинома на линейные множители, получим

$$P_n(x) = a_n(x-x_1)^\alpha(x-x_2)^\beta\cdots(x-x_n)^\gamma. \tag{3.10}$$

Например, корнями полинома $P_3(x) = x^3-3x+2$ будут $x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=-2$, т.е. этот полином имеет двукратный корень $x_1=x_2=1$. Следовательно, согласно (3.10), полином разлагается на следующие множители:

$$x^3-3x+2 = (x-1)^2(x+2).$$

Рассмотрим разложение полинома на множители в случае комплексных корней.

Пусть среди корней полинома (3.7) имеются комплексные $x_1 = a+ib$ и $x_2 = a-ib$. Умножив

$$(x-x_1)(x-x_2) = [x-(a+ib)][x-(a-ib)] = x^2-2ax+(a^a+b^2) = x^2+px+q,$$

получим трёхчлен второй степени с действительными коэффициентами, где обозначено $p=-2a$, $q=a^2+b^2$.

Итак, если среди корней полинома (3.7) есть два комплексно сопряженных, то они дают квадратный трёхчлен с действительными коэффициентами. Тогда полином (3.7) – целая рациональная функция – разлагается на множители вида

$$P_n(x) = a_n(x^2 + px + q)(x - x_3)(x - x_4)\cdots(x - x_n). \tag{3.11}$$

Если среди корней полинома (3.7) есть две пары комплексно сопряженных: $x_1 = a_1 + ib_1$, $x_2 = a_1 - ib_1$, $x_3 = a_2 + ib_2$, $x_4 = a_2 - ib_2$, то полином разлагается на множители так:

$$P_n(x) = a_n(x^2 + p_1x + q_1)(x^2 + p_2x + q_2)(x - x_5)(x - x_6)\cdots(x - x_n). \tag{3.12}$$

3.5. Интегрирование простейших рациональных дробей

Всякую рациональную функцию можно представить как отношение двух полиномов:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n}, \tag{3.13}$$

причем эти полиномы не имеют общих корней.

Если $m < n$, т.е. степень полинома числителя меньше степени полинома знаменателя, то рациональная дробь (3.13) называется правильной. Если $m \geq n$, то рациональная дробь (3.13) называется неправильной.

Неправильную рациональную дробь всегда можно представить суммой полинома и некоторой правильной дроби. Например, неправильную дробь

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 2x - 1}{x^2 + x - 1}$$

можно представить именно таким образом, для чего достаточно разделить числитель на знаменатель:

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 2x - 1}{x^2 + x - 1} = \underbrace{x + 2}_{\text{полином}} + \underbrace{\frac{x + 1}{x^2 + x - 1}}_{\text{правильная дробь}}.$$

Проинтегрировать полином не представляет затруднений. Основная трудность возникает при интегрировании правильных дробей.

♦ Правильные рациональные дроби вида

$$\text{I. } \frac{M}{x - \alpha}; \quad \text{II. } \frac{M}{(x - \alpha)^k}; \quad \text{III. } \frac{Mx + N}{x^2 + px + q}; \quad \text{IV. } \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^k},$$

где $k \geq 2$ – целое положительное число; $M = \text{const}$, называются простейшими дробями I, II, III и IV типов.

Интегралы от простейших рациональных дробей I и II типов находятся следующим образом:

$$\text{I. } \int \frac{M}{x - \alpha}dx = M\int \frac{d(x - \alpha)}{x - \alpha} = M\ln|x - \alpha| + C;$$

$$\text{II. } \int \frac{M}{(x - \alpha)^k}dx = M\int \frac{d(x - \alpha)}{(x - \alpha)^k} = M\int (x - \alpha)^{-k}d(x - \alpha) =$$

$$= M\frac{(x - \alpha)^{-k+1}}{-k + 1} + C = M\frac{(x - \alpha)^{1-k}}{1 - k} + C.$$

Для простейших рациональных дробей III типа возможны два варианта: а) числитель равен производной от знаменателя, тогда

$$\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx = \ln|x^2+px+q| + C;$$

б) числитель не равен производной от знаменателя, тогда в нем следует выделить эту производную:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} = \frac{M}{2}\ln|x^2+px+q| + D\int \frac{dx}{x^2+px+q}.$$

Поскольку $M \neq 0$, то

$$D = \frac{M}{2}\Big(\frac{2N}{M} - p\Big).$$

Интеграл

$$J = \int \frac{dx}{x^2+px+q}$$

находится следующим образом:

а) если $q - p^2/4 = 0$, то

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{dx}{(x+p/2)^2} = \int \frac{d(x+p/2)}{(x+p/2)^2} = -\frac{1}{x+p/2} + C;$$

б) если $q - p^2/4 = a^2$, $a > 0$, то

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{dx}{(x+p/2)^2 + (q-p^2/4)} = \int \frac{d(x+p/2)}{(x+p/2)^2 + a^2} =$$
$$= \frac{1}{a}\int \frac{d[(x+p/2)/a]}{1+[x+p/2)/a]^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x+p/a}{a} + C;$$

в) если $q - p^2/4 = -a^2$, $a > 0$, то

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{d(x+p/2)}{(x+p/2)^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\Big|\frac{x+p/2-a}{x+p/2+a}\Big| + C.$$

Для простейших рациональных дробей IV типа $D = p^2/4 - q > 0$ и $k \geq 2$

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx = \frac{M}{2}\int \frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^k} + \Big(N - \frac{Mp}{2}\Big)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} =$$
$$= \frac{M}{2}\frac{(x^2+px+q)^{1-k}}{1-k} + \Big(N - \frac{Mp}{2}\Big)\int \frac{dx}{\Big[\big(x+\frac{p}{2}\big)^2 + q - \frac{p^2}{2}\Big)^k}, \quad k > 1.$$

Последний интеграл линейной подстановкой $t = x + p/2$ приводится к интегралу J_k:

$$J_k = \int \frac{dx}{(t^2+a^2)^k}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad a \neq 0,$$

для которого воспользуемся формулой интегрирования по частям. Положим

$$u = \frac{1}{(t^2+a^2)^k}, \quad dv = dt.$$

Тогда

$$du = \frac{-2kt\,dt}{(t^2+a^2)^{k+1}}, \quad v = t,$$

и, следовательно,

$$J_k = \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2k\int \frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^{k+1}}.$$

Прибавим и вычтем a^2 в числителе подынтегральной функции полученного интеграла:

$$J_k = \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2k\int \frac{(t^2+a^2)-a^2}{(t^2+a^2)^{k+1}}dt.$$

Записав последний интеграл в виде разности двух интегралов, получим

$$J_k = \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2kJ_k - 2ka^2J_{k+1},$$

откуда

$$J_{k+1} = \frac{1}{2ka^2}\Big[\frac{t}{(t^2+a^2)^k} + (2k-1)J_k\Big].$$

Так как

$$J_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C,$$

то, положив в полученной формуле $k=1$, можно найти J_2. Зная J_2, можно найти J_3 и т.д. Таким образом, интеграл J_k вычисляется по рекуррентной формуле

$$J_{k+1} = \frac{1}{2ka^2}\Big[\frac{t}{(t^2+a^2)^k} + (2k-1)J_k\Big]. \tag{3.14}$$

3.6. Интегрирование рациональных дробей. Метод неопределенных коэффициентов

Интегрировании рациональных дробей (функций) проводится путем их разложения на простейшие дроби I, II, III и IV типов.

Из приведенных ниже примеров будет видно, что нужно делать для того, чтобы разложить дробь на простейшие при известном разложении её знаменателя на множители.

Теорема 3.6. *Каждую правильную дробь можно представить в виде суммы конечного числа простейших дробей.*

$\Diamond$ Это разложение теснейшим образом связано с разложением знаменателя на простые множители. Пусть

$$P_n(x) = (x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdots(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\cdots(x^2+p_jx+q_j)^{m_j},$$
$$k_1+k_2+\cdots+k_l+2m_1+\cdots+2m_j = n.$$

Тогда

$$\frac{Q_p(x)}{P_n(x)} = \frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} + \frac{A_{k_1-1}}{(x-x_1)^{k_1-1}} + \ldots + \frac{D_{m_j}x+E_{m_j}}{(x^2+p_jx+q_j)^{m_j}} + \ldots + \frac{D_1x+E_1}{(x^2+p_1x+q_1)}.$$

Пусть дан интеграл от правильной рациональной дроби

$$\int \frac{P_m(x)}{P_n(x)}dx, \quad m < n.$$

При интегрировании правильных рациональных дробей рассмотрим следующие случаи.

Случай 1. Знаменатель правильной рациональной дроби разлагается на неповторяющиеся действительные линейные множители, все эти множители различны, т.е.

$$\int \frac{P_m(x)}{P_n(x)}dx = \int \frac{P_m(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}dx, \quad m < n.$$

Чтобы найти такой интеграл, нужно выполнить следующие действия

1. Разложить подынтегральную функцию на простейшие дроби I-го типа так:

$$\frac{P_m(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-x_n}, \tag{3.15}$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – неопределенные коэффициенты (постоянные числа), которые необходимо найти. Для определения $A_1, A_2, \ldots, A_n$ приведем правую часть равенства (3.15) к общему знаменателю и приравняем тождественно числители левой и правой частей. Затем, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях, получим систему n уравнений с n неизвестными $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Решив полученную систему, найдем значения неопределенных коэффициентов $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

2. Подставив найденные значения $A_1, A_2, \ldots, A_n$ в (3.15), получим

$$\int \frac{P_m(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}dx = A_1\int\frac{dx}{x-x_1} + A_2\int\frac{dx}{x-x_2} + \cdots + A_n\int\frac{dx}{x-x_n} =$$
$$= A_1\ln|x-x_1| + A_2\ln|x-x_2| + \cdots + A_n\ln|x-x_n| + C.$$

Пример 3.14. Найти

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Решение. 1. Разложим знаменатель на действительные линейные множители: $x^2-a^2=(x-a)(x+a)$, тогда

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \int \frac{1}{(x-a)(x+a)}dx.$$

2. Разложим дробь на простейшие дроби I-го типа:

$$\frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a},$$

приведем правую часть в общему знаменателю:

$$\frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{A(x+a)+B(x-a)}{(x-a)(x+a)}$$

и, приравняв числители, получим тождество

$$1 \equiv Ax + Bx + Aa - Ba.$$

Приравняв теперь свободные члены и коэффициенты при x в левой и правой частях тождества, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 0 = A + B, \\ 1 = Aa - Ba, \end{cases} \tag{3.16}$$

решив которую, найдем $A = 1/2a$, $B = -1/2a$. Тогда

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{x - a} - \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{x + a} =$$
$$= \frac{1}{2a} [\ln |x - a| - \ln |x + a|] + C = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C.$$

Случай 2. Знаменатель правильной рациональной дроби разлагается на действительные линейные множители, среди которых есть повторяющиеся (некоторые корни кратны):

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \frac{P_m(x)}{(x - x_1)^2 (x - x_3) \cdots (x - x_n)}.$$

В этом случае разложение дроби на простейшие примет следующий вид:

$$\frac{P_m(x)}{(x - x_1)^2 (x - x_3) \cdots (x - x_n)} = \frac{A_1}{(x - x_1)^2} + \frac{A_2}{x - x_1} + \frac{A_3}{x - x_3} + \cdots + \frac{A_n}{x - x_n}. \tag{3.17}$$

Неопределенные коэффициенты $A_1, A_2, \ldots, A_n$ находятся так же, как и в первом случае. Каждое слагаемое правой части (3.17) легко интегрируется.

Пример 3.15. Найти

$$\int \frac{2 - x}{x^2 (x - 1)} dx.$$

Решение. Подынтегральная функция разлагается на простейшие дроби так:

$$\frac{2 - x}{x^2 (x - 1)} = \frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{x} + \frac{A_3}{x - 1},$$

коэффициенты A_1, A_2, A_3 находим так же, как и в первом случае. Окончательно получим

$$\int \frac{2 - x}{x^2 (x - 1)} = \frac{2}{x} + \ln \left| \frac{x - 1}{x} \right| + C.$$

Случай 3. Знаменатель разлагается на комплексно сопряженные линейные множители, среди которых нет повторяющихся, и на действительные линейные множители:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \frac{P_m(x)}{(x^2 + px + q)(x - x_3) \cdots (x - x_n)}.$$

В этом случае подынтегральная функция разлагается на простейшие дроби III, I (и, возможно, II, если в знаменателе присутствуют повторяющиеся действительные линейные множители) типа следующим образом:

$$\frac{P_m(x)}{(x^2 + px + q)(x - x_3) \cdots (x - x_n)} = \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} + \frac{A_3}{x - x_3} + \cdots + \frac{A_n}{x - x_n}. \tag{3.18}$$

Неопределенные коэффициенты $M, N, A_3, \ldots, A_n$ находятся так же, как и в первом и втором случаях. Каждое слагаемое правой части (3.18) легко интегрируется.

Случай 4. Знаменатель правильной рациональной дроби разлагается на комплексно сопряженные пары линейных множителей, среди которых есть повторяющиеся, и на действительные линейные множители. В этом случае разложение дроби содержит и простейшие дроби IV-го типа

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k},$$

где $k \geq 2$, корни трехчлена x^2+px+q комплексны.

Например,

$$\frac{x-1}{(x^2+2)^2(x-3)^3(x+2)(x-4)} =$$
$$= \frac{M_1x+N_1}{(x^2+2)^2} + \frac{M_2x+N_2}{x^2+2} + \frac{A_5}{(x-3)^3} + \frac{A_6}{(x-3)^2} + \frac{A_7}{x-3} + \frac{A_8}{x+2} + \frac{A_9}{x-4}.$$

♢ В таблице основных интегралов предполагалось, что x – независимая переменная. Однако эта таблица полностью сохраняет свое значение, если под x понимается любая непрерывно дифференцируемая функция от независимой переменной:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Longrightarrow \int f(u)du = F(u) + C,$$

где $u = f(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция. Так,

$$\int \frac{du}{u} = \ln u + C, \quad \int \sin u\, du = -\cos u + C$$

и т.д.

♢ Если числитель равен производной знаменателя, то такой интеграл равен логарифму знаменателя.

3.7. Интегрирование тригонометрических и гиперболических функций

3.7.1. Интегралы от тригонометрических функций

Интеграл вида $\int R(\cos x, \sin x)dx$ можно свести к интегрированию дробно рациональных функций, с помощью так называемой универсальной тригонометрической подстановки

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, \quad -\pi < x < \pi. \tag{3.19}$$

Тогда

$$\sin x = \sin\left(2\frac{x}{2}\right) = \frac{2\sin x/2\cos x/2}{1} = \frac{2\sin x/2\cos x/2}{\cos^2(x/2)+\sin^2(x/2)}.$$

Разделив числитель и знаменатель на $\cos^2 x/2 \pm 0$, получим

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)}.$$

Итак,

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}. \tag{3.20}$$

Аналогично

$$\cos x = \cos\left(2\frac{x}{2}\right) = \frac{\cos^2(x/2) - \sin^2(x/2)}{1} = \frac{\cos^2(x/2) - \sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2) + \sin^2(x/2)}.$$

Разделив числитель и знаменатель на $\sin^2 x/2 \pm 0$, получим

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)},$$

т.е.

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \tag{3.21}$$

Из (3.19) следует $x/2 = \operatorname{arctg} t$ или $x = 2\operatorname{arctg} t$. Тогда

$$dx = \frac{2}{1+t^2}dt. \tag{3.22}$$

Итак, $\sin x$, $\cos x$ и dx выражены рационально через t. Подставив (3.20), (3.21) и (3.22) в исходный интеграл, получим интеграл от рациональной функции

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\Big(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\Big)\frac{2}{1+t^2}dt,$$

которые мы рассмотрели в предыдущем разделе.

Пример 3.16. Найти

$$\int \frac{dx}{\sin x}.$$

Решение. Сделаем универсальную подстановку:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{2dt}{1+t^2}\frac{1+t^2}{2t} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

$\Diamond$ Порой универсальная подстановка приводит к интегралам от сложных рациональных функций. Поэтому бывает выгоднее применять другие подстановки, которые быстрее приводят к цели.

1) Так, если интеграл имеет вид $\int R(\sin x)\cos x\,dx$, то выгоднее применить подстановку $\sin x = t$. Тогда $dt = \cos x\,dx$ или $dx = dt/\cos x$. Например,

$$\int \frac{\cos^2 x}{1+\sin x}dx = \int \frac{\cos^2 x \cos x}{1+t}dx = \int \frac{1+t^2}{1+t}dt = \int (1-t)dt =$$
$$= t - \frac{t^2}{2} + C = \sin x - \frac{1}{2}\sin^2 x + C.$$

2) Если интеграл имеет вид $\int R(\cos x)\sin x\,dx$, то применяется подстановка $\cos x = t$.

3) Если подынтегральная функция зависит от $\operatorname{tg} x$, то применяется подстановка $\operatorname{tg} x = t$. Тогда $x = \operatorname{arctg} t$ и

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2},$$
$$\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Эта подстановка приводит к интегралу от рациональной функции.

4) Если в подынтегральном выражении $\sin x$ и $\cos x$ содержатся только в четным степенях, применяется та же подстановка $\operatorname{tg} x = t$.

Пример 3.17. Найти

$$\int \frac{dx}{4-\sin^2 x}.$$

Решение. Сделаем подстановку $x = \operatorname{tg} t$:

$$\int \frac{dx}{4-\sin^2 x} = \int \frac{dt}{1+t^2}\frac{1}{4-t^2/(1+t^2)} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{(2/\sqrt{3})^2+t^2} =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\frac{t}{2/\sqrt{3}} + C = \frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg} x\right) + C.$$

5) Если дан интеграл вида $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$, где m и n – целые числа, то подстановкой $t = \sin x$ ($dt = \cos x\, dx$, $\cos x = \sqrt{1-t^2}$) он сводится к виду

$$\int \sin^m x \cos^n x = \int t^m (1-t^2)^{(n-1)/2} dt.$$

Последний интеграл выражается через элементарные функции в зависимости, если через элементарные функции выражается стоящий в правой части интеграл от дифференциального бинома.

6) Если интеграл имеет вид

$$\int \sin mx \cos nx\, dx, \quad m \neq n,$$
$$\int \sin mx \sin nx\, dx, \quad m \neq n,$$
$$\int \cos mx \cos nx\, dx, \quad m \neq n,$$

то нужно расписать подынтегральные выражения по известным формулам тригонометрии так:

$$\int \sin mx \cos nx\, dx = \frac{1}{2}\int [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x] dx =$$
$$= \frac{1}{2(m+n)}\int \sin(m+n)x\, d[(m+n)x] + \frac{1}{2(m-n)}\int \sin(m-n)x\, d[(m-n)x] =$$
$$= -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C.$$

Аналогично

$$\int \sin mx \sin nx \, dx = \frac{1}{2} \int [-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] dx =$$

$$= \frac{1}{2(m+n)} \int \cos(m+n)x \, d[(m+n)x] + \frac{1}{2(m-n)} \int \cos(m-n)x \, d[(m-n)x] =$$

$$-\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C$$

и

$$\int \cos mx \cos nx \, dx = \frac{1}{2} \int [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] dx =$$

$$= \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C.$$

3.7.2. Интегралы от гиперболических функций

Интеграл вида $\int R(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x) dx$ можно свести к интегрированию дробно рациональных функций, с помощью приемов, аналогичных рассмотренным выше для интегралов от тригонометрических функций. Для этого необходимо использовать свойства гиперболических функций.

Произведения гиперболических функций

$$\begin{aligned}
&\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1; \\
&\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y; \\
&\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y.
\end{aligned}$$

Обратные гиперболические функции

$$\begin{aligned}
&y = \operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}); \\
&y = \operatorname{arch} x = \ln(x - \sqrt{x^2 + 1}), \quad x \geq 1, \quad y \in]-\infty, 0[; \\
&y = \operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad x \geq 1, \quad y \in]0, \infty[; \\
&y = \operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1; \\
&y = \operatorname{arcth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad |x| > 1.
\end{aligned}$$

Гиперболические функции двойного аргумента

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x; \quad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x; \\
&\operatorname{ch} 2x = \frac{2 \operatorname{ch} x}{2 + \operatorname{th}^2 x}; \quad \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}; \quad \operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}.
\end{aligned}$$

$\Diamond$ Интеграл гиперболических функций можно свести к интегрированию дробно рациональных функций, с помощью подстановки $e^x = t$. Тогда

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}\Big(t - \frac{1}{t}\Big), \quad \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}\Big(t + \frac{1}{t}\Big), \quad dx = \frac{dt}{t},$$
$$\operatorname{th} x = \frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{t^2+1}{t^2-1}.$$

3.8. Интегрирование простейших иррациональностей

3.8.1. Интегрирование дробно-линейных иррациональностей

Рассмотрим интегралы вида

$$\int R\Big[x, \Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)^{r_1}, \ldots, \Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)^{r_l}\Big]dx, \tag{3.23}$$

где R – рациональная функция; $r_1, \ldots, r_l$ – рациональные числа. Будем предполагать, что

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

Пусть m – общий знаменатель чисел $r_1, \ldots, r_l$, то есть все r_j, $j = \overline{1, l}$ можно представить в виде $r_j = p_j/m$, где p_j – целое число, $j = \overline{1, l}$. Тогда замена

$$t^m = \frac{ax+b}{cx+d} \tag{3.24}$$

сводит вычисление интеграла (3.23) к интегрированию дробно-рациональных функций.

Действительно, из (3.24) найдём

$$x = \frac{t^m d - b}{a - ct^m} = \rho(t), \tag{3.25}$$

где $\rho(t)$ – рациональная функция,

$$dx = \rho'(t)dt, \quad \Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)^{r_j} = t^{mr_j} = t^{p_j}.$$

Следовательно,

$$\int R\Big[x, \Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)^{r_1}, \ldots, \Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)^{r_l}\Big]dx = \int R\Big[\frac{t^m d - b}{a - ct^m}, t^{p_1}, \ldots, t^{p_l}\Big]\rho'(t)dt. \tag{3.26}$$

Пример 3.18. Найти

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}.$$

Решение. Положим $x = t^6$, тогда $dx = 6t^5 dt$ и

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = 6\int \frac{t^3}{t+1}dt = 6\Big[\int (t^2 - t + 1)dt - \int \frac{dt}{t+1}\Big] =$$
$$= 6\Big[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1|\Big] + C.$$

3.8.2. Интегрирование квадратичных иррациональностей

Запишем интеграл вида

$$\int R\Big(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\Big)dx, \tag{3.27}$$

где R –рациональная функция.

Выделив в подкоренном выражении в (3.27) полный квадрат

$$ax^2+bx+c = a\Big(x+\frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

и сделав замену переменных $\sqrt{|a|}\Big(x+\dfrac{b}{2a}\Big) = t$ получим интеграл одного из следующих типов:

$$\int \tilde{R}\Big(t, \sqrt{\mu^2-t^2}\Big)dt, \quad \int \tilde{R}\Big(t, \sqrt{\mu^2+t^2}\Big)dt, \quad \int \tilde{R}\Big(t, \sqrt{t^2-\mu^2}\Big)dt.$$

Эти интегралы сводятся к рассмотренным выше интегралам от тригонометрических и гиперболических функций с помощью подстановок

$$t = \mu\sin u, \quad t = \mu\operatorname{tg} u,, \quad t = \frac{\mu}{\cos u},$$
$$t = \mu\operatorname{ch} u, \quad t = \mu\operatorname{sh} u.$$

Теорема 3.7. *Интегралы (3.27) сводятся к интегралам от рациональных функций, с помощью подстановок*

$$1. \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t, \quad \text{если}, \quad a>0, \tag{3.28}$$
$$2. \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x \pm \sqrt{c}, \quad \text{если}, \quad c>0, \tag{3.29}$$
$$3. \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_1),$$
$$4. \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_2),$$

где x_1, x_2 — вещественные корни полинома уравнения $ax^2+bx+c=0$, а знаки можно выбирать в любой комбинации.

Подстановки (3.29) называются подстановками Эйлера.

Доказательство. 1. Пусть $a>0$. Тогда производится замена

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm x\sqrt{a} \pm t, \tag{3.30}$$

Возведем (3.30) в квадрат:

$$ax^2+bx+c = ax^2 \pm 2\sqrt{a}xt + t^2.$$

Следовательно,

$$x = \frac{t^2-c}{b\mp 2t\sqrt{a}} = \psi(t), \tag{3.31}$$

где $\psi(t)$ – рациональная функция, и

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx = \int R(\psi(t), \pm x\sqrt{a} \pm t)\Big|_{x=\psi(t)}\psi'(t)dt.$$

Доказательство для случаев 2 и 3 аналогично.

3.8.3. Интегрирование дифференциального бинома

♦ Выражение $x^\mu(a + bx^\nu)^p$, где μ, ν, p — рациональные числа, называется дифференциальным биномом.

Теорема 3.8. Интеграл

$$\int x^\mu(ax^\nu + b)^p dx, \tag{3.32}$$

может быть сведен к интегралу от рациональных функций, только в одном из следующих случаев:

1) p – целое, тогда замена $x = t^N$ сводит (3.32) к интегралу от рациональных функций. Здесь N – общий знаменатель дробей μ и ν.

2) $\dfrac{\mu+1}{\nu}$ – целое, тогда замена $a + bx^\nu = t^N$ сводит (3.32) к интегралу от рациональных функций. Здесь N – общий знаменатель дроби p.

3) $\dfrac{\mu+1}{\nu} + p$ – целое, тогда замена $ax^{-\nu} + b = t^N$ сводит (3.32) к интегралу от рациональных функций. Здесь N – общий знаменатель дроби p.

Подстановки 1–3 называются подстановками Чебышева.

Доказательство.

4. Определённый интеграл

4.1. Задачи, приводящие к понятию определённого интеграла

К понятию определённого интеграла приводят самые разнообразные задачи: определение площади плоской фигуры, работы переменной силы, пути по заданной переменной скорости, объема тела, момента инерции, положения центра тяжести и т.д.

Прежде чем перейти к изучению определенного интеграла, рассмотрим одну из этих задач — задачу о площади.

Пусть в плоскости xOy дана фигура $ABCD$, ограниченная отрезком $[a, b]$ оси Ox, прямыми $x = a$, $x = b$ и кривой $f = f(x)$, где $f(x)$ — непрерывная неотрицательная функция на $[a, b]$. Здесь обозначено $A = (a, 0)$, $B = (b, 0)$, $C = (f(b), 0)$, $D = (F(a), 0)$.

Рис. 1

♦ Такую фигуру будем называть криволинейной трапецией с основанием $[a, b]$.

♢ В частности, точка D может совпадать с A, а точка C — с B.

Требуется определить площадь S этой криволинейной трапеции.

Для этого разобьем отрезок $[a, b]$ оси Ox на n частей точками $x_0 = a$, x_1, x_2, …, x_i, …, $x_n = b$ ($x_0 < x_1 < \cdots < x_n$). Через эти точки проведем вертикальные прямые. Криволинейная трапеция будет разбита на n криволинейных трапеций с основаниями $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, …, $[x_{i-1}, x_i]$, …, $[x_{n-1}, x_n]$. Выбрав на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = \overline{1,n})$ произвольную точку ξ_i, $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$, построим прямоугольник с основанием $[x_{i-1}, x_i]$ и высотой $f(\xi_i)$. Его площадь равна $f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$. Рассмотрим ступенчатую фигуру, составленную из прямоугольников с основаниями $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$ и т.д. Ее площадь, равную сумме

$$f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}),$$

будем считать приближенно равной площади S криволинейной трапеции:

$$S \approx f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$$

или

$$S \approx \sum_{i-1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Чем «мельче» отрезки, тем точнее эта ступенчатая фигура соответствует криволинейную трапецию $ABCD$. За площадь же этой трапеции естественно принять предел, к которому стремятся площади построенных ступенчатых фигур при неограниченном увеличении числа отрезков разбиения и стремлении к нулю их длин, т.е.

$$S = \lim_{\max \Delta x \to 0} \sum_{i-1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

или, если обозначить $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$, то

$$S = \lim_{\max \Delta x \to 0} \sum_{i-1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Решение рассмотренной и других задач сводится к отысканию пределов сумм специального вида при неограниченном увеличении числа отрезков разбиения $[x_{i-1}, x_i]$ и стремлении длины каждого из них к нулю. Поскольку к нахождению такого рода пределов приводит огромное количество математических и прикладных задач, естественно изучить эти суммы и их пределы.

4.2. Определённый интеграл

♦ Множество вещественных чисел X называется ограниченным сверху (снизу), если существует такое число M (m), что для всех элементов $x \in X$ справедливо $x \ge M$ $(x \le m)$. Число M (m) называется верхней (нижней) гранью множества X.

♦ Наименьшая (наибольшая) из всех верхних (нижних) граней ограниченного сверху (снизу) множества X называется точной верхней (нижней) гранью множества X и обозначается $\sup X$ $(\inf X)$.

♦ Говорят, что задано разбиение сегмента $[a, b]$, если заданы точки $x_0, \ldots, x_n$ такие, что $a = x_0 \ge x_1 \ge \ldots \ge x_n = b$ и обозначают $\{x_j\}_{j=0}^{n}$.

♦ Разбиение $\{x_{j'}\}_{j=0}^{n'}$ называется измельчением разбиения $\{x_j\}_{j=0}^{n}$ сегмента $[a, b]$, если каждая точка x_j разбиения $\{x_j\}_{j=0}^{n}$ является так же точкой разбиения $\{x_{j'}\}_{j=0}^{n'}$.

♦ Число

$$\tau = \max_{j=\overline{1,n}} \Delta x_j, \quad \Delta x_j = x_j - x_{j-1}$$

называется диаметром разбиения $\{x_j\}_{j=0}^{n}$.

♦ Сумма

$$f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i-1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sigma_n$$

называется интегральной суммой для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Интегральная сумма зависит от способа разбиения отрезка на части Δx_i и выбора точек ξ_i, т.е. для $f(x)$ на $[a, b]$ можно составить бесчисленное множество интегральных сумм.

♦ Число I называется пределом интегральных сумм функции $f(x)$ при стремлении диаметр разбиения отрезка $[a, b]$ к нулю, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что все интегральные суммы с диаметром разбиения, меньшим δ, удовлетворяют неравенству

$$\left| I - \sum_{i-1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \right| < \varepsilon,$$

т.е. отличается от числа I по абсолютной величине меньше чем на δ.

♢ Число I, если оно существует, очевидно зависит только от вида функции $f(x)$ и отрезка $[a, b]$, но не зависит от способа разбиения отрезка и выбора точек ξ_i.

♦ Это число I и называется определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначается так:

$$\int\limits_a^b f(x)dx, \quad a < b.$$

♦ Функция $f(x)$ называется интегрируемой по Риману на отрезке $[a, b]$, если для этой функции на $[a, b]$ существует предел I ее интегральных сумм S_n при стремлении шага разбиения к нулю.

Таким образом, определенный интеграл от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ есть число, равное пределу интегральных сумм при стремлении к нулю шага разбиения отрезка:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\tau \to 0} \sum_{i-1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \lim_{\tau \to 0} S_n,$$

где τ – диаметр разбиения.

Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования; $f(x)$ – подынтегральной функцией; $f(x)dx$ – подынтегральным выражением; x – переменной интегрирования.

♦ Функция, для которой на отрезке $[a, b]$ существует определенный интеграл, называется интегрируемой на этом отрезке.

♦ Функция $f(x)$ называется кусочно-непрерывной на $[a, b]$, если она имеет на $[a, b]$ конечное число точек разрыва первого рода.

Теорема 4.1. *Если функция $f(x)$ кусочно-непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке.*

В дальнейшем будем предполагать, что все рассматриваемые функции непрерывны или кусочно-непрерывны.

4.3. Верхние и нижние интегральные суммы

4.4. Свойства определённого интеграла

Прежде всего, заметим, что при $a = b$

$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

Свойство 1. Значение определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(s)ds = \dots$$

Это следует из определения определенного интеграла как числа, равного пределу интегральных сумм.

Свойство 2. Определенный интеграл меняет знак при перестановке пределов интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Доказательство. Если для обоих интегралов составим интегральные суммы при одном и том же разбиении и при одном и том же выборе промежуточных точек, то ясно, что эти суммы будут различаться только знаком ($x_i - x_{i-1}$ во втором случае будут отрицательными). Это и доказывает свойство.

Свойство 3.

$$\int_a^b dx = b - a \text{ при } a \gtreqless b.$$

Свойство 4. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

Доказательство. В самом деле,

$$\int_a^b kf(x)dx = \lim_{\tau\to 0}\sum_{k=1}^n kf(\xi_i)\Delta x_i = k\lim_{\tau\to 0}\sum_{k=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = k\int_a^b f(x)dx.$$

Свойство 5. Определенный интеграл от суммы двух функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ равен сумме определенных интегралов от слагаемых:

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx.$$

Доказательство. В самом деле, для любого разбиения и любого выбора точек ξ_i

$$\sum_{i=1}^{n}[f_1(\xi_i)+f_2(\xi_i)]\Delta x_i=\sum_{k=1}^{n}f_1(\xi_i)\Delta x_i+\sum_{k=1}^{n}f_2(\xi_i)\Delta x_i,$$

а так как

$$\lim_{\tau\to 0}\sum_{k=1}^{n}f_1(\xi_i)\Delta x_i=\int\limits_a^b f_1(x)dx,$$

$$\lim_{\tau\to 0}\sum_{k=1}^{n}f_2(\xi_i)\Delta x_i=\int\limits_a^b f_2(x)dx,$$

то получим

$$\int\limits_a^b[f_1(x)+f_2(x)]dx=\lim_{\tau\to 0}\sum_{k=1}^{n}[f_1(\xi_i)+f_2(\xi_i)]\Delta x_i=$$

$$=\lim_{\tau\to 0}\sum_{k=1}^{n}f_1(\xi_i)\Delta x_i+\lim_{\tau\to 0}\sum_{k=1}^{n}f_2(\xi_i)\Delta x_i=\int\limits_a^b f_1(x)dx+\int\limits_a^b f_2(x)dx,$$

что и требовалось доказать.

Это свойство справедливо для любого числа слагаемых.

Свойство 6. Если отрезок $[a,b]$ разбит точкой c на две части $[a,c]$ и $[c,b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx.$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\sum_{k=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\sum{}' f(\xi_i)\Delta x_i+\sum{}'' f(\xi_i)\Delta x_i,$$

где $\sum'$ и $\sum''$ – суммы, соответствующие отрезкам разбиения, попавшим соответственно в $[a,c]$ и $[c,b]$. Переходя к пределу при стремлении шага разбиения к нулю, получим

$$\lim_{\substack{\tau\to 0\\ [a,c]}}\sum{}' f(\xi_i)\Delta x_i=\int\limits_a^c f(x)dx,$$

$$\lim_{\substack{\tau\to 0\\ [a,c]}}\sum{}'' f(\xi_i)\Delta x_i=\int\limits_c^b f(x)dx,$$

а, значит,

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_b^c f(x)dx,$$

что и требовалось доказать.

Свойство 7. При любом расположении точек a, b, c

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

Доказательство. Для случая $a < c < b$ справедливость этого утверждения уже была доказана (см. предыдущее свойство). А для случая $a < b < c$ для отрезка $[a, c]$ применим то же свойство:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx,$$

но

$$\int_b^c f(x)dx = -\int_c^b f(x)dx,$$

следовательно,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

что и требовалось доказать.

Свойство 8. Если $f(x) \geq 0$ всюду на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Доказательство. В самом деле, так как $f(x) \geq 0$, то $f(\xi_i) \geq 0$ и, поскольку $a < \xi_i < b$, то $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \geq 0$, а, значит, и интегральные суммы $S_n \geq 0$:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0,$$

т.е.

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0,$$

что и требовалось доказать.

Свойство 9. Если $f_1(x) \leq f_2(x)$ всюду на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^b f_1(x)dx \leq \int_a^b f_2(x)dx.$$

Доказательство. Действительно, так как $f_2(x) - f_1(x) \geq 0$, то

$$\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx \geq 0,$$

откуда, согласно свойству 5, следует

$$\int_a^b f_2(x)dx \geq \int_a^b f_1(x)dx,$$

что и требовалось доказать.

Свойство 10. Если все значения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ заключены между числами m и M: $m \leq f(x) \leq M$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Это свойство можно доказать, воспользовавшись предыдущим свойством. Это оценка определенного интеграла. Геометрический смысл этого свойства: площадь криволинейной трапеции больше площади прямоугольника с основанием $b-a$ и высотой m, но меньше площади прямоугольника с основанием $b-a$ и высотой M.

Свойство 11 (теорема о среднем). *Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то в этом промежутке найдется такая «средняя» точка $x = c$, что справедливо равенство*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна, то на $[a, b]$ она принимает свое наименьшее m и наибольшее M значения. Согласно свойству 10,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Разделив на $b-a$, найдём

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M.$$

Так как функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то они принимает все значения между m и M. Следовательно, в некоторой точке $x = c$, $a < c < b$,

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx,$$

т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a),$$

что и требовалось доказать.

Геометрически эта теорема означает, что в промежутке $[a, b]$ найдется такая точка c, что площадь прямоугольника с основанием $b-a$ и высотой $f(c)$ будет равна площади криволинейной трапеции. Эта теорема равносильна тому, что рассматриваемая трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$ и $y = 0$ можно указать равновеликий прямоугольник с тем же основанием $b-a$ и высотой, равной $f(c)$, где $a \le c \le b$.

5. Производная от определенного интеграла по верхнему пределу. Существование первообразной для непрерывной функции

Пусть $f(x)$ – непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция. Тогда она непрерывна и дифференцируема на любом отрезке $[a, x]$, где $a \le x \le b$.

Интеграл $\int\limits_a^x f(t)dt$ зависит от x (здесь x – верхний предел интегрирования), т.е. этот интеграл является функцией от x, определенной на отрезке $[a, b]$:

$$\int_a^x f(t)dt = \Phi(x).$$

Покажем, что функция $\Phi(x)$ дифференцируема на $[a, b]$. Зафиксируем любую точку x отрезка и зададим приращение Δx. Тогда функция $\Phi(x)$ получит приращение $\Delta\Phi(x) = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)$, но так как

$$\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt,$$

то

$$\Delta\Phi(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

или, согласно теореме о среднем,

$$\Delta\Phi(x) = f(\xi)\Delta x, \quad x < \xi < x + \Delta x.$$

Разделив обе части на Δx и перейдя к пределу, найдем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) = f(x),$$

т.е. $\Phi'(x) = f(x)$, следовательно,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x).$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 5.1. *Производная определенного интеграла от непрерывной функции $f(t)$ по его верхнему пределу равна подынтегральной функции с заменой переменной интегрирования верхним пределом.*

$\Diamond$ Аналогично можно было бы доказать, что

$$\frac{d}{dx}\int\limits_x^b f(t)dt = -f(x).$$

Эта теорема позволяет доказать теорему о существовании первообразной.

Теорема 5.2. *Для всякой функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$, существует на этом отрезке первообразная, а значит, существует неопределенный интеграл.*

В самом деле, для непрерывной на $[a, b]$ функции, согласно теореме о существовании определенного интеграла, существует функция

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt, \quad a \le x \le b.$$

Так как $\Phi'(x) = f(x)$, то функция $\Phi(x)$ является первообразной для функции $f(t)$ на $[a, b]$.

6. Связь определенного и неопределенного интегралов. Теорема Ньютона–Лейбница

Неопределенный интеграл связан с определенным соотношением

$$\int f(x)dx = \int\limits_a^x f(t)dt + C,$$

где C – произвольная постоянная.

Получим теперь формулу Ньютона–Лейбница. Было установлено, что на отрезке $[a, b]$ непрерывная функция имеет первообразные, одна из которых равна

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt.$$

Пусть $F(x)$ – любая первообразная для функции $f(x)$ на этом же отрезке. Так как $\Phi(x)$ и $F(x)$ различаются только на постоянную C, то можно записать

$$\int\limits_a^x f(t)dt = F(x) + C, \qquad a \le x \le b.$$

При $x = a$ имеем

$$\int\limits_a^a f(t)dt = F(a) + C, \quad 0 = F(a) + C,$$

откуда $C = -F(a)$. Значит,

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Тогда при $x = b$

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a). \tag{6.1}$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 6.1. *Определенный интеграл связан с неопределенным соотношением*

$$\int_a^b f(t)dt = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Формула (6.1) называется формулой Ньютона–Лейбница.

Разность $F(b) - F(a)$ принято обозначать через $F(x)\big|_a^b$, тогда

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\big|_a^b.$$

С открытием формулы Ньютона–Лейбница значительно расширилась область применения определенного интеграла, так как математика получила общий метод для решения различных задач частного вида и поэтому смогла существенно расширить круг его приложения в технике, механике, астрономии, военном деле и т.д.

Вообще-то название формулы условно, поскольку ни у Ньютона, ни у Лейбница не было такой формулы в точном смысле этого слова. Важно то, что именно Лейбниц и Ньютон впервые установили связь между интегрированием и дифференцированием, позволяющую создать правило для вычисления определенных интегралов.

Следует заметить, что действия, аналогичные вычислению определенного интеграла как предела интегральной суммы, были знакомы еще в древности (Архимед), однако применение этого метода ограничивалось теми простейшими случаями, когда предел интегральной суммы мог быть вычислен непосредственно.

Пример 6.1. Вычислить интеграл

$$\int_0^1 \sqrt{1+t}dt.$$

Решение.

$$\int_0^1 \sqrt{1+t}dt = \int_0^1 (1+t)^{1/2}dt = \frac{2}{3}(1+t)^{3/2}\big|_0^1 = \frac{2}{3}(\sqrt{8} - 1).$$

Пример 6.2. Вычислить интеграл

$$\int_0^{\pi/4} \sin 2x\, dx.$$

Решение.

$$\int_0^{\pi/4} \sin 2x\, dx = -\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}.$$

Пример 6.3. Вычислить интеграл

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 2x\, dx.$$

Решение.

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 2x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4x)dx = \frac{1}{2}\Big(x - \frac{1}{4}\sin 4x\Big)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

7. Замена переменной в определенном интеграле

Пусть требуется вычислить определенный интеграл от функции $f(x)$, непрерывной на $[a, b]$.

Теорема 7.1. *Если функция $x = \varphi(t)$ непрерывна вместе со своей производной на отрезке α, β $(\alpha < \beta)$, при изменении t от α до β значения функции $x = \varphi(t)$ не выходят за пределы отрезка $[a, b]$ и $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, то*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Доказательство. Пусть функция $F(x)$ – какая-нибудь первообразная для $f(x)$ на $[a, b]$. Тогда для функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на $[\alpha, \beta]$ первообразной будет функция $F(\varphi(t))$, так как

$$[F(\varphi(t))]' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Следовательно, по формуле Ньютона–Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

а

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a),$$

так как $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, если функция $x = \varphi(t)$ удовлетворяет условиям теоремы, то такая подстановка сводит вычисление определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ к вычислению интеграла

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Пример 7.1. Вычислить $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$.

Решение. Сделаем подстановку $x = \sin t$, тогда $\alpha = 0$, $\beta = \pi/2$. Функция $x = \sin t$ и ее производная непрерывны на отрезке $[0, \pi/2]$. Значения функции не выходят за пределы отрезка $[0, 1]$. Тогда по формуле замены переменной в определенном интеграле имеем

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}\Big(t + \frac{1}{2}\sin 2t\Big)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

Пример 7.2. Вычислить

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+5}.$$

Решение. Преобразуем знаменатель

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+5} = \int_0^2 \frac{dx}{(x-2)^2+1}.$$

Сделаем подстановку $x - 2 = t$ и найдем новые пределы интегрирования: $\alpha = -4$, $\beta = 0$. Тогда

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+5} = \int_{-1}^0 \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t\big|_{-1}^0 = \frac{\pi}{4}.$$

Пример 7.3. Вычислить $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^3 x\,dx$.

Решение. Сделаем подстановку $\sin x = t$, тогда $\cos x\, dx = dt$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$ и

$$\int\limits_0^{\pi/2} \cos^3 x\, dx = \int\limits_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 x) \cos x\, dx = \int\limits_0^1 (1 - t^2) dt = \left(t - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

8. Интегрирование по частям в определенном интеграле

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывны вместе со своими производными на $[a, b]$. Тогда

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Проинтегрировав обе части равенства в пределах от $x = a$ до $x = b$, получим

$$\int\limits_a^b (uv)' dx = \int\limits_a^b u'v\, dx + \int\limits_a^b uv'\, dx.$$

Согласно формуле Ньютона–Лейбница

$$\int\limits_a^b (uv)'\, dx = uv\Big|_a^b,$$

с учетом того, что $u'dx = du$, $v'dx = dv$, найдем

$$uv\Big|_a^b = \int\limits_a^b v\, du + \int\limits_a^b u\, dv,$$

откуда

$$\int\limits_a^b u\, dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\, du.$$

Это соотношение называется формулой интегрирования по частям в определенном интеграле.

Пример 8.1. Вычислить $\int\limits_1^e x^2 \ln x\, dx$.

Решение. Пусть $u = \ln x$, $dv = x^2 dx$, тогда $du = dx/x$, $v = x^3/3$. Следовательно,

$$\int\limits_1^e x^2 \ln x\, dx = \frac{x^3}{3} \ln x\Big|_0^e - \frac{1}{3} \int\limits_1^e x^3 \frac{1}{x} dx =$$

$$= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \int\limits_1^e x^2 dx = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3}\Big|_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{9}(2e^3 + 1).$$

9. Несобственные интегралы I-го типа

Вводя понятие определенного интеграла, мы всегда считали функцию $f(x)$ непрерывной, а следовательно, и ограниченной на отрезке $[a, b]$. Иногда приходится рассматривать интегралы от непрерывных функций в неограниченном промежутке:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin x\, dx, \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

или интегралы на ограниченном отрезке от неограниченной функции

$$\int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{x}, \qquad \int\limits_{0}^{1/2} \frac{dx}{x \ln x}.$$

Здесь подынтегральные функции $1/x$ и $1/(x \ln x)$ имеют разрыв в точке $x = 0$.

В том и другом случае нельзя пользоваться прежним определением определенного интеграла. Введем новые определения.

♦ Несобственным интегралом I-го типа или интегралом с бесконечными пределами от непрерывной функции $f(x)$ в интервале $[a, \infty[$ называется

$$\lim_{b\to\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$$

и обозначается как

$$\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)dx,$$

где $a < b < \infty$.

♦ Если указанный предел существует, то несобственный интеграл называется сходящимся, если не существует – расходящимся.

Если $f(x) \geq 0$ на $[a, \infty[$, а несобственный интеграл сходится, то его можно принять за площадь полубесконечной полосы (рис. ????).

Аналогично определится несобственный интеграл от непрерывной функции $f(x)$ на $]-\infty, b]$:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)dx,$$

а также

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}} \int\limits_{a}^{b} f(x)dx.$$

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a, \infty[$ и интегрируема в любой его конечной части $[a, A]$, т.е. интеграл

$$\int\limits_{a}^{A} f(x)dx \tag{9.1}$$

существует.

Предел интеграла (9.1) при $A \to \infty$ называют несобственным интегралом функции $f(x)$ в промежутке от a до ∞ и обозначают

$$\lim_{A\to\infty} \int\limits_a^A f(x)dx = \int\limits_a^\infty f(x)dx. \tag{9.2}$$

Если предел (9.2) существует и конечен, то несобственный интеграл называют сходящимся.

Если предел (9.2) бесконечен или не существует, то несобственный интеграл называют расходящимся.

Пример 9.1. Исследовать на сходимость интеграл

$$I = \int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}.$$

Решение. По определению,

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to\infty} \int\limits_0^A \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_0^A = \\ = \lim_{A\to\infty} (\operatorname{arctg} A - 0) = \frac{\pi}{2}, \tag{9.3}$$

и, следовательно, интеграл сходится.

Пример 9.2. Исследовать на сходимость интегралы

$$I_1 = \int\limits_1^\infty \frac{dx}{x}, \qquad I_2 = \int\limits_0^\infty \cos x\, dx.$$

Решение. а) По определению,

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{A\to\infty} \int\limits_1^A \frac{dx}{x} = \lim_{A\to\infty} \left(\ln x\Big|_1^A \right) = \\ = \lim_{A\to\infty} (\ln A - \ln 1) = \lim_{A\to\infty} \ln A = \infty, \tag{9.4}$$

и, следовательно, интеграл I_1 расходится.

б) Аналогично

$$\int\limits_0^\infty \cos x\, dx = \lim_{A\to\infty} \int\limits_0^A \cos x\, dx = \lim_{A\to\infty} \sin x\Big|_0^A = \\ = \lim_{A\to\infty} (\sin A - \sin 1) = \lim_{A\to\infty} \sin A.$$

Последний предел не существует, и, следовательно, интеграл I_2 расходится.

Пример 9.3. Исследовать на сходимость интеграл

$$I = \int\limits_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx, \qquad a > 0.$$

Решение. По определению,

$$I = \lim_{A\to\infty} \frac{b\sin bx - a\cos bx}{a^2+b^2} e^{-ax}\Big|_0^A = \frac{a}{a^2+b^2}.$$

Следовательно,

$$I = \int\limits_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}, \qquad a > 0. \tag{9.5}$$

Наряду с интегралом (9.2), рассмотрим несобственный интеграл вида

$$\int\limits_a^\infty |f(x)|dx. \tag{9.6}$$

В силу очевидного для любого $a > 0$ неравенства

$$\int\limits_a^\infty |f(x)|dx \geq \left|\int\limits_a^\infty f(x)\,dx\right| \tag{9.7}$$

можно утверждать, что если интеграл (9.6) сходится, то сходится и интеграл (9.2), который в этом случае называется абсолютно сходящимся. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно, поскольку из расходимости интеграла (9.6) не следует обязательная расходимость интеграла (9.2). В тех случаях, когда интеграл (9.6) расходится, а сам интеграл (9.2) сходится, последний называют условно сходящимся несобственным интегралом.

Не останавливаясь подробно на признаках сходимости, излагаемых в курсе математического анализа, напомним основной критерий сходимости для абсолютно сходящихся интегралов.

Теорема 9.1. *Интеграл* (9.6) *сходится, если функция* $f(x)$ *обращается на бесконечности в нуль порядка выше первого, в противном случае интеграл* (9.6) *расходится.*

Доказательство. Условие теоремы означает, что если

$$\lim_{x\to+\infty} x^\nu|f(x)| = N < \infty, \qquad N \neq 0, \tag{9.8}$$

то интеграл (9.6) при $\nu > 1$ сходится, а при $\nu \leq 1$ — расходится. Из определения предела (9.8) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $L > 0$, что

$$\big|x^\nu|f(x)| - N\big| < \varepsilon$$

для всех $x > L$. Не уменьшая общности, будем считать, что $\varepsilon < N$. Тогда

$$\int_a^\infty |f(x)|dx = \int_a^L |f(x)|dx + \int_L^\infty |f(x)|dx. \tag{9.9}$$

Первый интеграл в (9.9) существует как обыкновенный, а из второго с учетом очевидного неравенства

$$(N-\varepsilon)\int_L^\infty \frac{dx}{x^\nu} \le \int_L^\infty |f(x)|dx \le (N+\varepsilon)\int_L^\infty \frac{dx}{x^\nu}$$

и значения интеграла

$$\int_L^\infty \frac{dx}{x^\nu} = \lim_{A\to+\infty}\int_L^A \frac{dx}{x^\nu} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\nu-1}\Big[\dfrac{1}{L^{\nu-1}} - \lim\limits_{A\to\infty}\dfrac{1}{A^{\nu-1}}\Big] = \dfrac{L^{1-\nu}}{\nu-1}, & \nu > 1; \\ \dfrac{1}{\nu-1}\Big[\dfrac{1}{L^{\nu-1}} - \lim\limits_{A\to\infty}\dfrac{1}{A^{\nu-1}}\Big] = \infty, & \nu < 1; \\ \lim\limits_{A\to\infty}\dfrac{A}{L} = \infty, & \nu = 1 \end{cases}$$

следует утверждение теоремы.

Пример 9.4. Исследовать на сходимость интегралы

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}\sqrt[3]{1+x^3}},$$

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x}dx, \quad I_3 = \int_0^\infty x^5 e^{-x^2}dx.$$

Решение. Согласно (9.8), имеем

1. $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^\nu}{\sqrt{1+x^2}\sqrt[3]{1+x^3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^\nu}{x^2} = 1$$

при $\nu = 2 > 1$, следовательно, интеграл сходится.

2. $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^\nu\sqrt[3]{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^\nu}{x^{1/3}} = 1$$

при $\nu = 1/3 < 1$, следовательно, интеграл расходится.

3. $$\lim_{x\to\infty} x^\nu x^5 e^{-x^2} = 0$$

при всех $1 < \nu < \infty$, следовательно, интеграл сходится.

$\Diamond$ Аналогично (9.1), (9.2) определяется несобственный интеграл от функции $f(x)$ на промежутке $]-\infty, a]$

$$\lim_{B\to\infty}\int\limits_{-B}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx. \tag{9.10}$$

Естественным обобщением (9.2), (9.10) является несобственный интеграл от функции $f(x)$ на промежутке от $-\infty$ до ∞

$$\lim_{\substack{A\to\infty\\ B\to\infty}}\int\limits_{-B}^{A} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx, \tag{9.11}$$

поскольку в этом случае, выбрав произвольно любое a, можно положить

$$\int\limits_{-B}^{A} f(x)\,dx = \int\limits_{-B}^{a} f(x)\,dx + \int\limits_{a}^{A} f(x)\,dx, \tag{9.12}$$

и существование предела (9.11) равносильно существованию пределов (9.2), (9.10) (случай $\infty-\infty$ исключается). Другими словами, несобственный интеграл (9.11) будет сходиться только в том случае, когда предел (9.11) будет существовать при независимом стремлении A и B к бесконечности.

Как следует из (9.11), (9.12) для $<$двусторонних$>$ несобственных интегралов возникает возможность доопределить понятие сходимости следующим образом. В тех случаях, когда интеграл (9.11) расходится, т.е. не существует как предел при независимом стремлении A и B к бесконечности, может оказаться, что существует предел, отвечающий условию $A = B$ (одинакового стремления A и B к ∞). В этом случае несобственный интеграл (9.11) называют сходящимся в смысле главного значения, или просто главным значением несобственного интеграла, и обозначают V.p. (Valeur principale)

$$\text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to\infty}\int\limits_{-A}^{A} f(x)\,dx. \tag{9.13}$$

Связь интегралов (9.11) и (9.13) раскрывает следующая

Теорема 9.2. *Если несобственный интеграл* (9.11) *сходится в обычном смысле, то его значение совпадает с его главным значением* (9.13).

Доказательство. Предел (9.11) можно рассматривать как предел функции двух переменных $F(A, B)$, т.е.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{A\to\infty\\ B\to\infty}} F(A,B) = \lim_{\substack{A\to\infty\\ B\to\infty}}\int\limits_{-B}^{A} f(x)\,dx.$$

Если этот предел существует, то он не зависит от пути, по которому A и B стремятся к бесконечности, и, следовательно, совпадает с пределом, который можно получить, устремляя A и B к бесконечности по прямой $A = B$, что и требовалось доказать.

В качестве примера рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Легко убедиться, что этот интеграл, вычисленный по формулам (9.11) и (9.13), дает одно и то же значение

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \lim\limits_{\substack{A\to\infty\\ B\to\infty}} \int\limits_{-B}^{A} \dfrac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{\substack{A\to\infty\\ B\to\infty}} (\operatorname{arctg} A + \operatorname{arctg} B) = \\ \qquad\qquad = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} = \pi, \\ \lim\limits_{A\to\infty} \int\limits_{-A}^{A} \dfrac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{A\to\infty} 2\operatorname{arctg} A = 2\dfrac{\pi}{2} = \pi. \end{cases}$$

Поэтому в тех случаях, когда это не приводит к недоразумениям, символ V.p. опускается.

10. Несобственные интегралы II-го типа или интегралы от разрывных функций

Пусть теперь функция непрерывна на $[a, b[$ и неограниченна в точке b.

♦ Несобственным интегралом от функции $f(x)$, непрерывной при $a \leq x < b$ и неограниченной при $x \to b$ называется предел интеграла

$$\int\limits_{a}^{b'} f(x)dx$$

при $b' \to b$ и обозначается

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{b'\to b} \int\limits_{a}^{b'} f(x)dx, \quad b' < b.$$

♦ Если указанный предел существует, то несобственный называется сходящимся, а если не существует, то расходящимся.

Аналогично, если $f(x)$ имеет разрыв в точке a, то

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{a'\to a} \int\limits_{a'}^{b} f(x)dx.$$

Если $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, то соответственно

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{b'\to b} \int\limits_{a}^{b'} f(x)dx = \lim_{b'\to b} F(b') - F(a)$$

при разрыве в точке b и

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{a'\to a}\int\limits_{a'}^b f(x)dx = F(b) - \lim_{a'\to a} F(a)$$

при разрыве в точке a.

Если функция $f(x)$ непрерывна всюду на отрезке $[a,b]$, кроме некоторой точки c, $a < c < b$, и неограниченна вблизи этой точки, то несобственный интеграл определяется равенством

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx,$$

если оба интеграла в правой части сходятся.

Указанные несобственные интегралы являются не пределами интегральных сумм, а пределами определенных интегралов с переменными верхними или нижними пределами.

На сходящиеся несобственные интегралы без всяких изменений распространяются простейшие свойства определенного интеграла.

Далее условимся о следующей терминологии: выражение

$$\int\limits_a^b f(x)dx \tag{10.1}$$

будем называть интегралом от $f(x)$ с единственной особенностью в точке b при выполнении условий: если b – конечная точка, то функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b']$ при любом b', $a < b' < b$, и, кроме того, неограниченна в окрестности точки b; если же $b = +\infty$, то $f(x)$ интегрируема на $[a,b']$ при любом конечном $b' > a$.

Аналогично определяется интеграл с особенностью в точке a.

В дальнейшем для определенности будем рассматривать интегралы с особенностью в точке b.

Справедлива следующая теорема, которую мы сформулируем без доказательства.

Теорема 10.1. *Пусть задан интеграл* (10.1) *с единственной особенностью в точке b. Для его существования необходимо и достаточно выполнение условия (Коши): для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $b_0 < b$, что*

$$\left|\int\limits_{b'}^{b''} f(x)dx\right| < \varepsilon,$$

каковы бы ни были b', b'', удовлетворяющие неравенствам $b_0 < b' < b'' < b$.

Говорят, что интеграл (10.1), имеющий особенность в точке b, сходится абсолютно, если сходится интеграл

$$\int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$$

Можно показать, что абсолютно сходящийся интеграл сходится.

Рассмотрим теперь интеграл (10.1), имеющий единственную особенность в точке b и на промежутке $[a, b[$ интегрирования $f(x) \geq 0$ (т.е. функция неотрицательная).

В этом случае справедливы следующие теоремы.

Теорема 10.2. *Пусть интегралы* (10.1) *и*

$$\int_a^b \varphi(x)dx \tag{10.2}$$

имеют единственную особенность в точке b *и на промежутке* $[a, b[$ *выполняется неравенство*

$$0 \leq f(x) \leq \varphi(x).$$

Тогда из сходимости интеграла (10.2) *следует сходимость интеграла* (10.1) *и*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx,$$

а из расходимости интеграла (10.1) *следует расходимость интеграла* (10.2).

(Без доказательства.)

Теорема 10.3. *Пусть интегралы* (10.1) *и* (10.2) *имеют единственную особенность в точке* b*, подынтегральные функции положительны и существует предел*

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = A > 0.$$

Тогда эти интегралы одновременно сходятся или одновременно расходятся.

В заключение приведем примеры вычисления несобственных интегралов.

Пример 10.1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{a' \to -\infty \\ b' \to \infty}} \int_{a'}^{b'} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{a' \to -\infty \\ b' \to \infty}} \operatorname{arctg} \Big|_{a'}^{b'} =$$
$$= \lim_{b' \to \infty} \operatorname{arctg} b' - \lim_{a' \to -\infty} \operatorname{arctg} a' = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Пример 10.2. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}.$$

Решение. Этот интеграл расходится, так как

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2} + \int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^2}$$

(в точке $x = 0$ существует разрыв), а оба интеграла в правой части расходятся. Формальное же применение формулы Ньютона–Лейбница дает

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = 2.$$

Это кажущееся противоречие объясняется тем, что первообразная $F(x) = -1/x$ функции $f(x) = 1/x^2$ неограниченна вблизи точки $x = 0$, принадлежащей отрезку интегрирования $[-1, 1]$.

Пусть функция $f(x)$ определена, непрерывна и ограничена во всех точках отрезка $[a, b]$, за исключением особой точки $x = a$, в которой

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \infty.$$

Если вместо отрезка $[a, b]$ рассматривать отрезок $[a + \alpha, b]$, где $0 < \alpha < b - a$, то на этом отрезке функция в силу наложенных на нее требований будет интегрируемой. Это означает, что интеграл

$$\int\limits_{a+\alpha}^{b} f(x)\,dx \tag{10.3}$$

существует.

Предел интеграла (10.3) при $\alpha \to +0$ называют несобственным интегралом функции $f(x)$ в интервале от a до b и обозначают

$$\lim_{\alpha\to+0} \int\limits_{a+\alpha}^{b} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx. \tag{10.4}$$

Если предел (10.4) существует и конечен, то несобственный интеграл называют сходящимся, в противном случае — расходящимся. Так, например, интеграл

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

будет сходящимся, так как

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\alpha\to+0} \int\limits_{\alpha}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\alpha\to+0} 2\sqrt{x}\Big|_{\alpha}^{1} = 2 \lim_{\alpha\to+0} (1 - \sqrt{\alpha}) = 2,$$

а интеграл

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^2}$$

– расходящимся, поскольку

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\alpha\to+0} \int_\alpha^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\alpha\to+0} \Big(-\frac{1}{x}\Big)\Big|_\alpha^1 = -\lim_{\alpha\to+0} \Big(1 - \frac{1}{\alpha}\Big) = \infty.$$

Отметим, что определение (10.4) очень похоже на определение (9.2). И действительно, интеграл (10.4) прямо сводиться к интегралу (9.2) с помощью подстановки $x - a = 1/y$. Поэтому все, сказанное относительно несобственных интегралов (9.2) (понятие абсолютной сходимости, критерий сходимости и т.д.), можно достаточно просто переформулировать для интегралов типа (10.4). В силу этого мы ограничимся некоторыми сведениями, существенными в приложениях.

Аналогично (10.4) определяется несобственный интеграл на промежутке $[a, b]$, если особой точкой является точка $x = b$:

$$\lim_{\beta\to+0} \int_a^{b-\beta} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{10.5}$$

Если обе точки a и b оказываются особыми, то определение несобственного интеграла является обобщением (10.4), (10.5) и дается равенством

$$\lim_{\substack{\alpha\to+0\\ \beta\to+0}} \int_{a+\alpha}^{b-\beta} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx, \tag{10.6}$$

аналогичным равенству (9.11), поскольку и в этом случае можно положить

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \tag{10.7}$$

выбрав произвольно любое $a < c < b$.

Рассмотрим еще один случай, когда особой точкой является внутренняя точка c отрезка $[a, b]$. В этом случае вместо интегралов (10.6), (10.7) имеем несобственный интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\beta\to+0\\ \alpha\to+0}} \Big[\int_a^{c-\beta} f(x)\,dx + \int_{c+\alpha}^b f(x)\,dx\Big], \tag{10.8}$$

который будет сходиться, если будут сходиться оба несобственных интеграла в правой части (10.8). В тех случаях, когда интеграл (10.8) расходится, т.е. не существует как предел при независимом стремлении α и β к $+0$, может оказаться, что существует предел, отвечающий условию $\alpha = \beta$. Такой несобственный интеграл (10.8) называют сходящимся в смысле главного значения, или просто главным значением, и обозначают (см. формулу (9.13))

$$\text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to+0} \Big[\int_a^{c-\alpha} f(x)\,dx + \int_{c+\alpha}^b f(x)\,dx\Big]. \tag{10.9}$$

Для (10.8), (10.9) справедлива теорема, аналогичная теореме 9.2.

Пример 10.3. Исследовать на сходимость интегралы

$$I_1 = \int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}, \qquad I_2 = \int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{x^3}, \qquad I_3 = \int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{x^2}.$$

Решение. Для всех подынтегральных выражений точка $x = 0$ является особой. Следовательно, согласно (10.4), (10.5), (10.7),

1) интеграл сходится:

$$I_1 = \int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\substack{\beta\to+0\\ \alpha\to+0}} \frac{3}{2}\big[x^{2/3}\big|_{-1}^{-\beta} + x^{2/3}\big|_{\alpha}^{2}\big] =$$

$$= \frac{3}{2}\lim_{\substack{\beta\to+0\\ \alpha\to+0}}[\sqrt[3]{4} - 1 + \beta^{2/3} - \alpha^{2/3}] = \frac{3}{2}(\sqrt[3]{4} - 1);$$

2) интеграл расходится в обычном смысле:

$$I_2 = \int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{x^3} = \lim_{\substack{\beta\to+0\\ \alpha\to+0}} \Big(-\frac{1}{2}\Big)\Big[\frac{1}{x^2}\Big|_{-1}^{-\beta} + \frac{1}{x^2}\Big|_{\alpha}^{2}\Big] =$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\lim_{\substack{\beta\to+0\\ \alpha\to+0}}\Big(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2}\Big),$$

но сходится в смысле главного значения:

$$I_2 = \int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{x^3} = \lim_{\alpha\to+0} \Big(-\frac{1}{2}\Big)\Big[\frac{1}{x^2}\Big|_{-1}^{-\alpha} + \frac{1}{x^2}\Big|_{\alpha}^{2}\Big] =$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\lim_{\alpha\to+0}\Big(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2}\Big) = \frac{3}{8};$$

3) интеграл расходится во всех случаях:

$$I_3 = \int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\substack{\beta\to+0\\ \alpha\to+0}} -\Big[\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{-\beta} + \frac{1}{x}\Big|_{\alpha}^{2}\Big] =$$

$$= -\lim_{\substack{\beta\to+0\\ \alpha\to+0}}\Big[-\frac{1}{\beta} + 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}\Big] = -\frac{3}{2} + \lim_{\substack{\beta\to+0\\ \alpha\to+0}}\Big(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha}\Big) = \infty.$$

Рассмотренный выше случай легко обобщается на любое число особых точек как на конечном промежутке $[a, b]$, так и на бесконечном $[a, \infty[$ или $]-\infty, \infty[$. В последнем случае особых точек может быть бесконечно много при условии, что в каждом конечном промежутке $[a, A]$ ($[-B, A]$) их должно быть конечное число, которое может расти до бесконечности вместе с A или B.

Очевидно, что все сказанное выше справедливо и для точек, в которых функция не определена.

Пример 10.4. Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^{2/\pi}\Big(\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\Big)dx.$$

Решение. Подынтегральная функция в точке $x=0$ не определена. Тем не менее, согласно (9.10), имеем

$$\int\limits_0^{2/\pi}\Big(\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\Big)dx=\lim_{\alpha\to+0}\int\limits_\alpha^{2/\pi}\Big(x\sin\frac{1}{x}\Big)'dx=$$
$$=\lim_{\alpha\to+0}\Big(x\sin\frac{1}{x}\Big)\Big|_\alpha^{2/\pi}=\frac{2}{\pi}-\lim_{\alpha\to+0}\alpha\sin\frac{1}{\alpha}=\frac{2}{\pi}.$$

Критерий сходимости для несобственного интеграла (10.4) дает следующая

Теорема 10.4. *Интеграл* (10.4) *сходится, если функция $f(x)$ в особой точке $x=a$ обращается в бесконечность ниже первого порядка, в противном случае интеграл* (10.4) *расходится.*

Доказательство полностью аналогично доказательству теоремы 9.2. Результаты примера 10.3 полностью соответствуют указанному критерию сходимости.

Рассмотренный критерий сходимости справедлив и для интегралов (10.5), (10.6), (10.8). Что касается интеграла (10.9), то здесь дело обстоит несколько иначе. Рассмотрим

Пример 10.5. Вычислить интеграл ($a<c<b$)

$$I=\text{V.p.}\int\limits_a^b\frac{dx}{(x-c)^n},\quad n=\overline{1,\infty}. \tag{10.10}$$

Решение. Согласно (10.9), имеем

при $n=1$

$$\text{V.p.}\int\limits_a^b\frac{dx}{x-c}=\lim_{\alpha\to+0}\Big[\ln(c-x)\Big|_a^{c-\alpha}+\ln(x-c)\Big|_{c+\alpha}^b\Big]=$$
$$=\lim_{\alpha\to+0}[\ln\alpha-\ln(c-a)+\ln(b-c)-\ln\alpha]=\ln\frac{b-c}{c-a};$$

при $n=2k+1$, $k=\overline{1,\infty}$

$$\text{V.p.}\int\limits_a^b\frac{dx}{(x-c)^{2k+1}}=$$
$$=\lim_{\alpha\to+0}\Big(-\frac{1}{2k}\Big)\Big[\frac{1}{(x-c)^{2k}}\Big|_a^{c-\alpha}+\frac{1}{(x-c)^{2k}}\Big|_{c+\alpha}^b\Big]=$$
$$=-\frac{1}{2k}\lim_{\alpha\to+0}\Big[\frac{1}{\alpha^{2k}}-\frac{1}{(a-c)^{2k}}+\frac{1}{(b-c)^{2k}}-\frac{1}{\alpha^{2k}}\Big]=$$

$$= \frac{1}{2k}\Big[\frac{1}{(a-c)^{2k}} + \frac{1}{(b-c)^{2k}}\Big];$$

при $n = 2k$, $k = \overline{1,\infty}$

$$\text{V.p.}\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-c)^{2k}} =$$

$$= \lim_{\alpha\to+0}\Big(\frac{1}{1-2k}\Big)\Big[\frac{1}{(x-c)^{2k-1}}\Big|_a^{c-\alpha} + \frac{1}{(x-c)^{2k-1}}\Big|_{c+\alpha}^b\Big] =$$

$$= \frac{1}{1-2k}\lim_{\alpha\to+0}\Big[\frac{1}{(b-c)^{2k-1}} - \frac{1}{(a-c)^{2k-1}} - \frac{2}{\alpha^{2k-1}}\Big] = \infty.$$

Из рассмотренного примера следует, что интеграл (10.10) в смысле главного значения может сходиться для некоторых значений $n \geq 1$, а именно нечетных.

Пример 10.6. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-c_1)^{n_1}\cdots(x-c_k)^{n_k}}, \quad -\infty < c_1 < \cdots < c_k < \infty \tag{10.11}$$

для случаев

а) $c_1 = 0, \quad , n_1 = 1, \quad k = 1;$
б) $c_1 = c, \quad , n_1 = n = \overline{2,\infty}, \quad k = 1;$
в) $n_1 = n_2 = 1, \quad k = 2;$
г) $n_1 = \overline{2,\infty}, \quad n_2 = \overline{2,\infty}, \quad k = 2.$

Решение. а) Интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{\substack{A,B\to\infty\\ \alpha,\beta\to+0}}\Big[\int\limits_{-B}^{-\beta}\frac{dx}{x} + \int\limits_{\alpha}^{A}\frac{dx}{x}\Big] =$$

$$= \lim_{\substack{A,B\to\infty\\ \alpha,\beta\to+0}}\Big[\ln x\Big|_{-B}^{-\beta} + \ln x\Big|_{\alpha}^{A}\Big] =$$

$$= \lim_{\substack{A,B\to\infty\\ \alpha,\beta\to+0}}[\ln\beta - \ln B + \ln A - \ln\alpha] = \lim_{\substack{A,B\to\infty\\ \alpha,\beta\to+0}}\Big[\ln\frac{\beta A}{\alpha B}\Big] \tag{10.12}$$

расходится в обычном смысле, но сходится в смысле главного значения ($\alpha = \beta$, $A = B$). Из (10.12) следует, что интегралы

$$\int\limits_{-\infty}^{c}\frac{dx}{x-c}, \qquad \int\limits_{c}^{\infty}\frac{dx}{x-c}$$

всегда расходятся.

б) Интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x-c)^n}, \qquad n = \overline{2,\infty}$$

в обычном смысле расходится, однако, как следует из примера 10.3, сходится в смысле главного значения для нечетных n.

в) Интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-c_1)(x-c_2)}$$

сходится при $|x| \to \infty$, а для внутренних точек, будучи разложенным на простейшие дроби

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-c_1)(x-c_2)} = A\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x-c_1} + B\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x-c_2},$$

сводится к случаю а).

г) Интеграл

$$\text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-c_1)^{n_1}(x-c_2)^{n_2}}, \qquad n_1 > 1, \quad n_2 > 1,$$

заведомо расходится, если хотя бы один из показателей степени n_1 или n_2 четный.

Рассмотрим еще один интеграл

$$\int\limits_a^b \frac{f(x)}{x-c}dx. \tag{10.13}$$

Будем говорить, что функция $f(x)$ удовлетворяет в некотором промежутке условию Липшица (или Гельдера–Липшица) с показателем $0 < p \leq 1$, если для любых значений x_1 и x_2 из этого промежутка выполняется условие

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq k|x_2 - x_1|^p. \tag{10.14}$$

Легко видеть, что условие (10.14) является более сильным, чем условие простой непрерывности, поскольку из (10.14) вытекает условие непрерывности, а из условия непрерывности, вообще говоря, не следует, что функция удовлетворяет условию Липшица.

Возвращаясь к интегралу (10.13), предположим, что на отрезке $[c-\alpha, c+\alpha]$ функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица, а в остальной части промежутка $]a, b[$ является непрерывной или даже только интегрируемой. Тогда

$$\text{V.p.}\int\limits_a^b \frac{f(x)}{x-c}dx = \text{V.p.}\Big[\int\limits_a^b \frac{f(x)-f(c)}{x-c}dx + f(c)\int\limits_a^b \frac{dx}{x-c}\Big]. \tag{10.15}$$

В силу условия (10.14) для оценки первого интеграла (10.15) имеем

$$\Big|\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\Big| \leq \frac{k}{|x-c|^{1-p}}, \tag{10.16}$$

и, следовательно, этот интеграл будет абсолютно сходящимся в обычном смысле, а второй интеграл равен (см. пример 10.3)

$$f(c)\ln\frac{b-c}{c-b}.$$

Таким образом, интеграл (10.15) сходится.

В заключение отметим, что в некоторых случаях существуют замены переменных, позволяющие свести несобственный интеграл к обычному.

Пример 10.7. Вычислить интеграл

$$I=\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Решение. Сделаем в интеграле замену переменных $x=\sin\varphi$. Тогда

$$dx=\cos\varphi\,d\varphi,\quad x_1=0,\ \varphi_1=0,\quad x_2=1,\ \varphi_2=\frac{\pi}{2},$$

и исходный интеграл примет вид

$$I=\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi=\frac{\pi}{2}.$$

11. Геометрические приложения определенного интеграла

11.1. Вычисление площадей плоских фигур

К понятию определенного интеграла исторически привела задача о площади криволинейной трапеции. Как известно, если криволинейная трапеция ограничена сверху кривой $y=f(x)$, где $f(x)\ge 0$ и $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, снизу отрезком $[a,b]$ оси Ox и прямыми $x=a$ и $x=b$, то площадь трапеции выражается равенством

$$S=\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Если же $f(x)\le 0$, то площадь фигуры выражается формулой

$$S=\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right|=-\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Рассмотрим фигуру, ограниченную слева и справа прямыми $x=a$, $x=b$, а снизу и сверху – кривыми $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$, $f_1(x)\le f_2(x)$, где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ – непрерывные на $[a,b]$ функции. В этом случае площадь фигуры вычисляется по формуле

$$S=\int\limits_a^b[f_2(x)-f_1(x)]dx$$

как разность площадей криволинейных трапеций.

Пример 11.1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $y = x^2$, $x = 2$ (рис. 2).

Решение. Здесь

$$S = \int\limits_1^2 [x^2 - x]dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]\Big|_1^2 = \frac{5}{6}.$$

Рис. 2

Рассмотрим теперь, как вычисляется площадь фигуры в криволинейных координатах.

♦ Криволинейным сектором называется фигура, ограниченная двумя лучами, исходящими из одной точки, и кривой линией, с которой лучи пересекаются не более чем в одной точке.

Пусть прямые, ограничивающие сектор, исходят из начала координат O и образуют с осью углы α и β $(\alpha < \beta)$. Будем пользоваться полярной системой координат, в которой уравнение кривой имеет вид $\rho = \rho(\varphi)$ $(\alpha \leq \varphi \leq \beta)$. Функция $\rho = \rho(\varphi)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$. Разобьем сектор на n частей лучами, для которых $\varphi = \varphi_i$, $i = \overline{1, n-1}$, идущими из начала координат.

Каждый из полученных частичных криволинейных секторов, заключенных между лучами, для которых $\varphi = \varphi_i$ и $\varphi = \varphi_{i+1}$, заменим круговым сектором, взяв радиус окружности равным $\rho_i = \rho(\varphi_i)$. Так как площадь частичного кругового сектора радиуса $\rho(\varphi_i)$ с центральным углом $\Delta\varphi_i = \varphi_{i+1} - \varphi_i$ равна

$$\frac{1}{2}[\rho(\varphi_i)]^2 \Delta\varphi_i,$$

то для площади всего криволинейного сектора получим приближенное выражение

$$S \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2}[\rho(\varphi_i)]^2 \Delta\varphi_i, \qquad \varphi_0 = \alpha, \quad \varphi_n = \beta.$$

Полученная сумма является интегральной суммой для функции $\rho^2(\varphi)/2$ на отрезке $[\alpha, \beta]$. Предел этой суммы и дает искомую площадь, а пределом является определенный интеграл. Следовательно, площадь криволинейного сектора равна

$$S = \frac{1}{2} \int\limits_\alpha^\beta \rho^2(\varphi) d\varphi.$$

11.2. Вычисление объемов тел

Вычислим объем V тела вращения, ограниченного плоскостями $x = a$, $x = b$ и поверхностью вращения кривой $y = f(x)$ вокруг оси Ox, где $f(x)$ – непрерывная на $[a, b]$ функция (рис. 3).

Разобьем отрезок $[a, b]$ на части:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

Будем считать, что элемент ΔV объема тела, ограниченного плоскостями $x = x_i$ и $x = x_{i+1}$, приближенно равен объему цилиндра высотой $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ и радиусом $y_i = f(x_i)$:

$$\Delta V_i \approx \pi [f(x_i)]^2 \Delta x_i.$$

Величина

$$V_n = \pi \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_i)]^2 \Delta x_i$$

приближенно выражает объем тела, и предел полученной интегральной суммы при $n \to \infty$ при стремлении наибольшего Δx_i к нулю и дает искомый объем:

$$V = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=0}^{n-1} f^2(x_i) \Delta x_i = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Итак, объем тела вращения равен

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx = \pi \int_a^b y^2 dx,$$

Рис. 3

где ось вращения – ось Ox.

Если же тело получено вращением кривой вокруг оси Oy, то объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_c^d x^2 dy,$$

где $x = \psi(y)$ – уравнение кривой вращения. Эта функция непрерывна на $[c, d]$.

Пример 11.2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью, полученной вращением кривой $y = x^3$, $0 \le x \le 1$, вокруг оси Ox.

Решение. На основании записанной выше формулы для вычисления объема тела имеем

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_0^1 x^6 dx = \pi \frac{x^7}{7} = \frac{\pi}{7}.$$

11.3. Вычисление длины дуги

Пусть некоторая кривая определяется уравнением $y = f(x)$, где функции $f(x)$ непрерывна вместе со своей производной. Такие кривые называются гладкими.

♦ Длиной дуги кривой линии называется предел, к которому стремится длина вписанной в нее ломаной линии при неограниченном увеличении числа ее сторон и стремлении наибольшей из них к нулю.

Найдем длину дуги AB, заданной уравнением

$$y = f(x),$$

где функция $f(x)$ непрерывна вместе со своей производной $f'(x)$ на $[a, b]$, соответствуем дуге AB. Разобьем дугу AB на n частей точками деления, абсциссы которых есть

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

Проведя через каждые две последовательные точки деления хорду, построим ломаную, длина которой ℓ_n равна

$$\ell_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

или

$$\ell_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \Big(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\Big)^2}\Delta x_i,$$

где

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \qquad \Delta y_i = y_i - y_{i-1} = f(x_i) - f(x_{i-1}).$$

По формуле Лагранжа имеем

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i), \quad x_{i-1} < \xi_i < x_i.$$

Поэтому

$$\ell_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}\Delta x_i.$$

Полученная сумма есть интегральная сумма для функции $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ на $[a, b]$. Переходя к пределу при $n \to \infty$ и $\max \Delta x_i \to 0$, найдем, что длина дуги равна

$$\ell = \int\limits_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$$

или

$$\ell = \int\limits_a^b \sqrt{1 + y'^2}dx.$$

Если кривая задана параметрически

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \qquad t_1 \le t \le t_2,$$

то

$$\ell = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}dt.$$

Если же кривая задана уравнением в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, то, учитывая формулы

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases}$$

связывающие полярные и прямоугольные координаты, и применяя формулу для длины дуги, заданной параметрически, найдем

$$\ell = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi.$$

12. Физические приложения определенных интегралов

Рассмотрим несколько важных задач физики, где находит применение теория определенного интеграла.

12.1. Работа переменной силы

Пусть под действием некоторой силы тело движется по прямой линии, причем направление действия силы совпадает с направлением движения. Требуется определить работу, произведенную при перемещении тела из положения M в положение N. Если на всем пути сила постоянна, то, как известно, работа равна произведению силы на длину пути:

$$A = PS,$$

где P – сила; S – длина пути.

Предположим теперь, что сила на пути от M к N изменяется. В каждой точке между M и N действующая сила принимает соответствующее значение P, т.е. сила P есть некоторая функция расстояния: $P = f(S)$. Разобьем весь путь MN на n частей точками S_i, находящимися на расстояниях $S_0 = 0, S_1, S_2, \ldots, S_n = S$ от точки M.

Вместо переменной силы P возьмем другую силу P_n, сохраняющую постоянное значение на каждом из участков $[S_{i-1}, S]$ и равную $P_n = f(\xi_i)$, где $\xi_i \in [S_{i-1}, S_i]$. Так как работа на всем пути равна сумме работ, соответствующих отдельным участкам, то для работы A_n, произведенной силой P_n, имеем

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta S_i,$$

где $\Delta S_i = S_i - S_{i-1}$; A_n – приближенное значение искомой работы. Работу A определяют как предел A_n при $n \to \infty$ и $\max \Delta S_i \to 0$:

$$A = \lim_{\max \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta S_i = \int\limits_{0}^{S} f(S)dS.$$

12.2. Масса материальной кривой

Возьмем отрезок материальной линии и предположим, что известна линейная плотность σ в каждой ее точке s, т.е. $\sigma = f(s)$, причем длина кривой равна S. Задача о массе решается аналогично предыдущим задачам, а потому масса m материальной линии длины S определяется как

$$m = \int\limits_0^S f(s)ds.$$

12.3. Центр тяжести криволинейной трапеции

Рассмотрим однородную пластинку постоянной толщины. Поверхностную плотность ее обозначим через σ. Центр тяжести пластинки будет лежать в ее серединной плоскости, которую примем за плоскость xOy, и, следовательно, положение центра тяжести будет зависеть от геометрической формы пластинки. Будем считать, что область, которую занимает пластинка в плоскости xOy, имеет форму криволинейной трапеции, ограниченной линией $y = f(x)$ с основанием $[a, b]$ на оси Ox; функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$.

Применив ту же схему рассуждений, что и в предыдущих задачах, можем получить следующие формулы для вычисления координат центра тяжести однородной пластинки:

$$x_{\text{цт}} = \frac{1}{S}\int\limits_a^b xy\,dx, \quad y_{\text{цт}} = \frac{1}{2S}\int\limits_a^b y^2 dx,$$

где

$$S = \int\limits_a^b y\,dx$$

– площадь пластинки.

??

12.4. Интегралы по симметричному отрезку от четной и нечетной функций

Легко показать, что если $f(u)$ – четная функция, т.е. $f(-u) = f(u)$, то интеграл по симметричному отрезку $[-a, a]$

$$\int_{-a}^{a} f(u)du = 2\int_{0}^{a} f(u)du.$$

Если $f(u)$ – нечетная функция, т.е. $f(-u) = -f(u)$, то интеграл по симметричному отрезку $[-a, a]$

$$\int_{-a}^{a} f(u)du = 0.$$

Например,

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\,dx = 2\int_{0}^{\pi/2} \cos x\,dx = 2\sin x\Big|_{0}^{\pi/2} = 2\sin\frac{\pi}{2} = 1,$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x\,dx = 0 - \cos x\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}.$$

13. Приближенные методы вычисления определенного интеграла

Пусть требуется вычислить определенный интеграл

$$I = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

от непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Если может быть найдена первообразная $F(x)$ подынтегральной функции, то, согласно формуле Ньютона–Лейбница,

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Для широкого класса элементарных функций первообразная уже не является элементарной функцией и не может быть определена их конечной комбинацией. К таким функциям относятся, например,

$$\frac{\sin x}{x}, \quad \frac{1}{\ln x}, \quad \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}, \quad \frac{e^{-x}}{x}.$$

Если же первообразная не может быть найдена или если функция $y = f(x)$ задана графически или таблично, то для вычисления интеграла прибегают к приближенным формулам, точность которых можно сделать сколь угодно большой.

Приближенные методы вычисления определенного интеграла в большинстве случаев основаны на том, что определенный интеграл численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, сегментом $[a, b]$ оси Ox и вертикальными прямыми, проведенными через точки $x = a$ и $x = b$Благодаря этому задача о приближенном вычислении интеграла равносильна задаче о приближенном вычислении площади криволинейной трапеции.

Идея приближенного вычисления интеграла заключается в том, что кривая $y = f(x)$ заменяется (аппроксимируется) новой, достаточно близкой кривой. Тогда искомая площадь приближенно равна площади криволинейной трапеции, ограниченной новой кривой. В качестве этой новой ограничивающей кривой выбирают такую, для которой просто вычислить площадь криволинейной трапеции. В зависимости от выбора новой кривой получается та или иная приближенная формула интегрирования.

♦ Квадратурной формулой называется всякая формула численного вычисления??? определенного интеграла.

13.1. Формула прямоугольников

Отрезок интегрирования делится на n равных частей точками разбиения:

$$x_0 = a, < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Длина каждой такой части равна

$$h = \frac{b-a}{n}.$$

Эта величина называется шагом интегрирования. В качестве точек ξ_k выбраны средние точки соответствующих отрезков:

$$\xi_k = a + h\Big(k - \frac{1}{2}\Big), \quad k = \overline{1, n}.$$

В этом случае выражение для интегральной суммы примет вид

$$I_n = \big[f(\xi_1) + f(\xi_2) + \cdots + f(\xi_n)\big]\frac{b-a}{n}.$$

Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то

$$\lim I_n = J = \int\limits_a^b f(x)dx. \tag{13.1}$$

Согласно (13.1), выражение для интеграла J можно записать в виде

$$J = I_n + R_n(f),$$

где $R_n(f)$ – погрешность метода:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(f) = 0.$$

Пренебрегая величиной $R_n(f)$, получим приближенную формулу для вычисления интеграла J, которую обычно называют формулой прямоугольников:

$$J \approx I_n = \big[f(\xi_1) + f(\xi_2) + \dots + f(\xi_n)\big]\frac{b-a}{n}, \tag{13.2}$$

$$I_n = h\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k). \tag{13.3}$$

Предположим, что функция $F(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывную вторую производную. В этом случае справедливо следующее утверждение: на отрезке $[a, b]$ существует такая точка x_n^*, что погрешность формулы можно записать в виде

$$R_n(f) = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(x_n^*), \quad a \le x_n^* \le b. \tag{13.4}$$

Важная особенность данной формулы состоит в том, что нам гарантировано существование соответствующей точки x_n^*, но ничего не известно о ее положении. Поэтому формула (13.4) не позволяет вычислять $R_n(f)$, но дает возможность ее оценить:

$$|R_n(f)| \le \frac{(b-a)^3}{24n^2}\max|f''(x)|. \tag{13.5}$$

Это неравенство показывает, что с возрастанием n погрешность в формуле (13.2) убывает медленнее, чем $1/n^2$.

13.2. Формула трапеций

Пусть требуется вычислить определенный интеграл от непрерывной функции $f(x)$. Разобьем отрезок интегрирования $[a, b]$ на n равных частей длины $h = (b-a)/n$ точками $x_k = a + kh$, $k = \overline{0, n}$:

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Через точки разбиения проведем прямые, параллельные оси Oy. Пусть они пересекают кривую в точках $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}, A_n$. Заменим данную кривую вписанной в нее ломаной $A_0A_1 \dots A_n$, соединив концы смежных ординат??? прямыми линиями. Вместо криволинейных трапеций получим трапеции???, площади которых равны последовательно

$$\frac{y_0 + y_1}{2}h, \quad \frac{y_1 + y_2}{2}h, \quad \dots, \frac{y_{n-1} + y_n}{2}h.$$

Следовательно, площадь фигуры, ограниченной сверху ломаной $A_0A_1 \dots A_n$, есть

$$S_n = \frac{y_0 + y_1}{2}h + \frac{y_1 + y_2}{2}h + \dots + \frac{y_{i-1} + y_i}{2}h + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}h.$$

После преобразований получим

$$S_n = h\Big(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + y_{n-1}\Big), \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

Таким образом, определенный интеграл аппроксимируется приближенной формулой

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx h\Big(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + y_{n-1}\Big), \tag{13.6}$$

которая называется формулой трапеций.

Предположим, что функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывную вторую производную. В этом случае справедливо следующее утверждение: на отрезке $[a, b]$ существует такая точка ξ, что погрешность формулы можно записать в виде

$$R_n(f) = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi), \quad a \le \xi \le b. \tag{13.7}$$

Поскольку положение точки ξ неизвестно, то формула (13.7) не позволяет оценить погрешность $R(f)$:

$$|R(f)| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max |f''(x)|.$$

Данная оценка отличается от оценки погрешности формулы прямоугольников только числовым множителем. Таким образом, формулы прямоугольников и трапеций характеризуются??? примерно одинаковой точностью.

Важно отметить, что формула трапеций точна для линейных функций $f(x) = Ax + B$, где A и B – постоянные, т.е. для полиномов не выше первой степени. Если подставить такую функцию в (13.6) вместо $f(x)$, то получится точное равенство. В этом смысле формула трапеций не имеет преимуществ перед формулой прямоугольников, обе они точны для линейных функций.

Для формулы трапеций приближенная оценка погрешности по принципу Рунге дает

$$\Delta \approx \frac{I_n - I_{2n}}{3},$$

где I_n – интеграл, вычисленный с шагом h при числе шагов n; I_{2n} – интеграл, вычисленный с шагом $h/2$ при числе шагов $2n$.

13.3. Формула Симпсона (формула парабол)

Здесь отрезок интегрирования $[a, b]$ делится на четное число равных частей. Обозначим это число через $2n$, точки разбиения отрезка через

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{2n-1} < x_{2n} = b, \quad h = \frac{b-a}{2n},$$

а значения подынтегральной функции в этих точках через

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_{2n-2},\ y_{2n-1},\ y_{2n}.$$

Заменим дугу линии $y - f(x)$, соответствующую интервалу $[x_0, x_1]$, дугой параболы, ось которой параллельна оси ординат и которая проходит через три точки дуги: начальную точку дуги (x_0, y_0), среднюю точку (x_1, y_1), конечную точку (x_2, y_2). Аналитически это означает, что в интервале $[x_0, x_2]$ данная функция $y = f(x)$ заменяется квадратичной??? параболой

$$y = Ax^2 + Bx + C.$$

Коэффициенты A, B и C выбираются так, чтобы значения обеих функций были равны при x_0, x_1 и x_2 соответственно:

$$\begin{cases} y_0 = Ax_0^2 + Bx_0 + C, \\ y_1 = Ax_1^2 + Bx_1 + C, \\ y_2 = Ax_2^2 + Bx_2 + C. \end{cases}$$

Решив полученные уравнения, найдем коэффициенты

$$A = \frac{y_2 + y_0 - 2y_1}{2h^2}, \quad C = y_1, \quad B = \frac{y_2 - y_0}{2h}.$$

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной вспомогательной параболой, приближенно равна площади заданной криволинейной трапеции:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \int\limits_a^b (Ax^2 + Bx + C)dx$$

или

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}(y_{\text{н}} + 4y_{\text{с}} + y_{\text{к}}),$$

где $y_{\text{н}}$ – ордината начальной точки; $y_{\text{с}}$ – ордината средней точки; $y_{\text{к}}$ – ордината конечной точки дуги параболы.

Аналогично выразятся площади последующих трапеций:

$$S_1 = \frac{x_2 - x_0}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2), \ldots$$

Формула для приближенного вычисления интеграла в этом случае записывается так:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}[(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2n-2})]$$

или, если обозначить

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= y_0 + y_{2n}; \\ \Sigma_2 &= y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1}; \\ \Sigma_3 &= y_2 + y_4 + \cdots + y_{2n-2}, \end{aligned}$$

то

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}(\Sigma_1 + 4\Sigma_2 + 2\Sigma_3). \tag{13.8}$$

Формула (13.8) называется формулой Симпсона. Остаточный член

$$R_n(f) = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi), \quad a \le \xi \le b.$$

Отсюда получаем

$$R_n(f) \le \frac{(b-a)^5}{180n^2} \max |f^{(4)}(x)|.$$

Приближенная оценка погрешности для формулы Симпсона

$$\Delta \approx \frac{1}{15}|I_n - I_{2n}|.$$

ГЛАВА 2

Интегральное исчисление функций нескольких переменных

14. Двойные интегралы

14.1. Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла

К понятию двойного интеграла приводит ряд геометрических и физических задач, например задача о вычислении объёма, массы плоской пластины и др. Мы рассмотрим одну из них, а именно задачу об объёме.

Пусть G – область в плоскости xOy, ограниченная замкнутым контуром. Рассмотрим тело, ограниченное областью G, цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси Oz и частью поверхности, уравнение которой $z = f(x, y)$. Предположим, что функция $z = f(x, y)$ определена, непрерывна и неотрицательна в области S (см. рис. 4). (Здесь через S обозначена площадь области G; в дальнейшем площадь области будем обозначать той же буквой, что и саму область, но без скобок.)

Рис. 4

Такое тело назовем цилиндрическим. Поставим задачу о вычислении объёма цилиндрического тела. Для этого разобьем область G произвольным образом на n малых областей площадью ΔS_1, ΔS_2, ..., ΔS_n, причем

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = S.$$

Над каждой из площадок ΔS_i построим цилиндр, ограниченный сверху куском поверхности, проектирующимся в площадку ΔS_i, т.е. цилиндрическое тело разобьем на n столбиков с основаниями ΔS_i. Обозначим объём столбика с таким основанием через ΔV_i. Тогда объём цилиндрического тела будет равен сумме объёмов этих столбиков

$$V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i.$$

Рассмотрим цилиндр с основанием ΔS_i. За высоту цилиндра примем аппликату z_i точки $N_i(x_i, y_i)$ площадки ΔS_i. Объём этого цилиндра, равный произведению площади основания ΔS_i на высоту $z = f(x_i, y_i)$, примем за приближенное значение объёма ΔV_i столбика с основанием ΔS_i:

$$\Delta V_i = f(x_i, y_i)\Delta S_i.$$

Найдя сумму всех таких объёмов, получим приближенное значение объёма цилиндрического тела

$$V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i. \tag{14.1}$$

Точным значением объёма V будем считать предел суммы (14.1) при условии, что число площадок ΔS_i неограниченно увеличивается и каждая площадка стягивается в точку:

$$V = \lim \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i.$$

Итак, задача о вычислении объёма V цилиндрического тела свелась к нахождению некоторого предела. К отысканию предела подобных сумм для функции двух переменных приводят самые разнообразные задачи, не только задача об объёме. Эти задачи приводят нас к очень важному обобщению определенного интеграла — двойному интегралу, к изучению которого мы сейчас и перейдем.

14.2. Определение двойного интеграла. Теорема существования

Пусть в области G плоскости xOy задана функция $z = f(x, y) = f(N)$.

Рассмотрим понятие «площади». Через T^* обозначим многоугольник, содержащий область G ($G \subset t^*$), а через T_* – многоугольник, содержащийся внутри области G ($T_* \supset G$).

♦ Область G называется квадрируемой, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие многоугольники T^* и T_*, что площадь

$$|\operatorname{mes} T^* - \operatorname{mes} T_*| < \varepsilon,$$

где $\operatorname{mes} T^*$ — площадь многоугольника.

Свойства:

1. Аддитивность. Пусть T_1 и T_2 – два многоугольника и $T_1 \cap T_2 = \emptyset$, то $\operatorname{mes} T_1 \cup T_2 = \operatorname{mes} T_1 + \operatorname{mes} T_2$.
2. Положительность. $T > 0$

Утверждение 14.1. *Область G квадрируема тогда и только тогда, когда площадь границы области равна нулю.*

Проведем разбиение области G на области ΔG_k так, что

$$G = \bigcup_{k=1}^{n} \Delta G_k.$$

Тогда для соответствующих площадей получим

$$S = \operatorname{mes} G = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{mes} \Delta G_k.$$

Обозначим через d_k диаметр области ΔG_k: $d_k = \max\limits_{P,M \in G_k} |P - M|$, а через $d = \max\limits_{k=\overline{1,n}} d_k$. $\Delta S_k = \operatorname{mes} G_k$ — площадь k-й области.

Рассмотрим произвольную точку $N = (\xi_k, \eta_k)$, принадлежащую k-й области

$$\sigma = \sigma(\{\Delta G_k\}_{k=1}^{n}, d) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) \Delta S_k. \tag{14.2}$$

♦ Величина σ (14.2) называется интегральной суммой функции $f(x, y)$ в области G.

♦ Число I называется двойным интегралом, если для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое $\delta > 0$, что при всех $d < \delta$ выполнялось неравенство

$$|I - \sigma(\{G_k\}_{k=1}^{n}, d)| < \varepsilon,$$

и записывается

$$I = \iint\limits_{G} f(x,y)dS = \lim_{\substack{d\to 0\\ n\to\infty}} \sigma(\{G_k\}_{k-1}^{n}, d), \tag{14.3}$$

где $dS = dx\,dy$ — площадь элементарной площадки.

♦ Функция $f(x,y)$, для которой существует двойной интеграл в замкнутой области G, называется интегрируемой по Риману в области G.

Если функция $f(x,y)$ непрерывна, то в каждой области G_k она принимает наибольшее и наименьшее значения. Пусть m_k — наименьшее, а M_k — наибольшее значения функции $f(x,y)$ в области G_k. Очевидно, что $m_k \le f(x,y) \le M_k$ для всех $(x,y) \in G_k$. Обозначим через m и M наименьшее и наибольшее значения функции $f(x,y)$ в области G. Построим следующие конструкции:

$$\begin{aligned} S_* &= S_*(\{G_k\}_{k=1}^{n}, d) = \sum_{k=1}^{n} m_k S_k,\\ S^* &= S^*(\{G_k\}_{k=1}^{n}, d) = \sum_{k=1}^{n} M_k S_k. \end{aligned} \tag{14.4}$$

♦ Величины S_* и S^* (14.4) называются соответственно нижней и верхней суммами Дарбу функции $f(x,y)$ в области G.

Тогда справедливо следующее утверждение.

Утверждение 14.2. *Справедливы соотношения*

$$\begin{aligned} S_* &= \inf_{(\xi_k,\eta_k)\in G_k} \sigma(\{G_k\}_{k-1}^{n}, d),\\ S^* &= \sup_{(\xi_k,\eta_k)\in G_k} \sigma(\{G_k\}_{k-1}^{n}, d). \end{aligned}$$

Приведем без доказательства важную теорему о существовании двойного интеграла.

Теорема 14.1. *Если функция $f(x,y)$ — непрерывная и ограниченная в замкнутой области G, то для нее существует двойной интеграл, определенный соотношением* (14.3).

В дальнейшем мы будем рассматривать только функции, непрерывные в области интегрирования.

Двойной интеграл имеет простой геометрический смысл: двойной интеграл непрерывной функции $f(x,y)$ в замкнутой ограниченной области G равен объёму цилиндрического тела с основанием G в плоскости xOy, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x,y)$.

Если $f(x,y) \le 0$, то двойной интеграл равен объёму тела, взятому со знаком минус.

В общем случае двойной интеграл можно представить, как сумму объёмов цилиндрических тел, расположенных над плоскостью xOy и под ней.

14.3. Свойства двойного интеграла. Теорема о среднем

Определение двойного интеграла конструктивно аналогично определению определенного интеграла как предела интегральных сумм. Поэтому двойной интеграл обладает теми же свойствами, что и определенный интеграл. Доказательства этих свойств совершенно аналогично доказательству соответствующих свойств определенного интеграла. Приведем свойства двойного интеграла без вывода:

1) если подынтегральная функция $f(x,y)=1$, то значение двойного интеграла численно равно площади области интегрирования

$$\iint\limits_{G} dS = S;$$

2) переменных интегрирования в двойном интеграле можно обозначать любой буквой

$$\iint\limits_{G} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{G} f(\xi,\zeta)\,d\xi d\zeta;$$

3) постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла:

$$\iint\limits_{G} kf(N)\,dS = k\iint\limits_{G} f(N)dS;$$

4) двойной интеграл от суммы нескольких функций равен сумме двойных интегралов от слагаемых:

$$\iint\limits_{G} [f_1(x,y)+f_2(x,y)]dS = \iint\limits_{G} f_1(x,y)dS + \iint\limits_{G} f_2(x,y)dS;$$

5) если область G разбита на две G_1 и G_2, не имеющие общих внутренних точек, то

$$\iint\limits_{G} f(N)dS = \iint\limits_{G_1} f(N)dS + \iint\limits_{G_2} f(N)dS;$$

6) если $f(x,y)\geq 0$ всюду в области G, то

$$\iint\limits_{G} f(x,y)dS \geq 0;$$

7) если $f_1(x,y)\leq f_2(x,y)$ всюду в области G, то

$$\iint\limits_{G} f_1(x,y)dS \leq \iint\limits_{G} f_2(x,y)dS;$$

8) справедлива оценка

$$mS_G \leq \iint\limits_{G} f(x,y)dS \leq MS_G;$$

9) справедлива оценка

$$\left|\iint\limits_{G} f(x,y)dS\right| \leq \iint\limits_{G} |f(x,y)|dS.$$

Теорема 14.2 (теорема о среднем). *Если функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области G, то в этой области существует такая точка $P(\xi, \eta)$, что*

$$\iint\limits_G f(x,y)dS = f(\xi,\eta)S,$$

где S – площадь области интегрирования.

Если $f(x, y) \geq 0$, то теорема о среднем имеет следующий геометрический смысл: объём цилиндрического тела численно равен объёму прямого цилиндра с тем же основанием G, что и у цилиндрического тела, и высотой, равной значению функции $f(x, y)$ в некоторой точке $P(\xi, \eta)$ области G.

15. Вычисление двойного интеграла в декартовой системе координат

Вычисление двойного интеграла сводится к последовательному вычислению двух определенных интегралов.

⧫ Область $E \subset \mathbb{R}^2$ называется простой, если любая прямая, параллельная оси Oy, пересекает границу области E не более чем в двух точках.

Теорема 15.1. *Если для функции $f(x, y)$, определенной в замкнутой ограниченной области G, ограниченной линиями $x = a$, $x = b$, $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — непрерывные функции ($\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$), существует двойной интеграл и при любом x существует функция*

$$J(x) = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

то для функции $f(x)$ существует повторный интеграл

$$\int\limits_a^b J(x)dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

Причем двойной и повторный интегралы совпадают

$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy. \tag{15.1}$$

Интегралы, стоящие в правой части (15.1), *называют повторными или двукратными.*

Доказательство. 1 *случай.* Рассмотрим сначала случай, когда область G — прямоугольник. Проведем разбиение $\{x_k\}_{k=1}^n$ отрезка $[a, b]$ и $\{y_j\}_{j=1}^m$ отрезка $[c, d]$. Тогда

$$\Delta G_{kj} = [x_k, x_{k+1}] \times [y_j, y_{j+1}].$$

Обозначим через m_{kj} минимальное значение, которое принимает функция $f(x, y)$ в области G_{kj}, а через M_{kj} – максимальное значение. Через $\Delta S_{kj} = \Delta x_k \Delta y_j$ обозначим площадь прямоугольника $[x_k, x_{k+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$.

Рассмотрим функцию

$$J(x) = \int\limits_c^d f(x,y)dy$$

и построим для нее интегральную сумму:

$$\sigma(\{x_k\}_{k=1}^n, d) = \sum_{k=1}^n J(\xi_k)\Delta x_k, \quad \xi_k \in [x_k, x_{k+1}]. \tag{15.2}$$

По определению

$$J(x) = \lim_{\substack{m\to\infty\\ \tau\to 0}} \sum_{j=1}^m f(x_i, \tau_j)\Delta y_j, \quad \tau_j \in [y_j, y_{j+1}].$$

Здесь τ — диаметр разбиения $\{y_j\}_{j=1}^m$, а d — диаметр разбиения $\{x_k\}_{k=1}^n$.

Подставим $J(x)$ в интегральную сумму (15.2)

$$\sigma(\{x_k\}_{k=1}^n, d) = \lim_{\substack{m\to\infty\\ \tau\to 0}} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m f(\xi, \zeta)\Delta x_k \Delta y_j. \tag{15.3}$$

В области ΔG_{kj} справедливо неравенство $m_{kj} \leq f(\xi_k, \zeta_j) \leq M_{kj}$. Следовательно, можем записать неравенство

Рис. 5

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m m_{kj}\Delta S_{kj} \leq \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m f(\xi_k, \zeta_j)\Delta S_{kj} \leq \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m M_{kj}\Delta S_{kj}. \tag{15.4}$$

Обозначим через s диаметр разбиения $\{\Delta G_{kj}\}$, $k = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$:

$$s = \sqrt{\tau^2 + d^2}.$$

Левая и правая части неравенства (15.4) являются нижней и верхней интегральной суммой Дарбу (14.4) соответственно, которые в пределе при $s \to 0$, $m \to \infty$, $n \to \infty$ равны двойному интегралу

$$\iint\limits_G f(x,y)dx\,dy.$$

Тогда в пределе при $s \to 0$, $m \to \infty$, $n \to \infty$ неравенство (15.4) примет вид

$$\lim_{\substack{s\to 0\\ m\to\infty\\ n\to\infty}} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m m_{kj}\Delta S_{kj} \leq \lim_{\substack{n\to\infty\\ d\to 0}} \sum_{k=1}^n \Delta x_k \lim_{\substack{m\to\infty\\ \tau\to 0}} \sum_{j=1}^m f(\xi_k, \zeta_j)\Delta y_j \leq \lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty\\ s\to 0}} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m M_{kj}\Delta S_{kj}.$$

Заметим, что

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ \tau\to 0}} \sum_{j=1}^m f(\xi_k, \zeta_j)\Delta y_j = g(x).$$

Таким образом, в пределе получим

$$\iint\limits_G f(x,y)dx\,dy \leq \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy \leq \iint\limits_G f(x,y)dx\,dy,$$

т.е. для прямоугольной области эта теорема справедлива.

2 *случай.* Рассмотрим теперь произвольную простую область G. Область G заключим внутрь прямоугольника

$$G^* = [a,b] \times [c,d],$$

стороны которого касаются границы области в точках $ABCD$; отрезок $[a,b]$ является ортогональной проекцией области G на ось Ox, а $[c,d]$ – на ось Oy (см. рис. 6).

Точками A и C граница разбивается на две линии: ABC и ADC, каждая из которых пересекается с любой прямой, параллельной оси Oy в одной точке. Поэтому их уравнения можно записать

$$ABC : y = \varphi_1(x), \quad ADC : y = \varphi_2(x).$$

Аналогично точками B и D граница разбивается на линии, уравнения которых

Рис. 6

$$BAD : x_1 = \psi_1(y), \quad BCD : x_2 = \psi_2(y).$$

В области G^* рассмотрим функцию

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & x,y \in G; \\ 0 & x,y \in G^* \setminus G. \end{cases}$$

Функция $f^*(x,y)$ интегрируема в области G^*:

$$\iint\limits_{G^*} f^*(x,y)dx\,dy = \iint\limits_{G} f(x,y)dx\,dy + \iint\limits_{G^* \setminus G} 0\,dx\,dy.$$

Следовательно, задача сведена к случаю 1. Тогда

$$\iint\limits_{G^*} f^*(x,y)dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f^*(x,y)dy =$$

$$= \int\limits_a^b dx \Bigg\{ \int\limits_c^{\varphi_1(x)} f^*(x,y)dy + \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f^*(x,y)dy + \int\limits_{\varphi_2(x)}^{d} f^*(x,y)dy \Bigg\}.$$

Первый и третий интегралы в фигурных скобках равны нулю, а подынтегральная функция второго интеграла равна $f(x,y)$. Следовательно,

$$\iint\limits_{G^*} f(x,y)dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

Таким образом, теорема доказана.

$\Diamond$ Если область G не является простой, разобьём ее на части, каждая из которых — простая область (см. рис. 7). Тогда для такой области вычисление двойного интеграла сводится к 1-му или 2-му случаям.

Затем вычисляют двойной интеграл для каждой из таких областей. Интеграл же по всей области G в силу свойства аддитивности равен сумме интегралов по каждой из этих частей. Например, для случая, приведённого на рис. 7,

$$\iint\limits_{G} f(x,y)dS = \iint\limits_{(\sigma_1)} f(x,y)dS + \iint\limits_{(\sigma_2)} f(x,y)dS.$$

Рис. 7

♢ Следует иметь в виду, что границы внешнего интеграла всегда постоянны.

♢ Формула (15.1) имеет наглядный геометрический смысл. Действительно, значение двойного интеграла (15.1) есть объём цилиндрического тела, ограниченного снизу областью G, а сверху – поверхностью $z = f(x,y)$. В качестве одного из приложений определенного интеграла к задачам геометрии такая задача уже рассматривалась и была получена формула

$$V = \int\limits_{a}^{b} S(x)dx, \tag{15.5}$$

Рис. 8

где $S(x)$ – площадь поперечного сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси абсцисс, а $x = a$, $x = b$ – уравнения плоскостей, ограничивающих тело. Рассечем рассматриваемое цилиндрическое тело произвольной плоскостью, параллельной плоскости yOz, т.е. плоскостью $x = \mathrm{const}$ $(a \le x \le b)$. В сечении получим криволинейную трапецию $PMNR$, площадь которой выражается интегралом от функции $f(x,y)$, рассматриваемой как функция одной переменной y, причем y изменяется от ординаты точки P до ординаты точки R. Точка P есть точка входа прямой $x = \mathrm{const}$ (в плоскости xOy) в области G, а R – точка выхода из этой области. Из уравнений линий ABC и AEC следует, что ординаты этих точек при каждом x соответственно равны $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$. Следовательно, интеграл

$$\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

дает выражение для площади поперечного сечения $PMNR$. Величина этого сечения зависит от x, т.е. площадь рассматриваемого поперечного сечения является некоторой функцией от x:

$$S(x) = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

По формуле (15.5) объём всего тела равен интегралу от $S(x)$ в интервале $[a,b]$. Подставив $S(x)$, получим (15.1).

Изменив роли x и y, получим для сечения плоскостью $y = \mathrm{const}$

$$\iint\limits_{G} f(x,y)dxdy = \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dx.$$

16. Вычисление двойного интеграла в криволинейных координатах

16.1. Вычисление двойного интеграла в криволинейных координатах

Одним из методов, позволяющих упростить вычисление определенных интегралов, является метод замены переменных. Точно так же введение новых переменных в двойных интегралах очень часто приводит к более простым вычислениям.

Предположим, что нужно вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_G f(x,y)dS$$

от непрерывной функции $z = f(x,y)$ по области G. Как известно, двойной интеграл является пределом интегральной суммы

$$\iint\limits_G f(x,y)dS = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta S_i.$$

Рассмотрим две координатные плоскости xOy и uOv. В каждой из этих плоскостей рассмотрим области E и G. Пусть существует взаимно однозначное соответствие этих областей $x = X(u,v)$, $y = Y(u,v)$. Здесь и в дальнейшем будем предполагать, что функции X и Y непрерывны и дифференцируемы.

Теорема 16.1. *Пусть функция $f(x,y)$ интегрируема в области G. Тогда справедливо следующее соотношение:*

$$\iint\limits_G f(x,y)dx\,dy = \iint\limits_E \tilde{f}(u,v)|J(u,v)|du\,dv, \tag{16.1}$$

где $\tilde{f}(u,v) = f(X(u,v),Y(u,v))$, а через $J(u,v)$ обозначен определитель

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}. \tag{16.2}$$

♦ Функция $J(u,v)$ (16.2) называется якобианом перехода от переменных x,y к переменным u,v (якобиан есть определитель матрицы Якоби).

Доказательство. Зададим разбиение области E прямыми, параллельными осям Ou и Ov. Поскольку отображение областей взаимно однозначно, то через каждую точку области G проходит только одна координатная кривая,определяемая условиями $u = \text{const}$, $v = \text{const}$. В результате разбиение области E прямыми, параллельными координатным осям, задает разбиение области G координатными кривыми.

Рассмотрим интегральную сумму

$$\sigma(\{G_{ij}\},d) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} f(\xi_{ij},\eta_{ij})\Delta G_{ij},$$

где точка $P_{ij}(\xi_{ij}, \eta_{ij})$ – произвольная точка, принадлежащая области ΔG_{ij}. При этом точка P_{ij} отображается в $Q_{ij}(\alpha_{ij}, \beta_{ij})$. Обозначим

$$\tilde{f}(u, v) = f(X(u, v), Y(u, v)),$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} f(\xi_{ij}, \eta_{ij})\Delta G_{ij} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} \tilde{f}(\alpha_{ij}, \beta_{ij})\Delta G_{ij}.$$

Рассмотрим область ΔE_{ij}, ограниченную прямыми $u_i = \text{const}$, $u_{i+1} = \text{const}$, $v_i = \text{const}$, $v_{i+1} = \text{const}$. Образом области ΔE_{ij} будет являться криволинейный четырехугольник $A_0A_1A_2A_3$, где

$$\begin{aligned}
&A_0(x(u_i, v_j), y(u_i, v_j)),\\
&A_1(x(u_i, v_j + \Delta v_j), y(u_i, v_i + \Delta v_i)),\\
&A_2(x(u_i + \Delta u_i, v_j), y(u_i + \Delta u_i, v_j)),\\
&A_3(x(u_i + \Delta u_i, v_j + \Delta v_j), y(u_i + \Delta u_i, v_j + \Delta v_j)).
\end{aligned}$$

Здесь $u_{i+1} = u_i + \Delta u_i$, $v_{j+1} = v_j + \Delta v_j$. Будем полагать, что разбиение области E настолько мелкое, что область ΔG_{ij} можно считать параллелограммом.

Обозначив

$$x(u_i, v_j) = x_{ij}, \quad y(u_i, v_j) = y_{ij},$$

запишем

$$\begin{aligned}
&A_0(x_{ij}, y_{ij}),\\
&A_1\Big(x_{ij} + \frac{\partial x_{ij}}{\partial v}\Delta v_{ij}, y_{ij} + \frac{\partial y_{ij}}{\partial v}\Delta v_{ij}\Big),\\
&A_2\Big(x_{ij} + \frac{\partial x_{ij}}{\partial u}\Delta u_{ij}, y_{ij} + \frac{\partial y_{ij}}{\partial u}\Delta u_{ij}\Big).
\end{aligned}$$

Тогда векторы $\overrightarrow{A_0A_1}$ и $\overrightarrow{A_0A_2}$ имеют координаты

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{A_0A_1} &= \Big(\frac{\partial x_{ij}}{\partial v}\Delta v_{ij}, \frac{\partial y_{ij}}{\partial v}\Delta v_{ij}\Big),\\
\overrightarrow{A_0A_2} &= \Big(\frac{\partial x_{ij}}{\partial u}\Delta u_{ij}, \frac{\partial y_{ij}}{\partial u}\Delta u_{ij}\Big).
\end{aligned}$$

Для площади параллелограмма $A_0A_1A_2A_3$ получим

$$\Delta S_{ij} = |\overrightarrow{A_0A_1} \times \overrightarrow{A_0A_2}| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_{ij}}{\partial u}\Delta u_{ij} & \dfrac{\partial y_{ij}}{\partial u}\Delta u_{ij} \\ \dfrac{\partial x_{ij}}{\partial v}\Delta v_{ij} & \dfrac{\partial y_{ij}}{\partial v}\Delta v_{ij} \end{vmatrix} = \big|\Delta u_i \Delta v_j |J(u_i, v_j)|\big|.$$

Выражение для интегральной суммы перепишем в виде

$$\sigma(\{\Delta G_{ij}\}, \alpha) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} \tilde{f}(\alpha_{ij}, \beta_{ij})|J(u_i, v_j)|\Delta u_i \Delta v_j.$$

Перейдя к пределу при $d \to 0$, $N \to \infty$, $M \to \infty$, получим утверждение теоремы.

Следствие 16.1.1. В полярной системе координат $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, замена переменных в двойном интеграле осуществляется по формуле

$$\iint\limits_G f(x,y)dx\,dy = \iint\limits_E f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\,d\rho\,d\varphi,$$

Доказательство. Действительно

$$J(\rho,\varphi) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial\rho} & \dfrac{\partial y}{\partial\rho} \\ \dfrac{\partial x}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi = \rho.$$

16.2. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах

Рассмотрим наиболее важный для практики случай замены переменных, а именно замену декартовых координат x и y полярными координатами ρ и φ. Формулу вычисления двойного интеграла в полярных координатах можно получить непосредственно из определения двойного интеграла. Отнесем область G к полярной системе координат ρ и φ, полюс которой совпадает с началом координат, а полярной осью служит ось Ox, тогда

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi.$$

Разобьем область интегрирования G на частичные области двумя системами координатных линий: $\rho = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$. Рассмотрим площадку $\Delta\sigma_i$, ограниченную двумя лучами, выходящими из полюса и составляющими между собой угол $\Delta\varphi_i$, и двумя окружностями радиусов ρ_i и $\rho_i + \Delta\rho_i$. Площадь $\Delta\sigma_i$ найдем как разность площадей двух круговых секторов

$$\Delta\sigma_i = \frac{1}{2}(\rho_i + \Delta\rho_i)^2\Delta\varphi_i - \frac{1}{2}\rho_i^2\Delta\varphi_i = \\ = \Big(\rho_i + \frac{\Delta\rho_i}{2}\Big)\Delta\rho_i\Delta\varphi_i$$

или

$$\Delta\sigma_i = \rho_i'\Delta\rho_i\Delta\varphi_i,$$

где $\rho_i' = \rho_i + \Delta\rho_i/2$ – «средний» радиус. Составим для функции $f(x,y)$, непрерывной в области G, интегральную сумму, разбив G на частичные области $\Delta\sigma_i$ и выбрав в качестве точек $N_i(x_i, y_i)$ точки, лежащие на средних окружностях радиуса ρ_i, т.е.

$$x_i = \rho_i\cos\varphi_i, \quad y_i = \rho_i\sin\varphi_i.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^{n} f(\rho_i'\cos\varphi_i, \rho_i'\sin\varphi_i)\rho_i'\Delta\rho_i\Delta\varphi_i.$$

Перейдя к пределу, приходим к следующей формуле для вычисления двойного интеграла в полярных координатах:

$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \iint\limits_G f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\,d\rho d\varphi.$$

Выражение $dS = \rho\, d\rho d\varphi$ называется элементом площади в полярных координатах.

Итак, чтобы преобразовать двойной интеграл к полярным координатам, надо переменные x и y в подынтегральной функции заменить на $\rho\cos\varphi$ и $\rho\sin\varphi$, а элемент площади dS – на $\rho\, d\rho d\varphi$. Рассмотрим частные случаи.

1. Пусть полюс не содержится внутри области G, заключенной между лучами $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$ и двумя кривыми, уравнения которых в полярных координатах $\rho = \rho_1(\varphi)$ и $\rho = \rho_2(\varphi)$. Тогда, проинтегрировав сначала по ρ, а затем по φ, придем к следующей формуле вычисления двойного интеграла:

$$\iint\limits_G f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho d\varphi = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho.$$

♢ Интегрирование в обратном порядке, как правило, не встречается.

2. Пусть полюс содержится внутри области интегрирования и любой полярный радиус пересекает границу в одной точке. Проинтегрировав сначала по ρ, а затем по φ, найдем

$$\iint\limits_G f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho d\varphi = \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho.$$

При $\rho = \rho(\varphi) = R$, т.е. когда область G есть круг радиуса R, то

$$f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho d\varphi = \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{R} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho.$$

Пример 16.1. Вычислить интеграл

$$J = \iint\limits_G (x+y)dS,$$

если область G ограничена осями Ox и Oy (первая четверть) и окружностями $x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = 4$.

Решение. Уравнения окружностей в полярных координатах соответственно

$$\rho^2 = 1 \quad \text{и} \quad \rho^2 = 4.$$

Пределы интегрирования из условий задачи будут

$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, \quad 1 \le \rho \le 2.$$

Тогда

$$J = \iint\limits_G (\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho d\varphi = \int\limits_{0}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{1}^{2} (\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2}(\cos\varphi + \sin\varphi)d\varphi\int\limits_1^2 \rho^2 d\rho = \frac{7}{3}\int\limits_0^{\pi/2}(\cos\varphi + \sin\varphi)d\varphi =$$

$$= \frac{7}{3}(\sin\varphi - \cos\varphi)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{14}{3}.$$

Пример 16.2. Вычислить интеграл Пуассона

$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx.$$

Решение. Проведем тождественные преобразования

$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx\Big)^2} = \sqrt{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}dy} =$$

$$= \sqrt{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}dy} = \sqrt{\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy}.$$

Перейдем в полярную систему координат: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $J = \rho$. Тогда

$$I = \sqrt{\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{\infty} e^{-\rho^2}\rho\,d\rho} = \sqrt{2\pi\Big(-\frac{1}{2}\Big)e^{-\rho^2}\Big|_0^{\infty}} = \sqrt{\pi}.$$

17. Приложения двойного интеграла

Вычисление площадей плоских фигур

Площадь плоской фигуры G, ограниченной линиями $x = a$, $x = b$, $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, может быть вычислена с помощью двойного интеграла, как это следует из первого свойства, по формуле

$$S = \iint\limits_G dS$$

или

$$S = \iint\limits_G dxdy = \int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy = \int\limits_a^b [\varphi_1(x) - \varphi_2(x)]dx.$$

При другом порядке интегрирования:

$$S = \iint\limits_G dxdy = \int\limits_c^d dy\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dx = \int\limits_c^d [\psi_1(x) - \psi_2(x)]dy.$$

Вычисление объёмов

Как известно, объём цилиндрического тела можно вычислить с помощью двойного интеграла по формуле

$$V = \iint\limits_G z\,dS,$$

где $z = f(x, y)$ – уравнение поверхности, ограничивающей цилиндр сверху, G – область основания цилиндра. Предполагается, что функция $f(x, y)$ непрерывна и неотрицательна в замкнутой области G.

Иногда приходится вычислять объёмы тел, ограниченных цилиндром, образующие которого параллельны оси Oz, а снизу и сверху – двумя поверхностями $z_1 = f_1(x, y)$ и $z_2 = f_2(x, y)$. Если функции $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ непрерывны в области G и везде в этой области $f_1(x, y) \le f_2(x, y)$, то объём такого тела вычисляется как разность объёмов двух цилиндрических тел по формуле

$$V = \iint\limits_G (z_1 - z_2)dS.$$

Пример 17.1. Найти объём тела, ограниченного эллиптическим параболоидом $z = 2x^2 + y^2 + 1$, плоскостью $x + y = 1$ и координатными плоскостями ($x = 0$, $y = 0$, $z = 0$).

Решение. В задаче область G определяется как $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1 - x$. Тогда

$$V = \iint\limits_G z\,dxdy = \iint\limits_G [2x^2 + y^2 + 1]dxdy =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (2x^2 + y^2 + 1)dy = \int\limits_0^1 \left\{ \left(2x^2 y + \frac{y^3}{3} + y\right)\Big|_0^{1-x} \right\} dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_0^1 (9x^2 - 7x^3 - 6x + 4)dx = \frac{1}{3}\left(3x^3 - \frac{7}{4}x^4 - 3x^2 + 4x\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3}\left(3 - \frac{7}{4} - 3 + 4\right) = \frac{3}{4} \text{ ед.}^3.$$

Вычисление площади кривой поверхности

Пусть требуется вычислить площадь поверхности S, заданной уравнением $z = f(x, y)$, ограниченной некоторой кривой. Функция $f(x, y)$ непрерывна и имеет частные производные в области G плоскости xOy, в которую проектируется поверхность S.

Разобьем область G произвольным образом на n частей площадью $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$, ..., $\Delta\sigma_n$. В каждой площадке возьмем точку $N_i(x_i, y_i)$. Точнее, N_i будет соответствовать на поверхности точка $M_i(x_i, y_i, f(x_i, y_i))$. Через точку M_i поведем касательную плоскость к поверхности, уравнение которой имеет вид

$$z - z_i = f'_x(x_i, y_i)(x - x_i) + f'_y(x_i, y_i)(y - y_i).$$

На этой плоскости выделим такую область ΔS_i, которая на плоскость xOy проектируется в область $\Delta\sigma_i$. Рассмотрим сумму всех областей ΔS_i:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta S_i.$$

Предел этой суммы, когда наибольший из диаметров площадок $\Delta d_i \to 0$, мы будем называть площадью поверхности

$$S = \lim_{d\to 0} \Delta S_i.$$

Вычислим эту площадь.

Обозначим через γ_i угол между касательной плоскостью и плоскостью xOy. На основании известной из аналитической геометрии формулы имеем $\Delta\sigma_i = \Delta S_i \cos\gamma_i$, откуда

$$\Delta S_i = \frac{\Delta\sigma_i}{\cos\gamma_i}.$$

Но в то же время угол γ_i есть угол между осью Oz и перпендикуляром к касательной плоскости, т.е. нормалью, а, как известно,

$$\cos\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2_x(x_i, y_i) + f'^2_y(x_i, y_i)}}.$$

Следовательно,

$$\Delta S_i = \sqrt{1 + f'^2_x(x_i, y_i) + f'^2_y(x_i, y_i)}\Delta\sigma_i.$$

Тогда

$$S = \lim_{\substack{d\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2_x(x_i, y_i) + f'^2_y(x_i, y_i)}\Delta\sigma_i.$$

В пределе правая часть переходит в двойной интеграл для функции

$$\sqrt{1 + f'^2_x(x_i, y_i) + f'^2_y(x_i, y_i)}.$$

Следовательно, площадь поверхности S, проектирующейся в область G плоскости xOy, вычисляется по формуле

$$S = \iint\limits_G \sqrt{1 + f'^2_x(x, y) + f'^2_y(x, y)}dS \tag{17.1}$$

или

$$S = \iint\limits_G \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy,$$

где $z = f(x, y)$ — уравнение поверхности (S).

$\Diamond$ Если поверхность (S) задана, соответственно, уравнениями

$$x = \varphi(y, z) \quad \text{или} \quad y = \psi(x, z),$$

то площадь кривой поверхности вычисляется по формулам

$$S = \iint\limits_{(\sigma_1)} \sqrt{1 + \Big(\frac{\partial x}{\partial y}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial x}{\partial z}\Big)^2}\, dydz$$

где (σ_1) – область в плоскости yOz, или

$$S = \iint\limits_{(\sigma_2)} \sqrt{1 + \Big(\frac{\partial y}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial y}{\partial z}\Big)^2}\, dxdz,$$

где (σ_2) – область в плоскости xOz, на которые проектируется поверхность (S).

$\Diamond$ Если поверхность Σ??? задана в параметрической форме, т.е. $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, $(u, v) \in \Delta$???, то аналогично формуле 17.1 получим

$$S = \iint\limits_{\Delta} \sqrt{\Big(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\Big)^2}\, du\, dv, \tag{17.2}$$

где $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ — якобиан перехода (16.2) от переменных (x, y) к переменным (u, v) и т.д.???

Пример 17.2. Вычислить площадь куска поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = ax$, находящегося внутри шара $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Решение. Рассматриваемый кусок состоит из четырех одинаковых частей (см. рис. 9). Один из них обозначим через S_1. Тогда $S = 4S_1$. Всякая прямая, параллельная оси Oy, пересекает (S_1) не более чем в одной точке, тогда

$$S_1 = \iint\limits_{G} \sqrt{1 + \Big(\frac{\partial y}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial y}{\partial z}\Big)^2}\, dS.$$

Рис. 9

Область G на плоскости xOz ограничена осями Ox, Oz и проекцией линии пересечения цилиндра с шаром на плоскости xOz. Исключив y из уравнений поверхности и шара, получим $z^2 = a^2 - ax$. Это и есть уравнение проекции на плоскость xOz. Таким образом, область G определяется

$$0 \le x \le a, \quad 0 \le z \le \sqrt{a^2 - ax}.$$

Из уравнения цилиндра $y = \sqrt{ax - x^2}$ найдем

$$y'_z = \frac{\partial y}{\partial z} = 0, \quad y'_x = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a - 2x}{2\sqrt{ax - x^2}}.$$

Итак,

$$S_1 = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2 - ax}} \frac{a}{2} \frac{dz}{\sqrt{ax - x^2}} = \frac{a}{2} \int\limits_0^a \frac{\sqrt{a^2 - ax}}{\sqrt{ax - x^2}} dx = \frac{a\sqrt{a}}{2} \int\limits_0^a \frac{dx}{\sqrt{x}} = a^2 \ (\text{ед}^2).$$

Тогда вся площадь $S = 4S_1 = 4a^2$ (ед^2).

18. Тройной интеграл

18.1. Задачи, приводящие к понятию тройного интеграла

Рассмотрим одну из задач, приводящих к понятию тройного интеграла – задачу о массе неоднородного тела.

Пусть в пространстве $Oxyz$ дано некоторое материальное тело объёмом V. Предположим, что плотность массы этого тела является непрерывной функцией координат точек

$$\mu = \mu(x, y, z),$$

т.е. тело однородно. Вычислим массу M тела объёма V. Разобьем тело произвольным образом на n частей. Объёмы этих частей обозначим ΔV_i. Выберем в каждой части по произвольной точке $N_i(x_i, y_i, z_i)$. Полагая, что в каждой частичной области плотность постоянна и равна ее значению в точке N_i, получим приближенное выражение для массы всего тела в виде

$$M = \sum_{(V)} \mu(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i.$$

За точное значение массы принимаем предел этой суммы при условии, что $n \to \infty$ и каждое частичное тело стягивается в точку:

$$M = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i.$$

Решение задачи о массе тела привело нас к рассмотрению предела сумм определенного вида. Так как к нахождению предела сумм такого вида сводятся многие задачи геометрии, физики и т.д., то естественно изучить свойства пределов таких сумм той или иной задачи, что приведет нас к понятию тройного интеграла.

18.2. Определение тройного интеграла. Теорема существования

Пусть в пространстве задана область (V). Пусть в каждой точке этой области определена функция точки $f(x, y, z)$.

Разобьем тело V на n малых частей. В каждом из малых тел ΔV_i выберем произвольную точку $N_i(x_i, y_i, z_i)$. Составим сумму произведений значений функции $f(x, y, z)$ в этих точках на соответствующий объём ΔV_i малого тела:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i.$$

Эта сумма называется интегральной суммой.

Рассмотрим предел интегральной суммы при неограниченном увеличении числа n малых тел ΔV_i и при стягивании каждого из них в точку. Если этот предел существует и не зависит ни от способа разбиения области (V) на части ΔV_i, ни от выбора в каждом из них точек N_i, то его называют тройным интегралом от функции $f(x, y, z)$ по области (V) и обозначают

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)dV \quad \text{или} \quad \iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dxdydz.$$

Возвращаясь к предыдущему разделу, заключаем, что масса M тела V равна тройному интегралу от переменной плотности $\mu = \mu(x, y, z)$, т.е.

$$M = \iiint\limits_{(V)} \mu(x, y, z)\, dV.$$

Понятие двойного интеграла можно обобщить на случай трех и более переменных.

Рассмотрим некоторую область G. Обозначим через $\partial G = S_G$ границу этой области, через T – многогранник, который включает в себя область G: $T \supset G$, а через t – многогранник, содержащийся в области G: $t \in G$. Объём многогранников V_T и V_t можно вычислить с помощью методов аналитической геометрии.

♦ Если для любого $\varepsilon > 0$ существуют многогранники T и t такие, что $|V_T - V_t| < \varepsilon$, то множество G называется кубируемым.

♦ Трехмерная область G называется простой, если любая прямая, параллельная оси Oz, пересекает область G не более чем в двух точках, а проекция области G на плоскость xOy является простым множеством.

Если множество G кубируемо, то ему можно сопоставить некоторую меру – объём. Очевидно, что $\operatorname{mes} G > 0$ и $V_t \leq \operatorname{mes} G \leq V_T$. Если области G_1 и G_2 не имеют общих внутренних точек, то

$$\operatorname{mes} G_1 \cup \operatorname{mes} G_2 = \operatorname{mes} G_1 + \operatorname{mes} G_2.$$

Пусть $\{\Delta G_i\}_{i=1}^N$ – разбиение области G и пусть $f(\vec{x}) = f(x, y, z)$. Обозначим через d диаметр разбиения области G. Пусть $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ – произвольная точка области ΔG_i. Запишем интегральную сумму

$$\sigma(\{\Delta G_i\}_{i=1}^N, d) = \sum_{i=1}^N f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i, \tag{18.1}$$

где ΔV_i — объём области G_i.

♦ Величина (18.1) называется интегральной суммой функции $f(x, y, z)$ в области G.

♦ Если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $d < \varepsilon$ справедливо неравенство

$$|\sigma(\{\Delta G_i\}, d) - I| < \delta,$$

то число I называется тройным интегралом функции $f(x, y, z)$ в области G и обозначается так:

$$I = \iiint f(x, y, z)dx\, dy\, dz = \lim_{\substack{d\to 0\\ N\to\infty}} \sigma(\{\Delta G_i\}_{i=1}^N, d). \tag{18.2}$$

Обозначим через m_i наименьшее, а через M_i наибольшее значения функции $f(x, y, z)$ в области ΔG_i.

♦ Величины

$$S^*(\{\Delta G_i\}_{i=1}^N, d) = \sum_{i=1}^N M_i \Delta G_i,$$

$$S_*(\{\Delta G_i\}_{i=1}^N, d) = \sum_{i=1}^N m_i \Delta G_i$$

называются верхней и нижней интегральной суммой Дарбу соответственно.

Справедливы следующие соотношения:

$$S^*(\{\Delta G_i\}_{i=1}^N, d) = \sup \sigma(\{\Delta G_i\}_{i=1}^N, d),$$

т.е. верхняя интегральная сумма Дарбу является точной верхней гранью;

$$S_*(\{\Delta G_i\}_{i=1}^N, d) = \inf \sigma(\{\Delta G_i\}_{i=1}^N, d),$$

т.е. нижняя интегральная сумма Дарбу является точной нижней гранью.

♦ Функция $f(x, y, z)$, для которой существует тройной интеграл в области G, называется интегрируемой (интегрируемой по Риману) в области G.

Имеет место теорема существования тройного интеграла, которую приведем без доказательства.

Теорема 18.1 (теорема существования). *Для всякой функции $f(x, y, z)$, непрерывной в ограниченной замкнутой области, имеющей объём V, существует тройной интеграл.*

Установить геометрический смысл тройного интеграла, не выходя за пределы трехмерного пространства, не представляется возможным.

Итак, по определению тройного интеграла,

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dV = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i.$$

18.3. Свойства тройного интеграла. Теорема о среднем

Тройной интеграл обладает теми же свойствами, что и двойной:

1) если функция $f(x, y, z) = 1$, то

$$\iiint\limits_{(V)} dV = V,$$

где V – объём области интегрирования;

2) тройной интеграл не зависит от обозначения переменных интегрирования

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{(V)} f(s, t, n)dsdtdn;$$

3) постоянный множитель можно выносить за знак тройного интеграла:

$$\iiint\limits_{(V)} kf(x, y, z)\, dxdydz = k \iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)dxdydz;$$

4) тройной интеграл от суммы нескольких функций равен сумме тройных интегралов от слагаемых:

$$\iiint\limits_{(V)} [f_1(x, y, z) + f_2(x, y, z)]dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{(V)} f_1(x, y, z)dxdydz + \iiint\limits_{(V)} f_2(x, y, z)dxdydz;$$

5) если область (V) разбита на части (V_1) и (V_2), не имеющие общих внутренних точек, то

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz =$$

$$\iiint\limits_{(V_1)} f(x,y,z)dxdydz + \iiint\limits_{(V_2)} f(x,y,z)dxdydz;$$

6) если $f(x,y,z) \geq 0$ в области (V), то

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz \geq 0;$$

7) если $f_1(x,y,z) < f_2(x,y,z)$ в области (V), то

$$\iiint\limits_{(V)} f_1(x,y,z)dxdydz \leq \iiint\limits_{(V)} f_2(x,y,z)dxdydz;$$

8) Справедлива следующая оценка

$$\left|\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz\right| \leq \iiint\limits_{(V)} |f(x,y,z)|dxdydz.$$

Теорема 18.2 (теорема о среднем). *Если функция $f(x,y,z)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области G, то в этой области существует такая точка $P(\xi,\eta,\zeta)$, что*

$$\iiint\limits_{G} f(x,y,z)dxdydz = f(\xi,\eta,\zeta)V,$$

где V – объём области интегрирования.

19. Вычисление тройного интеграла

19.1. Вычисление тройного интеграла в прямоугольных координатах

Вычисление тройного интеграла сводится к последовательному вычислению трех определенных интегралов.

Пусть область (V) ограничена снизу и сверху соответственно поверхностями $z = h(x,y)$ и $z = H(x,y)$, где $h(x,y)$ и $H(x,y)$ – непрерывные функции в замкнутой области G плоскости xOy, и цилиндрической поверхностью, у которой образующие параллельны оси Oz, а направляющей является граница области G.

Тогда для любой функции $f(x,y,z)$, непрерывной в замкнутой области (V), имеет место формула

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{G} \left[\int\limits_{h(x,y)}^{H(x,y)} f(x,y,z)dz\right]dxdy.$$

Эта формула позволяет свести вычисление тройного интеграла к вычислению двойного интеграла от определенного. Обычно интеграл справа записывается

$$\iint\limits_{G} dxdy \int\limits_{h(x,y)}^{H(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

Здесь область G есть проекция тела (V) на плоскость xOy.

При вычислении тройного интеграла по этой формуле сначала вычисляется внутренний интеграл по z при постоянных x и y. Результат вычисления есть функция двух переменных x и y. Затем, проинтегрировав полученную функцию по области G, являющейся проекцией области (V) на плоскость xOy, получим значение тройного интеграла. Если при этом область G в плоскости xOy ограничена линиями $x = a$, $x = b$, $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, то, перейдя от двойного интеграла к повторному, получим

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{h(x,y)}^{H(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

Если область (V) – параллелепипед с гранями $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$, $z = l$, $z = k$, то

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{l}^{k} f(x,y,z)dxdydz.$$

Если область имеет более сложную форму, чем рассмотренные ранее, то ее разбивают на конечное количество областей $V_1, V_2, \ldots, V_n$, и в силу свойства аддитивности тройной интеграл равен сумме интегралов по каждой из областей.

Пример 19.1. Вычислить тройной интеграл

$$\iiint\limits_{(V)} x\, dxdydz$$

по области (V), ограниченной координатными плоскостями и плоскостью $x + y + z = 2$.

Решение. Площадка G, в которую проектируется область (V), есть треугольник в плоскости xOy, ограниченный линиями $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$. Так как тело ограничено снизу плоскостью $z = 1$, а сверху – плоскостью $x + y + z = 2$, то на основании формулы для вычисления тройного интеграла имеем

$$\iiint\limits_{(V)} x\, dxdydz = \iint\limits_{G} dy \int\limits_{1}^{2-x-y} x\, dz = \int\limits_{0}^{1} x\, dx \int\limits_{0}^{1-x} dy \int\limits_{1}^{2-x-y} dz =$$

$$= \int_0^1 x\,dz \int_0^{1-x} (1-x-y)dy = \int_0^1 x\Big[(1-x)^2 - \frac{(1-x)^2}{2}\Big]dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x-2x^2+x^3)dx = \frac{1}{2}\Big[\frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^4}{4}\Big]\Big|_0^1 = \frac{1}{24}.$$

19.2. Замена переменных в тройном интеграле

Рассмотрим области G и E в пространствах (xyz) и (uvw) соответственно.

Теорема 19.1. *Пусть существует взаимно однозначное соответствие области E в область G, задаваемое уравнениями*

$$\begin{aligned} x &= x(u,v,w),\\ y &= y(u,v,w),\\ z &= z(u,v,w). \end{aligned}$$

Тогда для любой функции $f(x,y,z)$, непрерывной в области G, справедливо

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dx\,dy\,dz = \iiint\limits_E f(u,v,w)|J(u,v,w)|du\,dv\,dw, \tag{19.1}$$

где

$$J(u,v,w) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial w} & \dfrac{\partial y}{\partial w} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

является якобианом перехода:

$$\tilde f(u,v,w) = f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)).$$

♢ Здесь и в дальнейшем предполагается, что функции $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$, $z = z(u,v,w)$ непрерывны и дифференцируемы по всем своим переменным.

Следствие 19.1.1. Формулы замены переменных при переходе в цилиндрическую и сферическую системы координат

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z;$$
$$x = \rho\cos\varphi\sin\theta, \quad y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \quad z = \rho\cos\theta$$

примут вид соответственно

$$\begin{aligned} \iiint\limits_G f(x,y,z)dx\,dy\,dz &= \iiint \tilde f(\rho,\varphi,z)\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz,\\ \iiint\limits_G f(x,y,z)dx\,dy\,dz &= \iiint \tilde f(\rho,\varphi,z)\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,dz. \end{aligned} \tag{19.2}$$

19.3. Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах

Положение точки $M(x, y, z)$ можно определить не только ее прямоугольными координатами, но и другими числами. Спроектируем M на плоскость xOy, и пусть ее проекция – точка N – имеет полярные координаты ρ и φ. Совокупность полярных координат точки N и прямоугольной аппликаты самой точки M определяет положение точки M в пространстве. Тройка чисел ρ, φ, z называется цилиндрическими координатами точки M.

Каждой тройке чисел ρ, φ, z, где

$$0 \le \varphi \le 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty, \quad 0 \le \rho \le \infty,$$

соответствует единственная точка в пространстве. Между цилиндрическими координатами ρ, φ, z точки M и ее прямоугольными координатами x, y, z существует соотношение

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi; \\ y = \rho\sin\varphi; \\ z = z. \end{cases} \tag{19.3}$$

Если задано какое-нибудь уравнение поверхности в прямоугольных координатах $z = f(x, y)$, то, подставив сюда (19.3), получим

$$z = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi),$$

т.е. $z = g(\rho, \varphi)$ есть уравнение поверхности в цилиндрических координатах:

$$\begin{cases} \rho = \rho_0, \\ \varphi = \varphi_0, \\ z = z_0. \end{cases} \tag{19.4}$$

Первое уравнение $\rho = \rho_0$ есть уравнение прямого кругового цилиндра с радиусом ρ_0, ось которого совпадает с осью Oz. Второе уравнение $\varphi = \varphi_0$ есть уравнение полуплоскости, ограниченной осью Oz и составляющей с плоскостью xOz угол φ_0. Третье уравнение $z = z_0$ есть уравнение плоскости, перпендикулярной оси Oz (см. рис. 10).

Рис. 10

Перейдем теперь к вычислению тройного интеграла в цилиндрических координатах, поскольку в некоторых случаях вычисление в этих координатах проще, нежели в прямоугольных координатах.

Разобьем пространственную область (V) на элементарные объёмы координатными плоскостями $\varphi = \varphi_i$, $\rho = \rho_n$, $z = z_k$ (полуплоскости, круговые цилиндры, плоскости, перпендикулярные оси Oz). Элементарным объёмом ΔV будет криволинейная «призма», площадь основания которой равна $\rho\Delta\rho\Delta\varphi$ (как было показано ранее), высота равна Δz. Следовательно,

$$\Delta V = \rho\Delta\rho\Delta\varphi\Delta z.$$

Поэтому тройной интеграл от функции $F(\rho, \varphi, z)$ по области (V) будет иметь вид

$$\iiint\limits_{(V)} F(\rho, \varphi, z)\rho\, d\rho d\varphi dz.$$

Тогда тройной интеграл от непрерывной функции $f(x,y,z)$ по области (V) с учетом того, что
$$dV = \rho\, d\rho d\varphi dz,$$
и формулы (19.3) можно записать
$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dV = \iiint\limits_{(V)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho d\varphi dz.$$

Границы интегрирования определяются формой области (V).

Если область (V) задана как
$$\alpha \le \varphi \le \beta, \quad \psi_1(\varphi) \le \rho \le \psi_2(\varphi), \quad g_1(\rho,\varphi) \le z \le g_2(\rho,\varphi),$$
то
$$\iiint\limits_{(V)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho\, d\rho d\varphi dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\psi_1(\varphi)}^{\psi_2(\varphi)} \rho\, d\rho \int\limits_{g_1(\rho,\varphi)}^{g_2(\rho,\varphi)} f\, dz.$$

Пример 19.2. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2 = z$, $z = 1$ в цилиндрических координатах.

Решение. В цилиндрических координатах уравнения поверхностей запишутся как $\rho^2 = z$ и $z = 1$. Область (V) будет определена так:
$$0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \rho \le 1, \quad \rho^2 \le z \le 1.$$
Тогда
$$V = \iiint\limits_{(V)} dxdydz = \iiint\limits_{(V)} \rho\, d\rho d\varphi dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho\, d\rho \int\limits_{\rho^1}^1 dz = \frac{\pi}{2}.$$

20. Приложения тройного интеграла

Как было указано ранее, к понятию тройного интеграла приводит ряд физических задач, одна из которых была рассмотрена в предыдущем разделе. К тройным интегралам приводят, например, задачи, связанные с пространственным распределением массы. Рассмотрим некоторые из этих задач, а также приведем здесь задачи отыскания объёма и массы цилиндрического тела.

Объём цилиндрического тела

Если функция $f(x,y,z) = 1$ в области (V), то объём тела V вычисляется по формуле
$$V = \iiint\limits_{(V)} dxdydz.$$

Пример 20.1. Найти объём эллипсоида
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Решение. Перейдем в обобщенную сферическую систему координат:

$$x = ar\cos\varphi\sin\theta, \quad y = br\sin\varphi\sin\theta, \quad z = cr\cos\theta,$$

т.е. $r^2 = 1$, $r = 1$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi < 2\pi$. Вычислим якобиан перехода:

$$J = abcr^2\sin\theta.$$

Следовательно,

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\lambda \int_0^1 abcr^2\sin\theta\, dr = 2\pi abc\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta \int_0^1 r^2 dr =$$

$$= 2\pi abc\cos\theta\Big|_{\pi}^{0} \cdot \frac{r^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Масса тела

Пусть в пространстве задано тело (V), плотность которого в любой точке есть функция координат этой точки: $\mu = \mu(x, y, z)$. Тогда, как было показано ранее, масса этого тела вычисляется по формуле

$$M = \iiint\limits_{(V)} \mu(x, y, z)\, dxdydz.$$

Статические моменты

Как известно, статическим моментом S_{xy} материальной точки массы m относительно плоскости xOy называется произведение массы точки на ее аппликату

$$S_{xy} = mz.$$

Аналогично определяются статические моменты S_{yz} и S_{xz} соответственно относительно плоскостей yOz и xOz:

$$S_{yz} = mx, \quad S_{xz} = my.$$

Если дана система, состоящая из нескольких материальных точек, то ее статический момент определяется как сумма соответствующих статических моментов материальных точек, составляющих эту систему.

Пусть теперь в пространстве задано тело (V), плотность которого в любой точке есть функция координат этой точки: $\mu = \mu(x, y, z)$. Вычислим статический момент S_{xy} этого тела. Разобьем тело (V) на n малых тел ΔV_i. В каждом из них выберем произвольно по точке $N_i(x_i, y_i, z_i)$. Считая приближенно плотность в каждой точке малого тела постоянной и равной плотности в выбранной точке N_i, получим приближенное выражение для массы Δm_i этого малого тела

$$\Delta m_i \approx \mu(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i.$$

Заменим каждое малое тело ΔV_i материальной точкой $N_i(x_i, y_i, z_i)$ с массой Δm_i. Статический момент этой точки относительно координатной плоскости xOy дает приближенно

$$z_i\Delta m_i \approx z_i\mu(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i.$$

Тогда статический момент всего тела будет

$$S_{xy} \approx \sum_{i=1}^{n} z_i \mu(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i.$$

В пределе при условии, что малые тела ΔV_i стягиваются в точки, получим точное значение статического момента

$$S_{xy} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} z_i \mu(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i = \iiint\limits_{(V)} z\mu(x, y, z)dV.$$

Итак,

$$S_{xy} = \iiint\limits_{(V)} z\mu(x, y, z)dV.$$

Аналогично для статических моментов тела (V) относительно плоскостей yOz и xOz получим

$$S_{yz} = \iiint\limits_{(V)} x\mu(x, y, z)dV, \quad S_{xz} = \iiint\limits_{(V)} y\mu(x, y, z)dV.$$

Центр тяжести

Координаты $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ центра тяжести, как известно из механики, определяются равенствами

$$\bar{x} = \frac{S_{yz}}{M}, \quad \bar{y} = \frac{S_{xz}}{M}, \quad \bar{z} = \frac{S_{xy}}{M},$$

где M – масса тела (V).

Так как масса M тела определяется по формуле

$$M = \iiint\limits_{(V)} \mu(x, y, z)dV,$$

то, применив формулы для статических моментов, получим

$$\bar{x} = \iiint\limits_{(V)} x\mu(x, y, z)dV \Bigg/ \iiint\limits_{(V)} \mu(x, y, z)dV,$$

$$\bar{y} = \iiint\limits_{(V)} y\mu(x, y, z)dV \Bigg/ \iiint\limits_{(V)} \mu(x, y, z)dV,$$

$$\bar{z} = \iiint\limits_{(V)} z\mu(x, y, z)dV \Bigg/ \iiint\limits_{(V)} \mu(x, y, z)dV.$$

Для однородного тела $\mu = \text{const}$, поэтому формулы для координат центра тяжести примут вид

$$\bar{x} = \frac{1}{V} \iiint\limits_{(V)} x\,dV, \quad \bar{y} = \frac{1}{V} \iiint\limits_{(V)} y\,dV, \quad \bar{z} = \frac{1}{V} \iiint\limits_{(V)} z\,dV.$$

21. Несобственные кратные интегралы

21.1. Интеграл по бесконечной области

Пусть дана функция

$$f(\vec{x}), \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{21.1}$$

определенная и непрерывная внутри некоторой ограниченной или неограниченной области D (бесконечно удаленная точка причисляется к границе области).

♦ Последовательность ограниченных областей D_k ($k = \overline{1, \infty}$) называют исчерпывающей область D, если все эти области содержатся в D и любая замкнутая частичная область, лежащая внутри D, при достаточно больших k лежит также внутри D_k. Если при этом D_{k+1} содержит в себе D_k для любых k, то последовательность называют монотонной.

Например, последовательность кругов с радиусами $R_k = k$, является монотонной и исчерпывает плоскость $\mathbb{R}^2$.

Пусть для функции (21.1) и некоторой монотонной последовательности интеграл

$$\int\limits_{D_k} f(\vec{x}) d\vec{x} \tag{21.2}$$

существует.

Предел интеграла (21.2) при $k \to \infty$ называют несобственным интегралом функции $f(\vec{x})$ по бесконечной области D и обозначают

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{D_k} f(\vec{x}) d\vec{x} = \int\limits_{D} f(\vec{x}) d\vec{x}. \tag{21.3}$$

Если предел (21.3) существует, конечен и не зависит от выбора последовательностей областей D_k, то несобственный интеграл называют сходящимся, в противном случае — расходящимся.

Определение (21.3) несобственного интеграла по бесконечной области является обобщением соответствующего определения для одномерного несобственного интеграла. Аналогично ему вводится понятие абсолютной сходимости, критерий абсолютной сходимости и др. Кроме того, из определения (21.3) следует связь между кратными несобственными интегралами и повторными интегралами с бесконечными пределами, которую задает

Теорема 21.1. *Пусть $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, а D совпадает с $\mathbb{R}^n$ и интеграл* (21.3) *сходится. Тогда*

$$\int\limits_{D} f(\vec{x}) d\vec{x} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dots \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\vec{x}) d\vec{x}. \tag{21.4}$$

Доказательство. Поскольку интеграл (21.3) сходится, то предел (21.3) существует, конечен и не зависит от последовательности D_k, которую можно выбрать в виде n-мерных кубов (квадратов) с центром в начале координат и сторонами, параллельными координатным осям и равными $2, 4, \dots, 2k, \dots$ Отсюда и следует (21.4).

Пример 21.1. Вычислить интегралы

$$\text{а)} \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx\, dy, \qquad \text{б)} \quad \int\limits_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Решение. а) Согласно формулам (21.3), (21.4), запишем

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}dx\,dy = \lim_{k\to\infty}\iint\limits_{D_k} e^{-x^2-y^2}dx\,dy, \qquad (21.5)$$

а в качестве последовательностей D_k выберем круги с центром в начале координат и радиусами $r_k = k$. Тогда

$$I = \lim_{k\to\infty}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^k e^{-r^2}r\,dr = \pi\lim_{k\to\infty}(1-e^{-k^2}) = \pi.$$

С другой стороны,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}dx\,dy = \Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\Big)\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy\Big) = \Big(2\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}dx\Big)^2 = \pi,$$

откуда и следует случай

б)
$$\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Пример 21.2. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin(x^2+y^2)dx\,dy$$

или установить его расходимость.

Решение. Вычислим предварительно интеграл

$$I_k = \int\limits_{D_k}\sin(x^2+y^2)dx\,dy,$$

где область D_k представляет собой круг с центром в начале координат и радиусом r_k. Тогда

$$I_k = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{r_k}\sin(r^2)\,rdr = \pi[1-\cos(r_k^2)].$$

Перейдя к пределу $k\to\infty$, найдем

$$\lim_{k\to\infty} I_k = \begin{cases}\pi\lim\limits_{k\to\infty}(1-\cos 2\pi k) = 0, & r_k^2 = 2\pi k;\\ \pi\lim\limits_{k\to\infty}\Big[1-\cos\Big(2\pi k+\dfrac{\pi}{2}\Big)\Big] = \pi, & r_k^2 = 2\pi k+\dfrac{\pi}{2}.\end{cases} \qquad (21.6)$$

Из (21.6) следует, что существуют две различные монотонные последовательности кругов, исчерпывающие плоскость xOy и дающие два различных значения интеграла (21.6) и, следовательно, существуют две последовательности квадратов с центром в начале координат и сторонами, параллельными координатным осям. Отсюда следует, что двойной и повторный интегралы расходятся.

21.2. Интегралы от неограниченных функций

Рассмотрим подынтегральную функцию (21.1) с одним дополнительным условием: функция обращается в бесконечность в единственной точке $M(\vec{x}_0)$ конечной области интегрирования D или не определена в этой точке.

Несобственный интеграл

$$\int\limits_D f(\vec{x})d\vec{x} \tag{21.7}$$

в этом случае определяется формулами (21.2), (21.3) с той лишь разницей, что последовательность замкнутых областей D_k, исчерпывающих область D, определяется как $D_k = D - U_k$, где U_k — некоторые окрестности точки M, которые можно выбрать различными способами, например как шары (круги) с центром в точке M и радиусами $r_k = 1/k$, $k = \overline{1,\infty}$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 21.3. Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_D \ln\sqrt{x^2+y^2}dx\,dy,$$

где D: $x^2 + y^2 \le 1$.

Решение. Пусть U_k — произвольная окрестность точки $M(0,0)$, в которой подынтегральная функция обращается в бесконечность. Любая окрестность U_k, диаметр которой меньше r_k, наверняка лежит внутри круга такого же радиуса с центром в начале координат U_{r_k}. Рассмотрим область $D_k = D - U_{r_k}$, где перейдем к полярным координатам. В полученном кольце $r_k \le r \le 1$, $0 \le \varphi < 2\pi$, исходный интеграл можно записать

$$I = \lim_{k\to\infty}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{r_k}^{1}(\ln r)r\,dr = \lim_{k\to\infty}\pi r^2\Big(\ln r - \frac{1}{r}\Big)\Big|_{r_k}^{1} =$$
$$= \pi\Big[-\frac{1}{2} - \lim_{k\to\infty} r_k^2\Big(\ln r_k - \frac{1}{r_k}\Big)\Big]. \tag{21.8}$$

Если радиусы кругов U_{r_k} выбрать равными $r_k = 1/k$, тогда последовательность $D_k = D - U_{r_k}$ и тем более $D_k = D - U_k$ исчерпывают область D, а предел (21.8) дает

$$I = -\frac{\pi}{2}.$$

Сходимость исходного интеграла можно также установить, если вместо (21.8) записать сразу интеграл

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{1}(\ln r)r\,dr,$$

который в силу соотношения

$$\lim_{r\to 0} r\ln r = 0$$

становится обыкновенным (собственным), так как функция $r\ln r$ становится непрерывной и ограниченной на отрезке $[0,1]$, если в точке $r=0$ приписать ей значение, равное нулю.

Пример 21.4. Исследовать на сходимость интеграл

$$I_1 = \int\limits_D \frac{d\vec{x}}{|\vec{x}|^\alpha}, \qquad \vec{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{21.9}$$

Решение. Рассмотрим круг радиуса R. Произвольная область D, расположенная внутри круга, представляет собой несобственный интеграл от неограниченной в начале координат функции

$$\frac{1}{|\vec{x}|^\alpha} = \frac{1}{(\sqrt{x^2 + y^2})^\alpha},$$

тогда как неограниченная область, лежащая вне этого круга, представляет собой несобственный интеграл по неограниченной области. При переходе от декартовой системы координат к полярной имеем

а) D: $x^2 + y^2 \le R^2$;

$$\int\limits_D \frac{d\vec{x}}{|\vec{x}|^\alpha} = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^R \frac{1}{r^\alpha}\frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} dr\, d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \frac{1}{r^\alpha} r\, dr = 2\pi \int\limits_0^R \frac{dr}{r^{\alpha-1}}. \tag{21.10}$$

Интеграл (21.10), как указывалось ранее, сходится, если $\alpha - 1 < 1$ или $\alpha < 2$, и расходится, если $\alpha - 1 \ge 1$, т.е. при $\alpha \ge 2$.

б) D: $x^2 + y^2 \ge R^2$;

$$\int\limits_D \frac{d\vec{x}}{|\vec{x}|^\alpha} = 2\pi \int\limits_R^\infty \frac{dr}{r^{\alpha-1}}. \tag{21.11}$$

Интеграл (21.11) расходится, если $\alpha \le 2$, и сходится при $\alpha > 2$.

Несложно установить, что для произвольного $\mathbb{R}^n$ интеграл I_1 (21.9) внутри ограниченной области D сходится при $\alpha < n$ и расходится при $\alpha \ge n$, а вне этой области сходится при $\alpha > n$ и расходится при $\alpha \le n$.

$\Diamond$ Понятие несобственного кратного интеграла, обращающегося в бесконечность в некоторой точке, можно обобщить на случай, когда подынтегральная функция обращается в бесконечность (либо не определена) вдоль некоторой кривой γ, целиком лежащей в области D. В этом случае в последовательности $D_k = D - U_k$, исчерпывающей область D, под U_k подразумевается произвольная окрестность не точки, а соответствующей кривой γ.

22. Криволинейные интегралы

22.1. Криволинейные интегралы первого рода

Пусть в пространстве (или на плоскости) имеется дуга $\breve{AB}$ некоторой кривой L. Пусть на этой дуге определена некоторая ограниченная функция точки $f(M)$. Разобьем дугу $\breve{AB}$ на n произвольных частичных дуг Δl_i $(i = \overline{1, n})$. На каждой частичной дуге выберем по одной точке M_i^* и составим сумму произведений значений данной функции $f(M)$ в точках M_i^* на длины Δl_i соответствующих частичных дуг

$$\sum_{i=1}^n f(M_i^*)\Delta l_i,$$

которую назовем интегральной суммой.

Если существует конечный предел этой интегральной суммы при стремлении к нулю длин всех частичных дуг Δl_i и если этот предел не зависит ни от способа разбиения дуги $\breve{AB}$ на части, ни от выбора точек M_i^* в них, то этот предел называется криволинейным интегралом первого рода от функции точки $f(M)$ по дуге $\breve{AB}$ кривой L и обозначается

$$\int\limits_{\breve{AB}} f(M)\,dl \quad \text{или} \quad \int\limits_{\breve{AB}} f(x,y,z)dl.$$

Итак, по определению,

$$\int\limits_{\breve{AB}} f(M)dl = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(M_i^*)\Delta l_i.$$

Имеет место следующая теорема существования криволинейного интеграла первого рода, которую сформулируем без доказательства.

Теорема 22.1. *Если кривая L – гладкая, а заданная на ней функция точки $f(M)$ непрерывна, то криволинейный интеграл первого рода*

$$\int\limits_{\breve{AB}} f(M)dl$$

существует.

Свойства криволинейного интеграла первого рода

1. Криволинейный интеграл первого рода не зависит от направления интегрирования по дуге $\breve{AB}$.
   Действительно, интегральные суммы содержат длины дуг, а не сами дуги.
2. Постоянный множитель можно выносить за знак криволинейного интеграла первого рода:
   $$\int\limits_{\breve{AB}} kf(M)\,dl = k\int\limits_{\breve{AB}} f(M)\,dV.$$
3. Криволинейный интеграл первого рода от суммы нескольких функций равен сумме интегралов от слагаемых.
4. Если дуга $\breve{AB}$ разбита на конечное число частей (l_1), (l_2), …, (l_m), то
   $$\int\limits_{\breve{AB}} f(M)\,dl = \int\limits_{(l_1)} f(M)\,dl + \int\limits_{(l_2)} f(M)dl + \ldots + \int\limits_{(l_m)} f(M)\,dV.$$
5. Если $f(M)\equiv 1$, то
   $$\int\limits_{\breve{AB}} dl = l,$$
   где l — длина дуги $\breve{AB}$.

Теорема 22.2 (теорема о среднем). *Если функция $f(x,y,z)$ непрерывна на кривой $\breve{AB}$, то существует на ней такая точка $P(\xi,\eta,\zeta)$, что*

$$\int\limits_{\breve{AB}} f(x,y,z)\,dl = f(\xi,\eta,\zeta)l,$$

где l – длина дуги $\breve{AB}$.

Если кривая отнесена к декартовой прямоугольной системе координат, то функция точки, заданная на ее дуге $\breve{AB}$, будет функцией трех переменных $f(M) = f(x,y,z)$, тогда

$$\int\limits_{\breve{AB}} f(M)dl = \int\limits_{\breve{AB}} f(x,y,z)dl.$$

Пусть кривая задана параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$$

причем концам дуги соответствуют значения параметра t_0 и T $(t_0 < T)$. Будем считать функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ непрерывными вместе со своими производными на $[t_0, T]$ – дуга называется гладкой. Тогда дуга (l) будет функцией параметра t, т.е. $l = l(t)$. Как известно, эта функция имеет непрерывную производную

$$l'(t) = \sqrt{x_t^2 + y_t^2 + z_t^2}, \quad \varphi_t = \frac{d\varphi}{dt},$$

тогда

$$dl = \sqrt{x_t^2 + y_t^2 + z_t^2}dt$$

и получим формулу для вычисления криволинейного интеграла первого рода

$$\int\limits_{\breve{AB}} f(x,y,z)dl = \int\limits_{t_0}^{T} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x_t^2 + y_t^2 + z_t^2}dt.$$

Для плоской кривой

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$$

формула примет вид

$$\int\limits_{\breve{AB}} f(x,y)dl = \int\limits_{t_0}^{T} f(x(t),y(t))\sqrt{x_t^2 + y_t^2}dt.$$

Если кривая задана уравнением $y = y(x)$, то

$$\int\limits_{\breve{AB}} f(x,y)dl = \int\limits_{t_0}^{T} f(x,y(x))\sqrt{1 + y_x^2}dx.$$

Если кривая задана в цилиндрических координатах:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z,$$

то

$$\int\limits_L f(\vec{r})dL = \int\limits_\alpha^\beta f(\vec{r}(t))\sqrt{\rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{\rho}^2 + \dot{z}^2}dt.$$

Если кривая задана в сферических координатах:

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta, \quad \varphi = \varphi,$$

то криволинейный интеграл вычисляется по формуле

$$\int\limits_L f(\vec{r})dL = \int\limits_\alpha^\beta f(\vec{r}(t))\sqrt{\rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{\rho}^2 + \dot{z}^2}dt.$$

Криволинейный интеграл первого рода имеет следующий механический смысл.

Если подынтегральная функция $f(x, y, z)$ есть линейная плотность материальной нити (l), то криволинейный интеграл по длине дуги (l) выражает массу этой материальной нити.

22.2. Криволинейный интеграл второго рода

Пусть в пространстве, отнесенном к прямоугольной системе координат, дана дуга $\breve{AB}$ некоторой кривой (L). На этой дуге выберем положительное направление от точки A к точке B.

Пусть на дуге задана ограниченная функция точки $P(M) = P(x, y, z)$. Разобьем дугу $\breve{AB}$ на n частей точками $M_i^*(x_i, y_i, z_i)$ и в каждой из частичных дуг Δl_i выберем по точке $M_i^*(x_i, y_i, z_i)$. Соединим концы каждой частичной дуги хордой и придадим этим хордам направления соответствующих дуг. Получим направленную ломаную линию, вписанную в дугу $\breve{AB}$. Звенья этой ломаной есть векторы $\vec{\Delta l}_1$, $\vec{\Delta l}_2$, …, $\vec{\Delta l}_n$. Спроектировав их на ось Ox, получим числа Δx_1, Δx_2, …, Δx_n, которые могут быть положительными, отрицательными или равными нулю. Составим сумму произведений значений функции $P(x, y, z)$ в точках M_i^* на проекции соответствующих частичных хорд на ось Ox:

$$\sum_{i=1}^n P(x_i, y_i, z_i)\Delta x_i,$$

называемую интегральной суммой.

♦ Если при стремлении к нулю длины Δl_i наибольшей из частичных хорд и стягивании в точку каждой из частичных дуг существует конечный предел этой суммы, не зависящий ни от способа разбиения дуги $\breve{AB}$, ни от выбора точек M_i^*, то этот предел называется криволинейным интегралом второго рода функции $P(x, y, z)$ по координате x вдоль кривой Γ от точки A до точки B и обозначается

$$\int\limits_{\breve{AB}} P(x, y, z)dx.$$

Итак,

$$\oint\limits_{\breve{AB}} P(x,y,z)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} P(x_i,y_i,z_i)\Delta x.$$

♦ Если на этой же дуге $\breve{AB}$ заданы еще две функции $Q(x,y,z)$ и $R(x,y,z)$, то совершенно аналогично получим определения еще двух типов криволинейных интегралов второго рода по координатам y и z:

$$\int\limits_{\breve{AB}} Q(x,y,z)dy, \quad \int\limits_{\breve{AB}} R(x,y,z)dz,$$

проектируя $\vec{\Delta} l_i$, соответственно, на оси Oy и Oz.

♦ Сумма этих трех интегралов называется криволинейным интегралом второго рода общего вида и обозначается

$$\int\limits_{\breve{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

Определение справедливо, если контур (C) замкнутый. В этом случае интеграл обозначается символом

$$\int\limits_{(C)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \oint\limits_{(C)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

Сформулируем теорему существования криволинейного интеграла второго рода без доказательства.

Теорема 22.3 (теорема существования). *Если дуга $\breve{AB}$ кривой Γ – кусочно-гладкая, а заданные на ней функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непрерывны или имеют конечное число точек разрыва первого рода, то криволинейный интеграл второго рода*

$$\int\limits_{\breve{AB}} Pdx + Qdy + Rdz$$

существует.

Отметим два свойства криволинейных интегралов второго рода.

1. При изменении направления интегрирования по кривой интеграл меняет знак на противоположный:

$$\int\limits_{\breve{AB}} Pdx + Qdy + Rdz = -\int\limits_{\breve{BA}} Pdx + Qdy + Rdz.$$

В самом деле, при изменении направления кривой проекции всех хорд частичных дуг на координатные оси изменяют знак на противоположный, что повлечет изменение знака всей интегральной суммы, а значит, и предела – самого интеграла.

2. Если кривая L состоит из нескольких кривых $L_1, L_2, \ldots, L_s$ и на каждой их этих кривых криволинейные интегралы существуют, то существует интеграл вдоль всей кривой L и он равен сумме интегралов вдоль каждой из ее частей, т.е.

$$\int\limits_{L} = \int\limits_{L_1} + \int\limits_{L_2} + \cdots + \int\limits_{L_s}.$$

При этом предполагается, что все кривые проходят в одном направлении.

22.3. Вычисление криволинейных интегралов второго рода

Перейдем теперь к вычислению криволинейного интеграла второго рода. Как и криволинейный интеграл первого рода, он сводится к вычислению определенного интеграла.

Рассмотрим для простоты интеграл

$$\int\limits_{\breve{AB}} P(x,y,z)dx.$$

Пусть кривая задана параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$$

а функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непрерывны вместе со своими производными по t. Пусть началу дуги (точке A) соответствует значение параметра t_0, а концу (точке B) – значение T. Будем считать дугу кусочно-гладкой. Пусть t_i – значение параметра, соответствующее точкам N_i, делящим дугу на части. Тогда

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = x(t_i) - x(t_{i-1}).$$

Применим к этой разности формулу Лагранжа:

$$\Delta x_i = x'(\tau_i)(t_i - t_{i-1}) = x'(\tau_i)\Delta t_i.$$

Здесь $t_{i-1} < \tau_i < t_i$. Выберем на частичных дугах Δl_i точки $M_i^*(x_i, y_i, z_i)$ так, чтобы они соответствовали значениям параметра τ_i. Тогда

$$x_i = x(\tau_i), \quad y_i = y(\tau_i), \quad z_i = z(\tau_i),$$

и сумма примет вид

$$\sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_i z_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} P(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i))x'(\tau_i)\Delta t_i.$$

Предел левой части равенства есть криволинейный интеграл второго рода, который существует, так как функция $P(x,y,z)$ непрерывна. Правая же часть есть обыкновенная интегральная сумма функции $P(x(t), y(t), z(t))$ на промежутке $[t_0, T]$, поэтому ее пределом будет определенный интеграл. В результате получим формулу

$$\int\limits_{\breve{AB}} P(x,y,z)dx = \int\limits_{t_0}^{T} P(x(t), y(t), z(t))x'(t)dt.$$

Аналогично можно получить формулы и для интегралов

$$\int\limits_{\breve{AB}} Q(x,y,z)dy \quad \text{и} \quad \int\limits_{\breve{AB}} Q(x,y,z)dz.$$

И формула для вычисления криволинейного интеграла второго рода по координатам запишется следующим образом:

$$\int\limits_{\breve{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{T} \big\{P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) +$$

$$+R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\big\}dt.$$

Предполагается, что функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непрерывны.

Если кривая лежит в плоскости xOy, то формула примет вид

$$\int\limits_{\breve{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{T} \big\{P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\big\}dt.$$

Если плоская кривая задана явным уравнением $y = y(x)$, то этого достаточно для вычисления криволинейного интеграла второго рода по x:

$$\int\limits_{\breve{AB}} P(x,y)dx = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y(x))dx.$$

22.4. Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода

Теорема 22.4. *Пусть* $\breve{AB}$ *– гладкая кривая, заданная уравнением*

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

а $\vec{F} = (P,Q,R)$ *– векторная функция. Тогда имеет место равенство*

$$\int\limits_{\breve{AB}} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{\breve{AB}} [P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma]dl,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ *– направляющие косинусы касательной в точке* M.

Доказательство. Действительно, по правилу вычисления интегралов 2-го рода запишем

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{[P\dot{x}(t) + Q\dot{y}(t) + R\dot{z}(t)]dt}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}} \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2} =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}dt.$$

Здесь мы учли, что касательный вектор определяется соотношением

$$\vec{N} = \left\{\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right\};$$
$$\vec{n} = \frac{\{\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}.$$

♢ Мы установили, что интеграл второго рода зависит от направления обхода кривой. Если кривая замкнута ($A = B$), то существует особая договоренность.

♦ Положительным направлением обхода замкнутого контура называется направление обхода против часовой стрелки.

22.5. Формула Грина. Вычисление площадей с помощью криволинейных интегралов

Получим формулу, которая связывает криволинейный интеграл по замкнутому контуру с двойным интегралом по области, ограниченной этим контуром, и играет важную роль в дальнейших исследованиях.

Рассмотрим на плоскости некоторую замкнутую область G, ограниченную замкнутой кривой (L), которую прямые, параллельные координатным осям, пересекают не более чем в двух точках.

Спроектировав область G на ось Ox, получим отрезок $[a, b]$. Точки A и B разобьют область G на две части: AmB с уравнением $y = f_1(x)$ и AnB с уравнением $y = f_2(x)$.

Теорема 22.5. *Пусть в этой области заданы функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, непрерывные вместе со своими частными производными. Тогда справедлива формула*

$$\iint\limits_{G} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint\limits_{(L)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \qquad (22.1)$$

Доказательство. Рассмотрим двойной интеграл

$$\iint\limits_{G} \frac{\partial P}{\partial y}dS.$$

Проинтегрировав его сначала по y, а затем по x, получим

$$\iint\limits_{G} \frac{\partial P}{\partial y}dS = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}dy =$$
$$= \int\limits_{a}^{b} P(x, y)\Big|_{f_1(x)}^{f_2(x)} dx = \int\limits_{a}^{b} P(x, f_2(x))dx - \int\limits_{a}^{b} P(x, f_1(x))dx. \qquad (22.2)$$

Во втором интеграле $f_1(x)$ есть значение y на кривой AmB, поэтому этот интеграл есть ни что иное, как криволинейный интеграл вдоль дуги AmB:

$$\int_a^b P(x, f_1(x))dx = \int_{AmB} P(x, y)dx.$$

В первом интеграле поменяем местами пределы интегрирования, а затем запишем его в виде криволинейного интеграла по кривой BnA:

$$\int_a^b P(x, f_2(x))dx = -\int_b^a P(x, f_2(x))dx = -\int_{BnA} P(x, y)dx.$$

Дуги AmB и MnA дают в совокупности границу (L) области G, обход которой совершается в положительном направлении, т.е. при движении вдоль него область G остается слева. Следовательно,

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dS = -\int_{AmB} P(x, y)dx - \int_{BnA} P(x, y)dx = -\oint_{(L)} P(x, y)dx. \tag{22.3}$$

Аналогично можно получить

$$\iint_G \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint_{(L)} Q(x, y)dy. \tag{22.4}$$

Здесь контур проходится в положительном направлении. Тогда, вычитая почленно (22.4) из равенства (22.3), получим формулу Грина (22.1).

При выводе формулы (22.1) предполагалось, что контур (L) пересекается не более чем в двух точках. Но это не существенно, так как можно показать, что она остается справедливой, когда это условие не выполнено. Если область G, ограниченная контуром (L), имеет более сложную форму, эту область можно разбить на ряд областей, каждая из которых удовлетворяет поставленным выше условиям, записать для них формулы Грина и сложить полученные равенства.

Д. Грин (1793-1841) – известный английский физик и математик.

В силу свойств аддитивности двойных и криволинейных интегралов и будет доказана формула Грина для любой области G.

Следствие. Если в формуле Грина положить $P = -y$, $Q = x$, то

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1,$$

и формула Грина даёт

$$\iint_G 2dS = \oint_{(L)} xdy - ydx,$$

но

$$\iint_G 2dS = 2S,$$

где S — площадь области???. Отсюда получим следующую формулу для вычисления площади плоской фигуры с помощью криволинейного интеграла второго рода:

$$S = \frac{1}{2} \oint\limits_{(L)} x\,dy - y\,dx. \tag{22.5}$$

Существуют два простых случая, когда

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 :$$

$$Q = x, \quad P = 0, \quad \text{тогда } S_L = \int\limits_{\Gamma+} x\,dy; \tag{22.5a}$$

$$P = -y, \quad Q = 0, \quad \text{тогда } S_L = -\int\limits_{\Gamma+} y\,dx. \tag{22.5$б$}$$

Пример 22.1. Вычислить площадь эллипса

$$x = a\cos\varphi, \quad y = b\sin\varphi$$

при обходе его в положительном направлении ($0 \le \varphi \le 2\pi$).

Решение. По правилу вычисления криволинейных интегралов

$$S = \frac{1}{2} \oint\limits_{(L)} x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} [x(\varphi)y'_\varphi - y(\varphi)x'_\varphi]d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} [a\cos\varphi b\cos\varphi - b\sin\varphi a\sin\varphi]d\varphi = \frac{ab}{2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{ab}{2}\varphi\Big|_0^{2\pi} = \pi ab \text{ ед.}^2.$$

22.6. Независимость интеграла от пути интегрирования

Рассмотрим криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{(A)}^{(B)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy, \tag{22.6}$$

взятый по некоторой плоской кривой, соединяющей точки A и B.

Выясним, при каких условиях криволинейный интеграл (22.6) не зависит от пути интегрирования (т.е. от формы кривой, соединяющей точки A и B), а зависит только от положения начальной и конечной точек. Для этого рассмотрим две произвольные кривые AmB и AnB в некоторой плоской области G.

Теорема 22.6. *Пусть функции*

$$P(x,y), \quad Q(x,y), \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x,y), \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

непрерывны в односвязной области $G \subset \mathbb{R}^2$. Тогда следующие четыре условия эквивалентны:

1) *для замкнутой любой кусочно гладкой кривой, целиком лежащей в G, справедливо*

$$\oint\limits_L P\,dx + Q\,dy = 0;$$

2) *криволинейный интеграл* $\int\limits_{L_{AB}} P\,dx + Q\,dy$ *не зависит от вида кривой L, соединяющей точки A и B, если она целиком лежит в G;*
3) *существует такая функции $U(x, y)$, что*

$$dU = P(x, y)dx + Q(x, y)dy;$$

4) *для всех $(x, y) \in G$ справедливо*

$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad (22.7)$$

Выполнение одного из условий влечет за собой выполнение трех других.

Доказательство. Для доказательства теоремы следующую цепочку следствий $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$:

Пример 22.2. Показать, что криволинейный интеграл

$$\int\limits_{(L)} (x^2 + y^2)dx + 2xy\,dy$$

не зависит от пути интегрирования, так как для него выполняются условия теоремы.

Решение. Действительно, здесь $P = x^2 + y^2$, $Q = 2xy$,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y.$$

Следовательно, условие (22.7) выполнено.

Пример 22.3. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{\gamma_0} P(x, y)dx + Q(x, y)\,dy, \quad P(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

где γ_0 –окружность радиуса R.

Решение. Контур определяется уравнением $\gamma_0 = \{x = \cos t, y = \sin t\}$. Кроме того

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

С учетом

$$d\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} = -\frac{y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2},$$

получим

$$\int\limits_{\gamma_0} Pdx + Qdy = \int\limits_{\gamma_0} -\frac{y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2} = \int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Пример 22.4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t.$$

Решение. Запишем интеграл как криволинейный

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}[a\cos^3 t\cdot a3\sin^2 t\cos t - a\sin^3 t\cdot a3\cos^2 t(-\sin t)]dt =$$

$$= \frac{3}{2}a^2\int\limits_0^{2\pi}\frac{4\sin^2 t\cos^2 t}{4}[\cos^2 t + \sin^2 t]dt = \frac{3}{8}a^2\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 2t\,dt = \frac{3}{8}a^2\frac{1-\cos 4t}{2}dt =$$

Здесь мы воспользовались формулой (22.7).

23. Поверхностные интегралы

23.1. Площадь поверхности

$$\Phi : \{z = f(x,y),\ (x,y)\in G\subset\mathbb{R}^2\}.$$

Пусть $f(x,y)$ – однозначная и дифференцируемая функция, а G – некоторая область кусочно гладкой поверхности.

Зададим разбиение области G: $G = \bigcup\limits_{i=1}^{N} G_i$, $\{G_i\}_{i=1}^N$.

Обозначим через d_i диаметр области G_i, $d = \max\{d_i)\}$, через Q_i обозначим часть плоскости, в которую проецируется элемент поверхности G_i. Следовательно разбиение $\{G_i\}_{i=1}^N$ поверхности G порождает разбиение $\{Q_i\}_{i=1}^N$ области $Q\subset\mathbb{R}^2$. Если d достаточно мало, то площадку S_i можно считать плоской. Обозначим через $\Omega_i = S(Q_i)$ площадь элемента поверхности S_i. Тогда

$$S(Q_i) = \frac{S(G_i)}{|\cos\gamma_i|}, \quad \Omega_i = \frac{S(G_i)}{|\cos\gamma_i|}.$$

Здесь γ_i угол между нормалью к элементу поверхности G_i и осью Oz.

Определить площадь поверхности соотношением

$$S = \lim_{\substack{d\to 0\\ N\to\infty}}\sum_{i=1}^{N}\Omega_i.$$

♦ Если такой предел существует и не зависит от способа разбиения поверхности G, то он называется площадью поверхности Φ и обозначается

$$\lim_{\substack{d\to 0\\ N\to\infty}}\sum_{i=1}^{N}\Omega_i = S_\Phi.$$

Следовательно,

$$S_\Phi = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{N}\frac{S(G_i)}{|\cos\delta_i|} = \iint\limits_G\frac{dx\,dy}{|\cos\gamma|},$$

где

$$|\cos\gamma| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}.$$

Для площади получим выражение

$$S_\Phi = \iint\limits_G \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}dx\,dy.$$

$\Diamond$ Если поверхность задается уравнением $y = f(x,z)$, то площадь поверхности определяется формулой

$$S = \iint\limits_G \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}dx\,dz.$$

Пример 23.1. Найти площадь поверхности

$$z = x^2+y^2, \qquad x^2+y^2=2.$$

Решение. Найдем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y,$$

тогда

$$\sqrt{1+f_x^2+f_y^2} = \sqrt{1+4x^2+4y^2}.$$

Следовательно,

$$S = \iint\limits_G \sqrt{1+4x^2+4y^2}dx\,dy.$$

Перейдем в полярную систему координат:

$$S = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} \rho\sqrt{1+4\rho^2}d\rho = \frac{2\pi}{2\cdot 4}\int\limits_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+4\rho^2}d(4\rho^2+1) = \frac{\pi}{4}\frac{(1+4\rho^2)^{3/2}}{3/2}\Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{13\pi}{3}.$$

23.2. Вычисление площади поверхности в общем случае

Рассмотрим поверхность, заданную параметрически:

$$\Phi = \begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v), \end{cases} \qquad (u,v) \in \Delta.$$

Например, сферическую поверхность можно задать уравнением

$$\begin{aligned} &x = R\sin\theta\cos\varphi, \quad \theta \in [0,\pi]; \\ &y = R\sin\theta\sin\varphi, \quad \varphi \in [0,2\pi]; \\ &z = R\cos\varphi. \end{aligned}$$

Площадь поверхности определяется соотношением

$$S_\Phi = \iint\limits_\Delta \sqrt{\Big(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\Big)^2}\, du\, dv,$$

где

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

– якобиан перехода от (x,y) к (u,v).

Пример 23.2. Вычислить площадь части сферы радиуса R, $\theta_1 \le \theta_2$, $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$.

Решение. Параметрическое уравнение сферической поверхности имеет вид

$$\begin{aligned} &x = R\sin\theta\cos\varphi, \quad \theta \in [0,\pi];\\ &y = R\sin\theta\sin\varphi, \quad \varphi \in [0,2\pi];\\ &z = R\cos\varphi, \end{aligned}$$

Следовательно, формула площади запишется как

$$dS = \sqrt{\Big(\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\varphi)}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial(y,z)}{\partial(\theta,\varphi)}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial(z,x)}{\partial(\theta,\varphi)}\Big)^2}\, d\theta\, d\varphi.$$

Вычислим якобиан перехода:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\varphi)} &= \begin{vmatrix} R\cos\theta\cos\varphi & R\sin\theta\sin\varphi \\ R\cos\theta\sin\varphi & R\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} = R^2\cos\theta\sin\varphi;\\ \frac{\partial(y,z)}{\partial(\theta,\varphi)} &= R^2 \begin{vmatrix} \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi \\ -\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = R^2\sin^2\theta\cos\varphi;\\ \frac{\partial(z,x)}{\partial(\theta,\varphi)} &= R^2 \begin{vmatrix} -\sin\theta & 0 \\ \cos\theta\cos\varphi & -\sin\theta\sin\varphi \end{vmatrix} = R^2\sin^2\theta\sin\varphi. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{gathered} (R^2\cos\theta\sin\varphi)^2 + (R^2\sin^2\theta\cos\varphi)^2 + (R^2\sin^2\theta\sin\varphi)^2 = \\ = (R^2\sin\theta^2)^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + (R^2\sin\theta)^2\cos^2\theta = \\ = R^4\sin^2\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = R^4\sin^2\theta, \end{gathered}$$

то

$$dS = \sqrt{R^4\sin^2\theta} = R^2\sin\theta.$$

Окончательно получим

$$S = \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} R^2\sin\theta\, d\varphi = R^2(\varphi_2 - \varphi_1)(\cos\theta_1 - \cos\theta_2).$$

Расширим понятие двойного интеграла, перейдя от интегрирования по плоской области к интегрированию по сегменту некоторой кривой поверхности.

23.3. Поверхностный интеграл первого рода

Пусть дана функция $F(x,y,z)$, ограниченная во всех точках конечной кусочно-гладкой поверхности (S). Разобьем эту поверхность на некоторое число частей – элементов ΔS_1, ΔS_2, $\dots$, ΔS_n с помощью линий. Выберем в каждом из элементов произвольным образом по точке $N_i(x_i,y_i,z_i)$ и составим сумму произведений значений функции $F(x,y,z)$ в точках N_i на соответствующие площади элементов ΔS_i:

$$\sum_{i=1}^{n} F(x_i,y_i,z_i)\Delta S_i.$$

Рассмотрим предел этой суммы при $n\to\infty$. Если существует конечный предел этой суммы, не зависящий ни от способа разбиения на части, ни от выбора точек N_i, то этот предел называется поверхностным интегралом функции $F(x,y,z)$ по поверхности (S) и обозначается

$$\iint\limits_{(S)} F(x,y,z)dS.$$

Итак, по определению,

$$\iint\limits_{(S)} F(x,y,z)dS = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} F(x_i,y_i,z_i)\Delta S_i.$$

Функция называется интегрируемой по поверхности (S), если для нее существует поверхностный интеграл по поверхности (S). Имеет место теорема существования, которую сформулируем без доказательства.

Теорема 23.1 (теорема существования). *Если функция $F(x,y,z)$ непрерывна во всех точках конечной кусочно-гладкой поверхности (S), то она интегрируема на этой поверхности, т.е. существует поверхностный интеграл.*

Укажем некоторые свойства поверхностного интеграла, которые доказываются исходя из определения этого интеграла как предела интегральной суммы:

1) если функция $F(x,y,z)=1$, то

$$\iint\limits_{(S)} dS = S,$$

где S – площадь области интегрирования;

2) постоянный множитель можно выносить за знак поверхностного интеграла:

$$\iint\limits_{(S)} kF(x,y,z)\,dS = k\iint\limits_{(S)} F(x,y,z)dS;$$

3) интеграл от суммы нескольких функций равен сумме интегралов от слагаемых:

$$\iint\limits_{(S)} [F_1(x,y,z)+F_2(x,y,z)]dS = \iint\limits_{(S)} F_1(x,y,z)dS + \iint\limits_{(S)} F_2(x,y,z)dS;$$

4) если область (S) разбита на части (S_1) и (S_2), то

$$\iint\limits_{(S)} F(x,y,z)dS = \iint\limits_{(S_1)} F(x,y,z)dS + \iint\limits_{(S_2)} F(x,y,z)dS;$$

5) если $F_1(x,y,z) < F_2(x,y,z)$ в области (S), то

$$\iint\limits_{(S)} F_1(x,y,z)dS \le \iint\limits_{(S)} F_2(x,y,z)dS.$$

Теорема 23.2 (теорема о среднем). *Если функция $F(x,y,z)$ непрерывна на всей кусочно-гладкой поверхности (S), то на этой поверхности найдется такая точка $N^*(\xi,\eta,\zeta)$, что*

$$\iint\limits_{(S)} F(x,y,z)dS = F(\xi,\eta,\zeta)S,$$

где S – площадь области интегрирования (S).

Поясним физический смысл поверхностного интеграла.

Пусть на поверхности (S) распределена непрерывным образом масса M и в каждой точке этой поверхности известна поверхностная плотность как функция точки, т.е. $\mu = \mu(x,y,z)$, причем $\mu(x,y,z)$ – непрерывная функция. Разделим поверхность (S) на элементы ΔS_i и в каждом из них выберем точку $N_i(x_i,y_i,z_i)$. Масса одного элемента ΔS_i равна $\mu(x_i,y_i,z_i)\Delta S_i$. Следовательно, вся масса

$$M \approx \sum_{i=1}^{n} \mu(x_i,y_i,z_i)\Delta S_i.$$

Перейдя к пределу при $n \to \infty$, найдем

$$M = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(x_i,y_i,z_i)\Delta S_i = \iint\limits_{(S)} \mu(x,y,z)dS.$$

Таким образом, рассматривая подынтегральную функцию как поверхностную плотность, можно истолковать поверхностный интеграл как массу материальной оболочки.

23.4. Вычисление поверхностного интеграла первого рода

Теорема 23.3. *Пусть поверхность (S) такова, что всякая прямая, параллельная оси Oz, пересекает поверхность не более чем в одной точке. Пусть проекцией поверхности (S) на плоскость xOy будет область G и пусть уравнение поверхности (S)*

$$z = f(x,y).$$

Предположим, что функция $f(x,y)$ и ее частные производные $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ непрерывны в замкнутой области (G), а функция $F(x,y,z)$ непрерывна на всей поверхности (S). Тогда

$$\iint\limits_{(G)} F(x,y,z)dS = \iint\limits_{G} F(x,y,f(x,y))\frac{dS}{|\cos\gamma|}. \qquad (23.1)$$

Доказательство. Разобьем область (S) на n частей ΔS_i. Пусть проекцией элемента ΔS_i на плоскость xOy будет $\Delta\sigma_i$. Площадь элемента ΔS_i вычислим по формуле (17.1):

$$\Delta S_i = \iint\limits_{(\Delta\sigma_i)} \sqrt{1 + f_x'^2(x,y) + f_y'^2(x,y)}dS$$

(см. ???). По теореме о среднем

$$\Delta S_i = \sqrt{1 + f_x'^2(x_i,y_i) + f_y'^2(x_i,y_i)}\Delta\sigma_i, \tag{23.2}$$

где точка с координатами $N_i'(x_i, y_i)$ принадлежит элементу $\Delta\sigma_i$. Перпендикуляр из точки $N_i'(x_i, y_i)$ пересечет поверхность (S) в некоторой точке $N_i(x_i, y_i, z_i)$, принадлежащей элементу ΔS_i, причем $z_i = f(x_i, y_i)$. Эту точку N_i и возьмем для построения интегральной суммы для функции $F(x, y, z)$. Таким образом, получим

$$\sum_{\substack{i=1\\(S)}}^{n} F(x_i,y_i,z_i)\Delta S_i = \sum_{\substack{i=1\\G}}^{n} F(x_i,y_i,f(x_i,y_i))\sqrt{1 + f_x'^2(x_i,y_i) + f_y'^2(x_i,y_i)}\Delta\sigma_i.$$

Перейдя к пределу при $n \to \infty$ и учтя, что пределом левой части будет поверхностный интеграл, а пределом правой части — двойной интеграл, получим

$$\iint\limits_{(S)} F(x,y,z)dS = \iint\limits_{G} F(x,y,f(x,y))\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}dS.$$

Так как

$$\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = \frac{1}{|\cos\gamma|},$$

где γ – угол между нормалью к поверхности и осью Oz, то получим (23.2).

Таким образом, поверхностный интеграл выражен через двойной по проекции этой поверхности на координатную плоскость.

$\Diamond$ Если поверхность задана уравнением $y = \varphi(x, z)$, то

$$\iint\limits_{(S)} F(x,y,z)dS = \iint\limits_{(\sigma_1)} F(x,\varphi(x,z),z)\frac{dS}{|\cos\beta|},$$

где (σ_1) — проекция (S) на плоскость xOz, γ — угол между нормалью и осью Oy, $dS = dxdy$.

$\Diamond$ В приложениях иногда оказывается полезной формула преобразования двойного интеграла в поверхностный

$$\iint\limits_{(S)} F(x,y,z)dS = \iint\limits_{(\sigma_2)} F(\psi(y,z),y,z)\frac{dS}{|\cos\alpha|},$$

где (σ_2) — проекция (S) на плоскость yOz, α — угол между нормалью и осью Ox. Эта формула будет использована позднее при выводе формулы Стокса.

Теорема 23.4. *Пусть справедливы условия теоремы* 23.3, *а поверхность* (S) *задана в параметрической форме, т.е.*

$$S = \{(x, y, z) | x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v), \quad (u, v) \in \Delta\}.$$

Тогда

$$\iint\limits_{\Phi} F(x, y, z) dS =$$

$$= \iint\limits_{\Delta} F(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{\Big(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\Big)^2} du\, dv. \tag{23.3}$$

Доказательство полностью аналогично доказательству теоремы 23.3 с заменой формулы (17.1) на (17.2).

◊ Если поверхность однозначно не проецируется на координатную плоскость, то ее нужно разбить на части, каждая из которых проецируется на одну из координатных плоскостей.

Пример 23.3. Вычислить массу части поверхности, отсеченной плоскостью $z = 2$ от параболоида вращения $2z = x^2 + y^2$, если плотность в каждой точке пропорциональна расстоянию этой точки от плоскости xOy, т.е.

$$\mu = \frac{k}{2}(x^2 + y^2).$$

Решение. Для массы имеем формулу

$$M = \iint\limits_{(S)} \mu(x, y, z) dS = \frac{k}{2} \iint\limits_{(S)} (x^2 + y^2) dS = \frac{k}{2} \iint\limits_{G} (x^2 + y^2) \frac{dS}{|\cos\gamma|}.$$

Так как

$$\frac{1}{|\cos\gamma|} = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2},$$

а $z_x = 2x$, $z_y = 2y$, то

$$\frac{1}{|\cos\gamma|} = \sqrt{1 + x^2 + y^2}.$$

Область G есть круг $x^2 + y^2 = 2$. Перейдя к полярным координатам, найдем

$$x^2 + y^2 = \rho^2, \quad 0 \le \rho \le \sqrt{2}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Замена переменных $1 + \rho^2 = t^2$ ($\rho^2 = t^2 - 1$, $\rho d\rho = t\, dt$ и $1 \le t \le \sqrt{3}$) приводит к интегралу

$$M = k\pi \int\limits_1^{\sqrt{3}} (t^2 - 1) t^2 dt = k\pi \int\limits_1^{\sqrt{3}} (t^4 - t^2) dt =$$

$$= k\pi \Big(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\Big)\Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{2k\pi}{15}(6\sqrt{3} + 1).$$

Пример 23.4. Найти площадь части поверхности параболоида вращения $z = (x^2+y^2)/2$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2 = R^2$.

Решение. Так как

$$S = \iint\limits_{(S)} dS = \iint\limits_{G} \frac{dxdy}{|\cos\gamma|} = \iint\limits_{G} \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\, dxdy,$$

где область G – круг радиуса R; $z_x = x$; $z_y = y$, то

$$S = \iint\limits_{G} \sqrt{1+x^2+y^2}\, dxdy.$$

Перейдя к полярным координатам, найдем

$$S = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R} \sqrt{1+\rho^2}\rho\, d\rho = \frac{2\pi}{3}(1+\rho^2)^{3/2}\Big|_0^R = \frac{2\pi}{3}[(1+R^2)^{3/2}-1].$$

Пример 23.5. Вычислить

$$\iint\limits_{\Phi} \frac{x^2}{z} dS,$$

где поверхность определяется условиями

$$\Phi : \begin{cases} z = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \text{ограничена плоскостью} \quad z = \sqrt{2}. \end{cases}$$

Решение. Вычислим частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Следовательно,

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{2}.$$

Запишем двойной интеграл:

$$\iint\limits_{\Phi} = \frac{x^2}{z} dS = \iint\limits_{D_{xy}} \frac{dx\, dy\sqrt{2}x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Перейдем к сферическим координатам: $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $z = \sqrt{2}$,

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} d\rho \frac{\rho\sqrt{2}\rho^2\cos^2\varphi}{\rho} = \sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} \rho^2 d\rho =$$

$$= \sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} \frac{1+\cos\varphi}{2} d\varphi \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\pi 2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

Пример 23.6. Вычислить

$$\iint\limits_{\Phi} e^z dS,$$

где Φ – сфера радиуса R: $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Решение. По формуле (23.3) получим

$$\iint\limits_{\Phi} e^z dS = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta\, e^{R\cos\theta} R^2 \sin\theta = \frac{2\pi r^2}{R} \int\limits_0^{\pi} e^{R\cos\theta} R\sin\theta\, d\theta =$$

$$= -2\pi R e^{R\cos\theta}\Big|_0^{\pi} = 2\cdot 2\pi R \frac{e^R - e^{-R}}{2} = 4\pi R \operatorname{sh} R.$$

23.5. Поверхностный интеграл второго рода

♦ Гладкая поверхность Σ называется двусторонней, если при обходе по любому замкнутому контуру, лежащему на этой поверхности и не имеющему общих точек с ее границей, не меняется направление нормали к поверхности. В противном случае поверхность называется односторонней.

◊ Если поверхность Σ двусторонняя, то в каждой ее точке M можно выбрать единичный вектор нормали $\vec{n}(M)$ так, чтобы этот вектор зависел от M непрерывно.

Пример 23.7. Показать, что лента Мебиуса, бутылка Клейна являются односторонними поверхностями.

Решить самостоятельно.

♦ Двустороннюю поверхность называют ориентированной, а выбор определенной ее стороны – ориентацией поверхности.

Пусть Σ – гладкая двусторонняя поверхность. Зафиксируем определенную сторону этой поверхности, т.е. $\vec{n}(M)$. Рассмотрим функцию $R(M)$, заданную на этой поверхности.

♦ Поверхностный интеграл

$$\iint\limits_{\Sigma} R(M)\cos\alpha\, dS$$

называется поверхностным интегралом второго рода и обозначается

$$\iint\limits_{\Sigma} R(M)\, dxdy = \iint\limits_{E} R(M)\cos\alpha\, dS, \tag{23.4}$$

где α – угол между вектором нормали к поверхности и осью Oz.

♦ Если в каждой точке поверхности Σ заданы вектор нормали $\vec{n}(M)$ и функции $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$, то интеграл

$$\iint\limits_{\Sigma} [P(M)\, dzdy + Q(M)\, dxdz + R(M)\, dxdy] =$$

$$= \iint\limits_{\Sigma} [P(M)\cos\alpha + R(M)\cos\beta + Q(M)\cos\gamma] dS, \tag{23.5}$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие векторы нормали, называется поверхностным интегралом второго рода общего вида.

Теорема 23.5. *Пусть поверхность Σ задана уравнением $z = f(x, y)$, а $R(x, y, z)$ – некоторая ограниченная функция на этой поверхности. Тогда*

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x, y, z)\, dxdy = \pm \iint\limits_{\sigma} R(x, y, f(x, y))\, dxdy, \tag{23.6}$$

где σ – проекция Σ на плоскость xOy. Знак плюс берется в том случае, когда нормаль к поверхности образует с осью Oz острый угол, а минус – когда тупой.

Доказательство. Действительно,

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x, y, z)\, dxdy = \iint\limits_{\Sigma} R(x, y, z) \cos\gamma\, dS.$$

Применив к последнему интегралу формулу (23.1), получим (23.6).

24. Формула Остроградского

Рассмотрим область (V), ограниченную замкнутой поверхностью (S). Обозначим через α, β, γ углы, образованные внешней нормалью (нормаль, направленная изнутри (S) наружу) с координатными осями:

$$\alpha = (\widehat{\vec{n}, x}), \quad \beta = (\widehat{\vec{n}, y}), \quad \gamma = (\widehat{\vec{n}, z}).$$

Теорема 24.1. *Если функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывны вместе со своими частными производными в области (V) и на всей поверхности (Σ)???, ограничивающей эту область, то имеет место формула*

$$\iiint\limits_{(V)} \Big(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\Big) dV = \iint\limits_{(S)} [P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma] dS. \tag{24.1}$$

Доказательство. Для доказательства рассмотрим область специального вида, ограниченную цилиндром с образующими, параллельными оси Oz, и двумя поверхностями $z = f_1(x, y)$ и $z = f_2(x, y)$. Проектируя эту область (V) на плоскость xOy, получим область G.

Рассмотрим интеграл

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial R}{\partial z} dV = \iint\limits_{G} dxdy \int\limits_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \iint\limits_{(\sigma)} R(x, y, z)\Big|_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} dxdy =$$
$$= \iint\limits_{G} R(x, y, f_2(x, y)) dxdy - \iint\limits_{G} R(x, y, f_1(x, y)) dxdy. \tag{24.2}$$

Но замкнутая поверхность (S) состоит из трех частей: (S_1) с уравнением $z = f_1(x, y)$; (S_2) с уравнением $z = f_2(x, y)$; (S_3) – боковая цилиндрическая поверхность. Так как на поверхности выбрано определенное направление, то $\cos\gamma$ на части (S_1) отрицателен, на (S_2) положителен, на (S_3) равен нулю, т.е. $|\cos\gamma| = \cos\gamma$ на (S_2), $|\cos\gamma| = -\cos\gamma$ на (S_2), $|\cos\gamma| = 0$ на (S_3).

Преобразуя в правой части (24.2) интегралы в поверхностные, получим

$$\iint\limits_{G} R(x,y,f_2(x,y))dxdy = \iint\limits_{(S_2)} R(x,y,z)\cos\gamma\, dS;$$
$$\iint\limits_{G} R(x,y,f_1(x,y))dxdy = -\iint\limits_{(S_1)} R(x,y,z)\cos\gamma\, dS$$

и, корме того,

$$\iint\limits_{(S_3)} R(x,y,z)\cos\gamma\, dS = 0.$$

Тогда

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial R}{\partial z} dV = \iint\limits_{(S_1)} R\cos\gamma\, dS + \iint\limits_{(S_2)} R\cos\gamma\, dS + \iint\limits_{(S_3)} R\cos\gamma\, dS$$

или

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial R}{\partial z} dV = \iint\limits_{(S)} R(x,y,z)\cos\gamma\, dS.$$

Аналогично доказываются и две другие формулы:

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial P}{\partial x} dV = \iint\limits_{(S)} P(x,y,z)\cos\alpha\, dS,$$
$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial Q}{\partial y} dV = \iint\limits_{(S)} Q(x,y,z)\cos\beta\, dS.$$

Сложив почленно эти три интеграла, получим формулу (24.1). Теорема доказана.

Следствие 24.1.1. *Пусть замкнутая поверхность S удовлетворяет условиям теоремы Остроградского. Тогда объем области E, ограниченной этой поверхностью, равен*

$$V = \frac{1}{3}\iint\limits_{(S)} [x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma]\, dS. \tag{24.3}$$

Формула (24.1) справедлива и для любой области V, которую можно разбить с помощью цилиндрических поверхностей с образующими, параллельными оси Oz, на конечное число частей типа (V). Формула (24.1) называется формулой Остроградского, который и получил ее в 1834 г.

Положив в формуле Остроградского

$$P = x, \quad Q = y, \quad R = z,$$

получим

$$3\iiint\limits_{(V)} dV = \iint\limits_{(S)} [x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma]\, dS,$$

отсюда следует (24.3). Эта формула позволяет вычислять объём тела с помощью поверхностного интеграла.

Итак, получили формулу Остроградского (24.1), дающую связь между поверхностным интегралом по замкнутой поверхности с некоторым тройным интегралом по объёму, ограниченному этой поверхностью.

Пример 24.1. С помощью формулы Остроградского вычислить поверхностный интеграл

$$\iint\limits_{(S)} (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)dS,$$

где (S) внешняя сторона поверхности куба

$$0 \le x \le a, \quad 0 \le y \le a, \quad 0 \le z \le a.$$

Решение. Применим формулу Остроградского (24.1). Здесь $P = x^2$, $Q = y^2$, $R = z^2$. Тогда

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = 2z$$

и

$$\iint (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)dS = \int\limits_0^a dx\int\limits_0^a dy\int\limits_0^a (2x + 2y + 2z)dz =$$

$$= \int\limits_0^a dx\int\limits_0^a (ax + 2ay + a^2)dy = \int\limits_0^a (2a^a x + a^3 + a^3)dx = \int\limits_0^a (2a^2 x + 2a^3)dx = 3a^4.$$

25. Формула Стокса

Получим формулу, устанавливающую зависимость между интегралом по поверхности (S) и криволинейным интегралом по границе (α) этой поверхности.

Теорема 25.1. *Пусть (S) – незамкнутая поверхность, ограниченная замкнутым контуром (L). Предположим, что прямые, параллельные оси Oz, пересекают поверхность (S) не более чем в одной точке. Уравнение поверхности $z = f(x, y)$. Пусть $\vec{n}^0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ – орт нормали к поверхности, образующий с осью Oz острый угол. Тогда справедлива формула*

$$\oint\limits_{(L)} Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_{(S)} \Big\{\Big[\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\Big]\cos\alpha +$$

$$+\Big[\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\Big]\cos\beta + \Big[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big]\cos\gamma\Big\}dS. \tag{25.1}$$

Формула (25.1) *называется формулой Стокса.*

Доказательство. Известно, что

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}, \quad \cos\beta = -\frac{z_y}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}},$$

т.е.

$$\cos\beta = -\frac{\partial z}{\partial y}\cos\gamma. \tag{25.2}$$

Спроектируем поверхность (S) на плоскость xOy и получим область σ, ограниченную замкнутым контуром λ, который является проекцией контура (L). В качестве положительного выберем то направление обхода, следуя в котором, наблюдатель, расположенный на нормали $\vec{n}^0$ к поверхности (S), будет оставлять эту поверхность слева. Этому направлению обхода (L) будет соответствовать положительное направление обхода контура (λ).

Пусть в некоторой пространственной области, содержащей внутри поверхность (S), задана функция $P(x,y,z)$, имеющая непрерывные частные производные.

Рассмотрим криволинейный интеграл

$$\oint\limits_{(L)} P(x,y,z)dx.$$

Это криволинейный интеграл по пространственному контуру можно свести к интегралу по плоскому контуру (λ), так как при обходе контура (L) координаты x и y меняются так же, как при обходе (λ), а z выражается через x и y из уравнения поверхности $z = f(x,y)$. Поэтому

$$\oint\limits_{(L)} P(x,y,z)dx = \oint\limits_{(\lambda)} P(x,y,f(x,y))\,dx.$$

Последний интеграл преобразуем по формуле Грина:

$$\oint\limits_{(\lambda)} P\,dx = -\iint\limits_{G} P_y\,dxdy$$

или

$$\oint\limits_{(L)} P(x,y,z)dx = -\iint\limits_{G}\Big[\frac{\partial P(x,y,f(x,y))}{\partial y} + \frac{\partial P(x,y,f(x,y))}{\partial z}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Big]dxdy,$$

так как

$$P_y = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}.$$

От этого двойного интеграла перейдем к интегралу по поверхности (S). Для этого под знаком интеграла заменим $f(x,y)$ на z, а $dxdy = \cos\gamma dS$. Тогда

$$\oint\limits_{(L)} P(x,y,z)dx = \iint\limits_{(S)}\Big[-\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y}\cos\gamma - \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\cos\gamma\Big]dS,$$

но с учетом (25.2), получим

$$\oint\limits_{(L)} P(x,y,z)dx = \iint\limits_{(S)}\Big[\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y}\cos\gamma\Big]dS. \tag{25.3}$$

Если заданы функции $Q(x,y,z)$ и $R(x,y,z)$, то аналогично можем получить формулы

$$\oint\limits_{(L)} Q(x,y,z)dy = \iint\limits_{(S)} \Big[\frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial x}\cos\gamma - \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial z}\cos\alpha\Big]dS; \qquad (25.4)$$

$$\oint\limits_{(L)} R(x,y,z)dz = \iint\limits_{(S)} \Big[\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial y}\cos\alpha - \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial x}\cos\beta\Big]dS. \qquad (25.5)$$

Сложив почленно формулы (25.3)–(25.5), получим (25.1). Эта формула устанавливает зависимость между интегралом по поверхности (S) и криволинейным интегралом по границе (L) этой поверхности.

◊ В заключение укажем удобное формальное правило записи формулы Стокса. Сначала рассмотрим определитель

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix},$$

причем

$$\frac{\partial}{\partial x}Q = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}P = \frac{\partial P}{\partial y}$$

и т.д. Тогда придем к формулам

$$\oint\limits_{(L)} Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_{(S)} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS. \qquad (25.6)$$

Формула (25.6) эквивалентна формуле (25.1) и также называется формулой Стокса.

Формулу Стокса можно использовать для вычисления криволинейных интегралов по замкнутому контуру через поверхностный интеграл по поверхности, «опирающейся» на контур, и наоборот.

Пример 25.1. Интеграл

$$I = \oint\limits_{(L)} (y^2+z^2)dx + (x^2+z^2)dy + (x^2+y^2)dz,$$

взятый по некоторому контуру, преобразовать с помощью формулы Стокса в интеграл по поверхности, опирающейся на этот контур.

Решение. В рассматриваемом случае $P(x,y) = (y^2+z^2)$, $Q(x,y) = (x^2+z^2)$, $R(x,y) = (x^2+y^2)$. По формуле Стокса

$$I = 2\iint [(y-z)\cos\alpha + (z-x)\cos\beta + (x-y)\cos\gamma]dS.$$

ГЛАВА 3

Математическая теория поля

26. Дивергенция векторного поля

26.1. Поток векторного поля

Пусть дано некоторое векторное поле $\vec{a}(M)$ и поверхность S. Тогда величина

$$\Phi = \iint\limits_{(S)} a_n dS$$

или

$$\Phi = \iint\limits_{(S)} (\vec{a}, \vec{n}^0) dS, \tag{26.1}$$

которая иногда записывается и так:

$$\Phi = \iint\limits_{(S)} (\vec{a}, d\vec{S}), \tag{26.2}$$

где $d\vec{S}$ – вектор, численно равный величине dS, отложенной но нормали к поверхности S в рассматриваемой точке в направлении $\vec{n}_0$, называется потоком векторного поля $\vec{a}(M)$ через поверхность S.

$\Diamond$ Легко заметить, что поток векторного поля есть скалярная величина и его определение не зависит от выбора системы координат.

Величина потока зависит от направления нормали к поверхности $\vec{n}$: если поле пересекает поверхность S в направлении нормали, то $\Phi > 0$, а если в противоположном – то $\Phi < 0$.

Если вектор $\vec{a}$ и орт нормали $\vec{n}_0$ разложены по координатным ортам $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$:

$$\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k},$$
$$\vec{n}_0 = \vec{\imath}\cos\alpha + \vec{\jmath}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma,$$

то поток вектора $\vec{a}$ через поверхность S можно представить поверхностным интегралом вида

$$\Phi = \iint\limits_{(S)} (a_x\cos\alpha + a_y\cos\beta + a_z\cos\gamma) dS. \tag{26.3}$$

Приведем схему вычисления потока Φ вектора $\vec{a}$ через поверхность S (с выбранным направлением нормали $\vec{n}$), заданную уравнением $z = f(x, y)$.

1. Найти направляющие косинусы нормали $\vec{n}$ в некоторой точке по формулам

$$\cos\alpha = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}};$$

$$\cos\beta = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}.$$

2. Составить орт $\vec{n}_0$ нормали:

$$\vec{n}_0 = \pm\frac{-\vec{\imath}\frac{\partial f}{\partial x} - \vec{\jmath}\frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}.$$

Знак плюс соответствует случаю, когда нормаль к поверхности образует с осью Oz острый угол, а знак минус – случаю, когда нормаль к поверхности образует с осью Oz тупой угол.

3. Вычислить скалярное произведение $(\vec{a}, \vec{n}_0)$:

$$(\vec{a}, \vec{n}_0) = \pm\frac{-a_x\frac{\partial f}{\partial x} - a_y\frac{\partial f}{\partial y} + a_z}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}.$$

Если поверхность S проектируется на плоскость xOy в область σ, то элемент поверхности равен

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}dx\,dy$$

и тогда

$$\Phi = \iint\limits_{(S)} (\vec{a}, \vec{n}_0)dS = \pm\iint\limits_{G} \frac{-a_x\frac{\partial f}{\partial x} - a_y\frac{\partial f}{\partial y} + a_z}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}dx\,dy$$

или

$$\Phi = \pm\iint\limits_{G} \Big(- a_x\frac{\partial f}{\partial x} - a_y\frac{\partial f}{\partial y} + a_z\Big)dxdy,$$

т.е. дело свелось к вычислению двойного интеграла по области G.

Если поверхность S задана уравнением $F(x, y, z) = 0$, то орт $\vec{n}_0$ нормали к этой поверхности определяется выражением

$$\vec{n}_0 = \pm\frac{\vec{\imath}\frac{\partial F}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial F}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}.$$

Рассмотрим поток вектора через замкнутую поверхность (S), ограничивающую область (V) (рис.). В этом случае за положительное направление вектора $\vec{n}_0$ принимается направление, совпадающее с направлением внешней нормали к поверхности (S).

Рассмотрим физический смысл потока вектора для случая замкнутой поверхности. Положим, что вектор $\vec{a}$ есть вектор скорости частиц несжимаемой жидкости. Поверхность (S) разобьем на две части: (S_1) и (S_2). Поверхность (S_1) – совокупность тех точек поверхности (S), в которых внешняя нормаль образует острый угол с вектором поля $\vec{a}$ (нормаль к поверхности направлена в сторону вытекания жидкости), а поверхность (S_2) – совокупность точек, для которых угол между $\vec{n}$ и $\vec{a}$ – тупой (нормаль направлена в сторону, противоположную втеканию жидкости).

В соответствии с этим

$$\Phi_1 = \iint\limits_{(S_1)} (\vec{a}, \vec{n}_0)\, dS$$

– количество жидкости, которая вытекла из объёма V через поверхность S_1, а

$$\Phi_2 = \iint\limits_{(S_2)} (\vec{a}, \vec{n}_0)\, dS$$

– количество жидкости, которая втекла через поверхность S_2 в объём V. Очевидно, что $\Phi_1 > 0$, а $\Phi_2 < 0$. Так как

$$\iint\limits_{(S)} (\vec{a}, \vec{n}_0) dS = \iint\limits_{(S_1)} (\vec{a}, \vec{n}_0) dS + \iint\limits_{(S_2)} (\vec{a}, \vec{n}_0) dS = \Phi_1 + \Phi_2,$$

то получим, что поверхностный интеграл

$$\iint\limits_{(S)} (\vec{a}, \vec{n}_0) dS,$$

определяющий поток вектора $\vec{a}$ через замкнутую поверхность, представляет собой количество жидкости, вытекшей (за единицу времени) из объёма V, ограниченного поверхностью (S).

Таким образом, если поток через замкнутую поверхность (S) отличен от нуля, то количество втекающей в объём V и вытекающей из него (в единицу времени) жидкости различен. Когда этот поток положителен, то $|\Phi_1| > |\Phi_2|$ и жидкости больше вытекает, чем втекает. Это возможно только тогда, когда внутри объёма V существуют источники, питающие поток, т.е. такие места, где жидкость каким-то образом создается (например, трубочки, из которых выбрасывается дополнительная жидкость, куски тающего льда и т.д.). Наоборот, если поток вектора отрицателен, то $|\Phi_1| < |\Phi_2|$, т.е. количество вытекающей жидкости меньше количества втекающей. Следовательно, внутри объёма имеются стоки, поглощающие излишек жидкости (она замерзает, испаряется и т.д.).

Если в объёме V нет ни источников, ни стоков или же они взаимно компенсируются, то количество жидкости, втекающей в объём и вытекающей из него, равны друг другу, $\Phi_1 = \Phi_2$, и поток вектора через замкнутую поверхность S должен быть равен нулю.

Можно сказать, что источники – это точки, откуда начинаются векторные линии, а стоки – точки, где векторные линии заканчиваются.

В электрическом и магнитном полях источниками будут соответственно положительные заряды или северный полюс магнита, а стоками – отрицательные заряды или южный полюс.

26.2. Дивергенция векторного поля

Пусть вектор $\vec{a}$ характеризует некоторое векторное поле, представляющее собой поле скоростей несжимаемой жидкости. И пусть поток этого вектора через замкнутую поверхность (S), ограничивающую объём V, отличен от нуля:

$$\Phi(V) = \iint\limits_{(S)} (\vec{a}, \vec{n}_0) dS \neq 0.$$

Тогда следует признать, что внутри объёма V есть либо источники (если $\Phi > 0$), либо стоки (если $\Phi < 0$), либо и то и другое, но только при $\Phi > 0$ общая обильность (интенсивность) источников превосходит обильность стоков, а при $\Phi < 0$ – наоборот. Если же $\Phi = 0$, то либо в объёме V нет ни источников, ни стоков, либо же имеется в наличии такое количество источников и стоков, что их общая обильность равна нулю.

Итак, величина потока характеризует обильность источников и стоков суммарно, по всему объёму V, что не всегда удобно. Поэтому, чтобы получить характеристику обильности источника (стока) в каждой отдельной точке, вводится в рассмотрение локальная (точечная) характеристика векторного поля.

Если поток вектора $\vec{a}$ через замкнутую поверхность S отнести к объёму V, ограниченному этой поверхностью:

$$\frac{1}{V}\iint\limits_{(S)}(\vec{a},\vec{n}_0)dS, \tag{26.4}$$

то получим среднюю объёмную плотность потока через S или среднюю плотность источников и стоков, распределенных в объёме.

Стягивая поверхность (S) к некоторой фиксированной точке M внутри объёма, т.е. переходя к пределу, получим

$$\lim_{\substack{V\to 0\\(S)\to M}}\frac{1}{V}\iint\limits_{(S)}(\vec{a},\vec{n}_0)dS. \tag{26.5}$$

Если этот предел существует, то он будет характеризовать векторное поле уже в самой точке M.

Этот предел, представляющий собой плотность потока вектора $\vec{a}$ в точке M, получил название дивергенции (от латинского *divergentia* – расходимость).

♦ Конечный предел отношения потока векторного поля $\vec{a}$ через замкнутую поверхность S (охватывающую точку M) к объёму V, ограниченному этой поверхностью, при условии, что поверхность S неограниченно стягивается в точку M, называется дивергенцией векторного поля $\vec{a}$ в точке M и обозначается символом $\operatorname{div}\vec{a}(M)$:

$$\operatorname{div}\vec{a}(M) = \lim_{\substack{V\to 0\\(S)\to M}}\frac{1}{V}\iint\limits_{(S)}(\vec{a},\vec{n}_0)dS. \tag{26.6}$$

Из определения видно, что дивергенция векторного поля $\vec{a}$ – скалярная величина, не зависящая от выбора системы координат. По знаку этой величины можно судить о наличии источника или стока в точке M. Если $\operatorname{div}\vec{a}(M) > 0$, то в точке M существует источник, а если $\operatorname{div}\vec{a}(M) < 0$, то в точке M – сток.

Абсолютная величина $|\operatorname{div}\vec{a}|$ характеризует плотность потока в данной точке или мощность источника (стока).

На вопрос о существовании и вычислении дивергенции отвечает следующая теорема.

Теорема 26.1. *Если проекции a_x, a_y, a_z вектора $\vec{a}$ непрерывны в области (D) и имеют непрерывные частные производные*

$$\frac{\partial a_x}{\partial x},\quad \frac{\partial a_y}{\partial y},\quad \frac{\partial a_z}{\partial z},$$

то $\operatorname{div}\vec{a}$ существует во всех точках области (D) и вычисляется по формуле

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \tag{26.7}$$

Доказательство. Пусть $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – направляющие косинусы внешней нормали к поверхности (S). Тогда

$$\iint\limits_{(S)} (\vec{a}, \vec{n}_0) dS = \iint\limits_{(S)} [a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma] dS. \tag{26.8}$$

Воспользовавшись формулой Остроградского, запишем правую часть:

$$\iiint\limits_{(V)} \Big(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\Big) dV = \iint\limits_{(S)} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) dS. \tag{26.9}$$

При $P = a_x$, $Q = a_y$, $R = a_z$ она преобразуется в тройной интеграл по объёму (V):

$$\iint\limits_{(S)} (\vec{a}, \vec{n}_0) dS = \iiint\limits_{(V)} \Big(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\Big) dV,$$

откуда по теореме о среднем значении получим

$$\iint\limits_{(S)} (\vec{a}, \vec{n}_0) dS = \Big(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\Big)\Big|_{M^*} \iiint\limits_{(V)} dV =$$
$$= \Big(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\Big)\Big|_{M^*} V, \tag{26.10}$$

где M^* есть некоторая точка внутри (V). Если поверхность (S) стягивается к точке M, то $M^* \to M$, и тогда

$$\operatorname{div}\vec{a} = \lim_{\substack{(S)\to M \\ V\to 0}} \frac{1}{V} \iint\limits_{(S)} (\vec{a}, \vec{n}_0) dS = \lim_{\substack{(S)\to M \\ M^*\to M}} \frac{1}{V} \Big(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\Big)\Big|_{M^*} V =$$
$$= \Big(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\Big)\Big|_{M}. \tag{26.11}$$

Здесь мы воспользовались непрерывностью частных производных.

Тем самым доказано существование дивергенции и получена формула для ее вычисления в декартовой системе координат.

Дивергенция векторного поля, как и градиент скалярного поля, обозначается «символическим вектором» или оператором Гамильтона ∇ (набла – название старинного музыкального инструмента)

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}.$$

Действительно, дивергенцию формально можно рассматривать как скалярное произведение «вектора» ∇ на вектор $\vec{a}$:

$$(\nabla, \vec{a}) = \Big(\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\Big)(a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}) =$$
$$= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \operatorname{div}\vec{a}.$$

Поэтому вместо $\operatorname{div}\vec{a}$ можно записать

$$\operatorname{div}\vec{a} = (\nabla, \vec{a}). \tag{26.12}$$

Приведем свойства операции дивергенция, широко используемые для её?? вычисления, которые следуют из соотношения (26.11).

Свойство 1. Дивергенция постоянного вектора равна нулю: $\operatorname{div}\vec{c}=0$, где $\vec{c}=c_1\vec{\imath}+c_2\vec{\jmath}+c_3\vec{k}$ – постоянный вектор.

Действительно,

$$\operatorname{div}\vec{c}=\operatorname{div}(c_1\vec{\imath}+c_2\vec{\jmath}+c_3\vec{k})=\frac{\partial c_1}{\partial x}+\frac{\partial c_2}{\partial y}+\frac{\partial c_3}{\partial z}=0.$$

Свойство 2. Постоянный множитель можно выносить за знак дивергенции, т.е. $\operatorname{div}C\vec{a}=C\operatorname{div}\vec{a}$, где C – постоянный скаляр.

Действительно,

$$\operatorname{div}C\vec{a}=\operatorname{div}(Ca_x\vec{\imath}+Ca_y\vec{\imath}+Ca_z\vec{k})=C\frac{\partial a_x}{\partial x}+C\frac{\partial a_y}{\partial y}+C\frac{\partial a_z}{\partial z}=C\operatorname{div}\vec{a}.$$

Свойство 3. Дивергенция суммы векторных полей равна сумме дивергенций, т.е. $\operatorname{div}(\vec{a}\pm\vec{b})=\operatorname{div}\vec{a}\pm\operatorname{div}\vec{b}$.

Доказывается аналогично.

Свойство 4. Дивергенция произведения векторного поля на скалярное определяется выражением $\operatorname{div}(\varphi\vec{a})=\varphi\operatorname{div}\vec{a}+(\operatorname{grad}\varphi,\vec{a})$ или в операторной форме $\nabla(\varphi\vec{a})=\varphi(\nabla,\vec{a})+(\vec{a},\nabla\varphi)$, где φ – скалярная функция.

Действительно,

$$\begin{gathered}\operatorname{div}\varphi\vec{a}=\frac{\partial(\varphi a_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\varphi a_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\varphi a_z)}{\partial z}=\\
=\varphi\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}a_x+\varphi\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}a_y+\varphi\frac{\partial a_z}{\partial z}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}a_z=\\
=\varphi\Big(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\Big)+\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x}a_x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}a_y+\frac{\partial\varphi}{\partial x}a_z\Big)=\varphi\operatorname{div}\vec{a}+(\operatorname{grad}\varphi,\vec{a}),\end{gathered}$$

что и требовалось доказать.

Свойство 5. Дивергенция радиус-вектора равна трем ($\operatorname{div}\vec{r}=3$).

Действительно,

$$\operatorname{div}\vec{r}=\operatorname{div}(x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k})=\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}=3.$$

Свойство 6. Дивергенция от векторного произведения постоянного вектора на радиус-вектор равна нулю: $\operatorname{div}[\vec{c}\times\vec{r}]=0$.

Действительно,

$$\begin{gathered}\operatorname{div}[\vec{c}\times\vec{r}]=\operatorname{div}\begin{vmatrix}\vec{\imath}&\vec{\jmath}&\vec{k}\\ c_x&c_y&c_z\\ z&y&z\end{vmatrix}=\\
=\operatorname{div}[\vec{\imath}(c_yz-c_zy)+\vec{\jmath}(xc_z-zc_x)+\vec{k}(yc_x-xc_y)]=0,\end{gathered}$$

так как

$$\frac{\partial}{\partial x}(c_yz-c_zy)=0,\quad\frac{\partial}{\partial y}(xc_z-zc_x)=0,\quad\frac{\partial}{\partial z}(yc_x-xc_y)=0.$$

Свойство 7. Дивергенция от произведения постоянного вектора на скалярную функцию равна скалярному произведению этого вектора на градиент скалярного поля: $\operatorname{div}(\vec{c}\varphi) = (\vec{c}, \operatorname{grad}\varphi)$.

Действительно,

$$\operatorname{div}(\vec{c}\varphi) = \operatorname{div}[\varphi c_x\vec{\imath} + \varphi c_y\vec{\jmath} + \varphi c_z\vec{k}] =$$
$$= \frac{\partial(\varphi c_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\varphi c_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\varphi c_z)}{\partial z} = c_x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + c_y\frac{\partial\varphi}{\partial y} + c_z\frac{\partial\varphi}{\partial z} = (\vec{c}, \operatorname{grad}\varphi).$$

26.3. Теорема Остроградского в векторной форме

Пользуясь понятием дивергенции, можно в векторной форме записать формулу Остроградского, которая допускает наглядное физическое истолкование. Действительно, положив в формуле

$$\iint\limits_{(S)} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS = \iiint\limits_{(V)} \Big(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\Big)dV$$

$P = a_x$, $Q = a_y$, $R = a_z$, получим

$$\iint\limits_{(S)} (a_x\cos\alpha + a_y\cos\beta + a_z\cos\gamma)dS = \iiint\limits_{(V)} \Big(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\Big)dV$$

или

$$\iint\limits_{(S)} (\vec{a}, \vec{n}_0)\, dS = \iiint\limits_{(V)} \operatorname{div}\vec{a}\, dV.$$

И теорема Остроградского (в сокращенном виде, без повторения ее условий) может быть сформулирована следующим образом:

Теорема 26.2. *Поток поля $\vec{a}$ через замкнутую поверхность (S) равен тройному интегралу от дивергенции вектора $\vec{a}$ по области (V), ограниченной этой поверхностью:*

$$\iint\limits_{(S)} (\vec{a}, \vec{n}_0)\, dS = \iiint\limits_{(V)} \operatorname{div}\vec{a}\, dV. \tag{26.13}$$

Заметим, что формулу Остроградского при вычислении потока Φ следует применять в том случае, когда вычисление

$$\iiint\limits_{(V)} \operatorname{div}\vec{a}\, dV$$

проще, чем вычисление поверхностного интеграла

$$\iint\limits_{(S)} (\vec{a}, \vec{n}_0)\, dS.$$

Пример 26.1. Вычислить поток вектора $\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ через полную поверхность цилиндра радиуса R и высоты H.

Решение. Воспользуемся формулой Остроградского (26.13). Дивергенцию $\operatorname{div}\vec{a}$ найдем по формуле

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Если $a_x = x$, $a_y = y$, $a_z = z$, то

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial a_y}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial a_z}{\partial z} = 1$$

и $\operatorname{div}\vec{a} = 3$. Поэтому поток вектора

$$\Phi = \iint\limits_{(S)} (\vec{a}, \vec{n}_0) dS = \iiint\limits_{(V)} \operatorname{div}\vec{a}\, dV = \iiint\limits_{(V)} 3dV = 3V = 3\pi R^2 H.$$

27. Циркуляция и ротор векторного поля

27.1. Циркуляция векторного поля

Линейный интеграл от вектора $\vec{a}(N)$ играет большую роль в векторном анализе.

Пусть в области (D), в которой задано векторное поле $\vec{a}$, имеется гладкая (или кусочно-гладкая) кривая L. Эту кривую можно рассматривать как годограф некоторой вектор-функции от параметра t: $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Определим работу силы $\vec{a}$ вдоль этой кривой.

На кривой L возьмем точки A и B, которые определяют дугу AB. В направлении от A к B разобьем эту дугу на n произвольных элементарных частей (дуг). На каждой из них выберем по точке N_k, определим значение вектора $\vec{a}$ в этой точке $\vec{a}(N_k)$ и составим скалярное произведение

$$(\vec{a}(N_k), \Delta\vec{r}_k),$$

где $\Delta\vec{r}_k$ – приращение радиус-вектора $\vec{r}$. Запишем сумму всех таких произведений:

$$\sum_{k=1}^{n} (\vec{a}(N_k), \Delta\vec{r}_k).$$

В предположении, что наибольший из диаметров δ всех элементарных частей дуги L стремится к нулю, запишем

$$\lim_{\delta\to 0} \sum_{k=1}^{n} (\vec{a}(N_k), \Delta\vec{r}_k).$$

Такой предел, если он существует, называют линейным интегралом от векторной функции $\vec{a}$ по дуге AB и обозначают

$$\int\limits_{(\breve{AB})} (\vec{a}, d\vec{r}) \quad \text{или} \quad \int\limits_{L} (\vec{a}, d\vec{r}) \quad \text{или} \quad \int\limits_{AB} (\vec{a}, dS),$$

где S – касательная.

♦ Линейным интегралом вектора $\vec{a}$ вдоль дуги AB кривой L называют предел суммы

$$\sum_{k=1}^{n} (\vec{a}(N_k), \Delta\vec{r}_k)$$

при условии, что $\delta \to 0$.

Итак,

$$\int\limits_{(\breve{AB})} (\vec{a}, d\vec{r}) = \lim_{\delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} (\vec{a}(N_k), \Delta\vec{r}_k). \qquad (27.1)$$

Из определения следует, что линейный интеграл есть скалярная величина.

Существуют и другие формы записи линейный интеграл вектора (27.1) .

1. Так как

$$\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}, \quad \Delta\vec{r} = \Delta x\vec{\imath} + \Delta y\vec{\jmath} + \Delta z\vec{k},$$

то скалярное произведение

$$(\vec{a}, \Delta\vec{r}) = a_x\Delta x + a_y\Delta y + a_z\Delta z$$

и

$$\sum(\vec{a}, \Delta\vec{r}) = \sum a_x\Delta x + a_y\Delta y + a_z\Delta z.$$

Следовательно, линейный интеграл сводится к криволинейному интегралу второго рода (по координатам)

$$I = \int\limits_{(AB)} (\vec{a}, d\vec{r}) = \int\limits_{(AB)} a_x dx + a_y dy + a_z dz. \qquad (27.2)$$

Если этот криволинейный интеграл второго рода не существует, то не существует и линейный интеграл.

2. Так как вектор $d\vec{r}$ и единичный вектор $\vec{s}_0$ касательной к кривой коллинеарны и $|d\vec{r}| = dS$, то $d\vec{r} = \vec{s}_0 dS$. Тогда

$$(\vec{a}, d\vec{r}) = (\vec{a}, \vec{s}_0)\, dS = a_s\, dS,$$

где a_s – проекция вектора $\vec{a}$ на касательную. Тогда линейный интеграл запишется следующим образом:

$$I = \int\limits_{(AB)} (\vec{a}, d\vec{r}) = \int\limits_{(AB)} a_s\, dS. \qquad (27.3)$$

Если $\alpha < \pi/2$, то $I > 0$; если $\alpha > \pi/2$, то $I < 0$; если $\alpha = \pi/2$, то $I = 0$. Таким образом, линейный интеграл вектора $\vec{a}$ по дуге AB кривой L равен криволинейному интегралу второго рода от проекции вектора $\vec{a}$ на касательную к кривой AB.

Линейный интеграл обладает обычными свойствами криволинейных интегралов второго рода. При перемене направления линии L интеграл меняет знак.

Выясним физический смысл линейного интеграла. Если векторное поле $\vec{a}$ – силовое, то линейный интеграл

$$\int\limits_{(AB)} (\vec{a}, d\vec{r})$$

равен работе, совершаемой полем, когда точка, на которую действует сила, проходит дугу AB линии L.

♦ Линейный интеграл вектора $\vec{a}$, взятый по замкнутой кривой L, называется циркуляцией вектора $\vec{a}$ вдоль кривой и обозначается

$$C = \oint\limits_{(L)} (\vec{a}, d\vec{r}).$$

Циркуляцию вектора $\vec{a}$ вдоль кривой L можно записать одним из интегралов

$$C = \oint\limits_{(L)} (\vec{a}, d\vec{r}) = \oint\limits_{(L)} a_s\, dS = \oint\limits_{(L)} (a_x dx + a_y dy + a_z dz). \tag{27.4}$$

Выясним физический смысл циркуляции. Будем интерпретировать поле $\vec{a}$ как поле скоростей $\vec{v} = \vec{v}(M)$ текущей жидкости. Поместим в это поле колесико с лопастями по его окружности.

Частицы жидкости, действуя на эти лопасти, будут создавать вращательные моменты, суммарное действие которых приведет колесико во вращение вокруг своей оси. Вращательное действие поля скоростей жидкости будет в каждой точке M характеризоваться проекцией вектора $\vec{v}(M)$ на касательную $\vec{s}_0$ к окружности (L), т.е. скалярным произведением $(\vec{v}, \vec{s}_0)$. Суммирование вращательных действий жидкости по всему контуру приводит к понятию циркуляции вектора $\vec{a} = \vec{v}$. При этом абсолютная величина циркуляции будет определять угловую скорость вращения колесика, а знак циркуляции покажет, в какую сторону вращается колесико относительно выбранного направления.

Пример 27.1. Найти линейный интеграл вектора $\vec{a} = x^3\vec{\imath} - y^3\vec{\jmath}$ вдоль первой четверти окружности $\vec{r} = a\cos t\vec{\imath} + a\sin t\vec{\jmath}$.

Решение. Так как

$$d\vec{r} = (-a\sin t\vec{\imath} + a\cos t\vec{\jmath})dt,$$

то вычислять интеграл будем по формуле

$$I = \int\limits_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \int\limits_0^{\pi/2} (x^3\vec{\imath} - y^3\vec{\jmath})(-a\sin t\vec{\imath} + a\cos t\vec{\jmath})dt.$$

На окружности $x = a\cos t$, $y = a\sin t$ вектор

$$\vec{a} = a^3\cos^3 t\vec{\imath} - a^3\sin^3 t\vec{\jmath}.$$

Тогда линейный интеграл (27.3)

$$I = \int\limits_L \vec{a}\, d\vec{r} = \int\limits_0^{\pi/2} (a^3\cos^3 t\vec{\imath} - a^3\sin^3 t\vec{\jmath})(-a\sin t\vec{\imath} + a\cos t\vec{\jmath})dt =$$

$$= a^4 \int\limits_0^{\pi/2} (-\cos^3 t\sin t - \sin^3 t\cos t)dt = -a^4 \int\limits_0^{\pi/2} \sin t\cos t\, dt =$$

$$= -a^4 \frac{\sin^2 t}{2}\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{a^4}{2}.$$

27.2. Ротор векторного поля

Наряду с дивергенцией большое значение имеет другая дифференциальная характеристика векторного поля – вихрь.

Пусть в некоторой области (D) задано поле вектора $\vec{a}(M)$. В поле этого вектора рассмотрим точку M и произвольный единичный вектор $\vec{n}_0$, выходящий из точки M. Через точку M проведем плоскость P, перпендикулярную вектору $\vec{n}_0$. В этой плоскости очертим некоторый замкнутый контур L, окружающий точку M. Положительное направление обхода по контуру L выберем в соответствии с выбранным направлением нормали $\vec{n}_0$ (на рис. ??? указано стрелкой). Вычислим циркуляцию вектора $\vec{a}$ по контуру L:

$$C = \oint\limits_{(L)} (\vec{a}, d\vec{r}).$$

Пусть S – площадь фигуры, ограниченной контуром L. Составим отношение

$$\frac{1}{S}\oint\limits_{(L)} (\vec{a}, d\vec{r}). \qquad (27.5)$$

Это отношение называется средней плотностью циркуляции по плоскому контуру L. Оно характеризует интенсивность движения жидкости вдоль этого замкнутого контура.

Стягивая область (S) к точке M и переходя к пределу, получим

$$\lim_{(S)\to M}\frac{1}{S}\oint\limits_{(L)} (\vec{a}, d\vec{r}). \qquad (27.6)$$

Из гидродинамики известен физический смысл формулы (27.6). Она характеризует интенсивность вращательного движения жидкости в точке M плоскости P.

Если существует конечный предел (27.6), то он называется плоскостной плотностью циркуляции в точке M:

$$\mu(M, \vec{n}_0) = \lim_{(S)\to M}\frac{1}{S}\oint\limits_{(L)} (\vec{a}, d\vec{r}). \qquad (27.7)$$

Пусть в области (D), в которой определено поле вектора $\vec{a}$, выбрана декартова система координат. Найдем выражение для плоскостной плотности циркуляции в любой точке M области (D) и для любой плоскости P, считая, что векторная функция $\vec{a}$ и ее частные производные

$$\frac{\partial a_x}{\partial x}, \quad \frac{\partial a_y}{\partial y}, \quad \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

непрерывны в области (D).

Представим циркуляцию вектора $\vec{a}$ вдоль контура L интегралом

$$\oint\limits_{(L)} a_x dx + a_y dy + a_z dz \qquad (27.8)$$

и преобразуем криволинейный интеграл в поверхностный, воспользовавшись формулой Стокса:

$$\oint\limits_{(L)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$
$$= \iint\limits_{(S)} \Big[\Big(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\Big)\cos\alpha + \Big(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\Big)\cos\beta + \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\cos\gamma\Big] dS$$

или запишем его следующим образом:

$$\oint\limits_{(L)} a_x dx + a_y dy + a_z dz = \iint\limits_{(S)} \Big[\Big(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\Big)\cos\alpha +$$
$$+\Big(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\Big)\cos\beta + \Big(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\Big)\cos\gamma\Big] dS = \iint\limits_{(S)} f(N)\,dS, \tag{27.9}$$

где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – направляющие косинусы нормали к плоскости P, в которой расположены контур L и ограниченная им площадка S.

Обозначив подынтегральную функцию через $f(N)$ и применив теорему о среднем значении, последнюю формулу можно записать как

$$\oint\limits_{(L)} (\vec{a}, d\vec{r}) = \iint\limits_{(S)} f(N) dS = f(M^*) \iint\limits_{(S)} dS = f(M^*)S, \tag{27.10}$$

где M^* – некоторая точка внутри (S). В этом случае в силу непрерывности функции $f(N)$

$$\mu(M, \vec{n}_0) = \frac{1}{S} \lim_{(S)\to M} \oint\limits_{(S)} (\vec{a}, d\vec{r}) = \lim_{\substack{(S)\to M \\ M^*\to M}} \frac{f(M^*)S}{S} = f(M). \tag{27.11}$$

Таким образом, плотность циркуляции равна

$$\mu(M, \vec{n}_0) = f(M) = \Big(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\Big)\cos\alpha +$$
$$+\Big(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\Big)\cos\beta + \Big(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\Big)\cos\gamma. \tag{27.12}$$

Правую часть (27.12) можно рассматривать как скалярное произведение двух векторов: орта нормали

$$\vec{n}_0 = \cos\alpha\vec{\imath} + \cos\beta\vec{\jmath} + \cos\gamma\vec{k}$$

и вектора

$$\vec{W} = \Big(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\Big)\vec{\imath} + \Big(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\Big)\vec{\jmath} + \Big(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\Big)\vec{k},$$

и тогда плотность циркуляции в точке M запишется в виде

$$\mu(M, \vec{n}_0) = (\vec{W}, \vec{n}_0) = |\vec{W}|\,|\vec{n}_0|\cos\theta = |\vec{W}| \cdot 1 \cdot \cos\theta, \tag{27.13}$$

где θ – угол между векторами $\vec{W}$ и $\vec{n}_0$.

Из формулы (27.13) видно, что по разным направлениям плотность циркуляции вектора $\vec{a}$ различна и принимает наибольшее значение, когда $\theta = 0$ ($\cos\theta = 1$), т.е. плотность циркуляции в точке M наибольшая для того направления нормали, которое совпадает с направлением вектора $\vec{W}$.

Этот вектор $\vec{W}$ называется вихрем векторного поля в точке M и обозначается $\operatorname{rot}\vec{a}$ (*rotate* лат. - вращать).

♦ Вихрем или ротором векторного поля $\vec{a}$ называется вектор $\operatorname{rot}\vec{a}$, проекции которого на координатные оси выражаются формулами

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}_x\vec{a} &= \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z};\\
\operatorname{rot}_y\vec{a} &= \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x};\\
\operatorname{rot}_z\vec{a} &= \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}.
\end{aligned} \tag{27.14}$$

Итак, вихрь (ротор) векторного поля есть вектор

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \Big(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\Big)\vec{\imath} + \Big(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\Big)\vec{\jmath} + \Big(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\Big)\vec{k} \tag{27.15}$$

или в символической форме

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \nabla\times\vec{a}. \tag{27.16}$$

Для плоского поля $\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath}$ формула для вихря имеет вид

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \Big(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\Big)\vec{k}. \tag{27.17}$$

Заметим, что вектор $\operatorname{rot}\vec{a}$, вообще говоря, не зависит от выбора системы координат. Рассуждения о наибольшей плотности циркуляции позволяют дать такое определение вихря:

♦ Вихрем векторного поля $\vec{a}$ в точке M называется вектор $\operatorname{rot}\vec{a}$, направленный так, что для перпендикулярной к нему плоскости плотность циркуляции в точке M будет наибольшей, а по длине равный этой наибольшей плотности циркуляции.

27.3. Основные формулы для вычисления вихря векторного поля

В этом разделе мы приведем наиболее используемые формулы для вихря векторного поля.

Свойство 1. Ротор постоянного вектора равен нулю:

$$\operatorname{rot}\vec{c} = 0,$$

где $\vec{c} = c_1\vec{\imath} + c_2\vec{\jmath} + c_3\vec{k}$ – постоянный вектор, а c_1, c_2, c_3 – постоянные.

Действительно,

$$\operatorname{rot}\vec{c} = \operatorname{rot}(c_1\vec{\imath} + c_2\vec{\jmath} + c_3\vec{k}) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Свойство 2. Постоянный множитель можно выносить за знак ротора, т.е.

$$\operatorname{rot} C\vec{a} = C \operatorname{rot}\vec{a},$$

где C – постоянный скаляр.

Действительно,

$$\operatorname{rot} C\vec{a} = \operatorname{rot}(Ca_x\vec{\imath} + Ca_y\vec{\jmath} + Ca_z\vec{k}) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ Ca_x & Ca_y & Ca_z \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{\partial Ca_x}{\partial y}\vec{k} - \frac{\partial Ca_z}{\partial x}\vec{\jmath} - \frac{\partial Ca_y}{\partial z}\vec{\imath} + \frac{\partial Ca_z}{\partial y}\vec{\imath} + \frac{\partial Ca_x}{\partial z}\vec{\jmath} + \frac{\partial Ca_y}{\partial x}\vec{k} =$$

$$= C\Big[\Big(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\Big)\vec{\imath} + \Big(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\Big)\vec{\jmath} + \Big(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\Big)\vec{k}\Big] = C\operatorname{rot}\vec{a},$$

что и требовалось доказать.

Свойство 3. Ротор суммы векторов равен сумме роторов:

$$\operatorname{rot}(\vec{a} \pm \vec{b}) = \operatorname{rot}\vec{a} \pm \operatorname{rot}\vec{b}.$$

Действительно,

$$\operatorname{rot}(\vec{a} + \vec{b}) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x + b_x & a_y + b_y & a_z + b_z \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \operatorname{rot}\vec{a} + \operatorname{rot}\vec{b}.$$

Свойство 4. Ротор произведения вектора на скалярную функцию определяется соотношением

$$\operatorname{rot}(\varphi\vec{a}) = \varphi \operatorname{rot}\vec{a} + \operatorname{grad}\varphi\vec{a},$$

или в операторной форме

$$\nabla \times (\varphi\vec{a}) = \varphi\nabla \times \vec{a} + \nabla\varphi \times \vec{a}.$$

Свойство 5. Ротор от векторного произведения постоянного вектора на радиус-вектор равен

$$\operatorname{rot}[\vec{c} \times \vec{r}] = 2\vec{c},$$

где

$$\vec{c} = c_1\vec{\imath} + c_2\vec{\jmath} + c_3\vec{k}$$

– постоянный вектор, а

$$\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}.$$

Действительно,

$$\vec{c}\times\vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} =$$

$$= c_2 z\vec{\imath} + c_3 x\vec{\jmath} + c_1 y\vec{k} - c_2 x\vec{k} - c_1 z\vec{\jmath} - c_3 y\vec{\imath} =$$

$$= (c_2 z - c_3 y)\vec{\imath} + (c_3 x - c_1 z)\vec{\jmath} + (c_1 y - c_2 x)\vec{k}.$$

Тогда

$$\operatorname{rot}(\vec{c}\times\vec{r}) = \operatorname{rot}[(c_2 z - c_3 y)\vec{\imath} + (c_3 x - c_1 z)\vec{\jmath} + (c_1 y - c_2 x)\vec{k}] =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ c_2 z - c_3 y & c_3 x - c_1 z & c_1 y - c_2 x \end{vmatrix} = 2c_1\vec{\imath} + 2c_2\vec{\jmath} + 2c_3\vec{k} = 2\vec{c}.$$

Свойство 6. Ротор радиус-вектора равен нулю:

$$\operatorname{rot}\vec{r} = 0,$$

где

$$\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}.$$

Действительно,

$$\operatorname{rot}\vec{r} = \operatorname{rot}(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

что и требовалось доказать.

Свойство 7. Справедливо соотношение

$$\operatorname{rot} f(r)\vec{r} = 0.$$

Справедливость этого соотношения вытекает из формул 4) и $\operatorname{rot}\vec{r} = 0$.

Из формул 2) и 3) видно, что вихрь есть линейный оператор, ставящий в соответствие данному вектору $\vec{a}$ некоторый другой вектор

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

В произвольном («абстрактном») векторном поле оператор $\operatorname{rot}\vec{a}$ имеет лишь геометрическую характеристику (см. определение 2); в конкретных векторных полях вихрь может иметь некоторый иной физический или геометрический смысл. Например, в электромагнитном поле вихрь вектора электрической напряженности $\vec{E}$ имеет простой физический смысл, а именно:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = \mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t},$$

где μ – постоянная; t – время; $\vec{H}$ – вектор магнитной напряженности.

С помощью вихря (rot) можно дать простое выражение для $\operatorname{div}[\vec{a},\vec{b}]$:

Свойство 8. Справедливо соотношение

$$\operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{b}, \operatorname{rot}\vec{a}) - (\vec{a}, \operatorname{rot}\vec{b}).$$

Действительно,

$$\operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{b}] = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix},$$

поскольку

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

27.4. Теорема Стокса в векторной форме

Если в формуле Стокса положить $P = a_x$, $Q = a_y$, $R = a_z$ и учесть формулы

$$\oint\limits_{(L)} (\vec{a}, d\vec{r}) = \oint\limits_{(L)} a_x dx + a_y dy + a_z dz$$

и

$$\oint\limits_{(L)} a_x dx + a_y dy + a_z dz = \iint\limits_{(S)} \Big[\Big(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\Big)\cos\alpha +$$
$$+\Big(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\Big)\cos\beta + \Big(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\Big)\cos\gamma\Big]dS,$$

то получим

$$\oint\limits_{(L)} (\vec{a}, d\vec{r}) = \iint\limits_{(S)} (\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{n}_0) dS = \iint\limits_{(S)} \operatorname{rot}_{\vec{n}_0}\vec{a}\, dS. \tag{27.18}$$

Следовательно, справедлива

Теорема 27.1 (теорема Стокса в векторной форме). *Пусть справедливы??? условия теоремы Стокса. Тогда циркуляция вектора $\vec{a}$ вдоль некоторого замкнутого контура L равна потоку вихря этого вектора через любую поверхность (S), опирающуюся на этот контур* (27.18).

◊ В силу того, что для плоского поля

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \Big(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\Big)\vec{k}$$

и в этом случае $\vec{n} = \vec{k}$, формула Стокса имеет вид

$$\oint\limits_{(L)} a_x dx + a_y dy = \iint\limits_{(S)} \Big(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\Big)dS.$$

Эта формула является частным случаем формулы Стокса и называется формулой Грина (1793–1841 гг., английский математик).

28. Условие независимости линейного интеграла от пути интегрирования в пространстве

Ранее было установлено, что если подынтегральная функция представляет собой полный дифференциал, то криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования в случае плоского поля.

Такое поле называют плоским потенциальным полем.

По формуле Грина

$$\int\limits_{(L)} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{G} \Big(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\Big) dS$$

условие ??? полного дифференциала $du = a_x dx + a_y dy$ имеет вид

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Понятие ротора непосредственно связано с определениями потенциального и соленоидального полей. Потенциальным векторным полем назовем поле, представимое в виде градиента некоторого скалярного поля.

♦ Векторное поле $\vec{a}(M)$ называется безвихревым, если

$$\operatorname{rot}\vec{a}(M) = 0, \quad M \in ???.$$

♦ Функция $u(M)$, удовлетворяющая условию $\vec{a}(M) = \nabla u(M)$, называется потенциалом поля $\vec{a}$, а само поле называется потенциальным.

♦ Область G называется поверхностно односвязной, если на любой замкнутый контур γ, лежащий в G, можно натянуть поверхность, целиком лежащую в G.

Теорема 28.1. *Пусть в поверхностной односвязной области G задано непрерывное векторное поле $\vec{a}(M)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *циркуляция вектора $\vec{a}$ по любому замкнутому контуру равна нулю;*
2) *значение интеграла*

$$\int\limits_{\breve{AB}} (\vec{a}, d\vec{r})$$

не зависит от кривой $\breve{AB}$, соединяющей любые две точки A и B, если $\breve{AB} \in G$;

3) *существует функция $u(\vec{x})$ такая, что $\vec{a}(\vec{x}) = \nabla u(\vec{x})$,*

$$du = a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz;$$

4) *векторное поле является безвихревым, т.е.* $\operatorname{rot}\vec{a} = 0$.

Таким образом, выполнение одного из этих условий необходимо и достаточно для выполнения любого из оставшихся условий.

Доказательство проведем по схеме $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$.

I. $1 \to 2$. Пусть A и B – произвольные фиксированные точки в области G. $A\breve{C}B$ и $A\breve{D}B$ – две произвольные гладкие кривые, соединяющие эти точки (рис. 11), а $A\breve{C}B + A\breve{D}B = \Gamma$ – замкнутая кривая. По условию

$$\oint\limits_{\Gamma} (\vec{a}(\vec{x}), d\vec{r}) = 0,$$

т.е.

$$\int\limits_{A\breve{C}B} (\vec{a}, d\vec{r}) = -\int\limits_{A\breve{D}B} (\vec{a}, d\vec{r}) = \int\limits_{B\breve{D}A} (\vec{a}, d\vec{r}).$$

II. $2 \to 3$. Пусть M_0 – фиксированная точка, а M – произвольная точка области G. Обозначим через $M_0\breve{\ }M$ произвольную кривую M_0M. Интеграл

Рис. 11

$$u(M) = \int\limits_{M_0\breve{\ }M} (\vec{a}, d\vec{r})$$

не зависит от кривой $M_0\breve{\ }M$ и определяет функцию, заданную в области G. Покажем, что

$$\operatorname{grad} u(M) = \vec{a}(M).$$

$M = (x, y, z)$, $N = (x + \Delta x, y, z)$???

$$\Delta_x u = u(N) - u(M) = \int\limits_{M_0\breve{\ }N} (\vec{a}, d\vec{r}) - \int\limits_{M_0\breve{\ }M} (\vec{a}, d\vec{r}) = \int\limits_{M\breve{\ }N} (\vec{a}, d\vec{r}).$$

Пусть отрезок $M\breve{\ }N$ параметрически задан выражением $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [x, x + \Delta x]$. Тогда

$$\Delta_x u = \int\limits_x^{x+\Delta x} (\vec{a}(t), \vec{x}'(t))dt = \int\limits_x^{x+\Delta x} a_1(t, y, z)dt.$$

$$\frac{\partial u(M)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int\limits_x^{x+\Delta x} a_1(t, y, z)dt = a_1(x, y, z).$$

Доказательство $\partial u/\partial y = a_2$ и $\partial u/\partial z = a_3$ аналогично.

III. $3 \to 4$. Пусть $\vec{a}(M) = \operatorname{grad} u(M)$, тогда

$$\operatorname{rot} \vec{a}(M) = \operatorname{rot} \operatorname{grad} u(M) = 0.$$

IV. $4 \to 1$. Пусть $\operatorname{rot} \vec{a}(M) = 0$. Рассмотрим произвольный замкнутый контур γ, тогда

$$\int\limits_\gamma (\vec{a}, d\vec{r}) = \iint\limits_{(S)} (\operatorname{rot} \vec{a}, d\vec{S}) = 0.$$

29. Дифференциальные операции второго порядка

Вычисление градиента, дивергенции и ротора связано с однократным дифференцированием некоторых функций, в силу чего $\operatorname{grad} \varphi$, $\operatorname{div} \vec{a}$, $\operatorname{rot} \vec{a}$ называют дифференциальными операторами теории поля первого порядка. Повторное применение этих операций приводит к необходимости двукратно дифференцировать некоторые функции. Таким образом, приходим к дифференциальным операциям теории поля второго порядка.

Три рассмотренных операции преобразовывают

скалярное поле φ в векторное $\vec{G} = \operatorname{grad}\varphi$ ($\varphi \to \operatorname{grad}\varphi$);
векторное поле $\vec{a}$ в скалярное $u = \operatorname{div}\vec{a}$ ($\vec{a} \to \operatorname{div}\vec{a}$);
векторное поле $\vec{a}$ в векторное $\vec{W} = \operatorname{rot}\vec{a}$ ($\vec{a} \to \operatorname{rot}\vec{a}$):

$$\vec{G} = \operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}; \tag{29.1}$$

$$u = \operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}; \tag{29.2}$$

$$\vec{W} = \operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}. \tag{29.3}$$

Если к новым полям применить те же операции (т.е. применить (29.1)–(29.3) повторно), получим так называемые дифференциальные операции второго порядка (все эти операции линейны и не зависят от выбора системы координат).

Формально таких операций второго порядка девять:

$$\begin{array}{lll} 1)\ \operatorname{grad}\operatorname{grad}\varphi; & 2)\ \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a}; & 3)\ \operatorname{grad}\operatorname{rot}\vec{a}; \\ 4)\ \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi; & 5)\ \operatorname{div}\operatorname{div}\vec{a}; & 6)\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = 0; \\ 7)\ \operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0; & 8)\ \operatorname{rot}\operatorname{div}\vec{a}; & 9)\ \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a}. \end{array}$$

Из этих операций первая, третья, пятая и восьмая не имеют смысла, так как операция grad применима к скалярной функции, а $\operatorname{grad}\operatorname{grad}\varphi$ есть градиент от векторной функции, как и $\operatorname{grad}\operatorname{rot}\vec{a}$. Кроме того, $\operatorname{rot}\operatorname{div}\vec{a}$ есть ротор от скалярной величины, что не имеет смысла.

Таким образом, остается пять векторных дифференциальных операций второго порядка. Особенно важны четвертая, шестая и седьмая, которые мы рассмотрим подробнее.

Рассмотрим шестую операцию и покажем, что $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = 0$.

Запишем это соотношение с помощью вектора набла

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = \nabla(\nabla \times \vec{a}) = (\nabla \times \nabla)\vec{a} = 0, \tag{29.4}$$

так как здесь мы имеем смешанное произведение трех векторов, среди которых два равных.

Действительно, согласно формуле

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

имеем

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = \operatorname{div}\left[\Big(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\Big)\vec{\imath} + \Big(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\Big)\vec{\jmath} + \Big(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\Big)\vec{k}\right] =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\Big) = 0.$$

Рассмотрим седьмую операцию и покажем, что $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0$. По формулам

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}$$

и

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

получим

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = \nabla\times\nabla\varphi = (\nabla\times\nabla)\varphi = 0$$

в силу того, что векторное произведение двух коллинеарных векторов равно нулю.

Рассмотрим теперь четвертую операцию:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \operatorname{div}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

Оператор

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

обычно называется оператором Лапласа, или лапласианом, от скалярной функции φ и обозначается $\Delta\varphi$ или $\nabla^2\varphi$:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \nabla(\nabla\varphi) = \nabla^2\varphi,$$

так как скалярный квадрат символического вектора

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

равен

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

В связи с этим дифференциальное уравнение в частных производных

$$\Delta\varphi = 0 \tag{29.5}$$

или

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \tag{29.6}$$

называется уравнением Лапласа для трехмерного пространства. Уравнение Лапласа — одно из основных уравнений математической физики.

Уравнение вида

$$\Delta\varphi = f(x, y, z), \tag{29.7}$$

где $f(x, y, z)$ – известная функция, называется уравнением Пуассона и также играет важную роль в математической физике.

Для плоского скалярного поля дифференциальное уравнение в частных производных имеет вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0. \tag{29.8}$$

♦ Функция $\Phi(\vec{x})$ называется гармонической в области E, если она непрерывна в области E вместе со своими частными производными до второго порядка включительно и удовлетворяет в этой области уравнению Лапласа.

Примеры гармонических функций в пространстве:

1) любая линейная функция

$$\varphi = ax + by + cz + d;$$

2) $\varphi = xyz$;
3) $\varphi = 1/r$;
4) $\varphi = \dfrac{x}{z+r}$;
5) $\varphi = \dfrac{y}{z+r}$;
6) $\varphi = \ln\dfrac{r-z}{r+z}$.

Примеры гармонических функций на плоскости:
1) любая линейная функция

$$\varphi = ax + by + c;$$

2) $\varphi = xy$;
3) $\varphi = x^2 - y^2$;
4) $\varphi = \operatorname{arctg} y/x$;
5) $\varphi = \ln r$.

Формулы для вычисления лапласиана от скалярной функции

Для доказательства приведенных ниже формул достаточно вычислить лапласиан от рассматриваемой функции или как $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi$, или по формуле (29.5):

1. $\Delta(C\varphi) = C\Delta\varphi$,

$$\Delta(C\varphi) = \frac{\partial^2 C\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C\varphi}{\partial z^2} = C\Delta\varphi,$$

   где C – постоянный скаляр.
2. $\Delta(\varphi + \psi) = \Delta\varphi + \Delta\psi$ (доказывается аналогично);
3. $\Delta(\varphi\psi) = \varphi\Delta\psi + \psi\Delta\varphi + 2\operatorname{grad}\varphi\operatorname{grad}\psi$.
   Записав $\Delta(\varphi\psi)$ в виде

$$\Delta(\varphi\psi) = \operatorname{div}[\operatorname{grad}\varphi\psi],$$

   по известным формулам для вычисления градиента и дивергенции будем иметь

$$\begin{gathered}\Delta(\varphi\psi) = (\nabla, [\varphi\operatorname{grad}\psi + \psi\operatorname{grad}\varphi]) = \\ = \varphi\operatorname{div}(\operatorname{grad}\psi) + \operatorname{grad}\varphi\operatorname{grad}\psi + \psi\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi) + \operatorname{grad}\psi\operatorname{grad}\varphi = \\ = \varphi\Delta\psi + \psi\Delta\varphi + 2\operatorname{grad}\varphi\operatorname{grad}\psi.\end{gathered}$$

4. Лапласиан сложной функции (от одной промежуточной переменной):

$$\Delta f(u) = f'(u)\Delta u + f''(u)(\operatorname{grad} u)^2.$$

5. Лапласиан сферического (трехмерного) поля:

$$\Delta\frac{f(r)}{r} = \frac{f''(r)}{r}. \tag{29.9}$$

Для плоского сферического поля простой формулы типа (29.9) нет. В этом случае лапласиан плоского сферического поля вычисляется по формуле

$$\Delta f(r) = f''(r) + \frac{1}{r} f'(r). \tag{29.10}$$

Рассмотрим, наконец, вторую и девятую операции.

При вычислении $\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a}$ простых выражений, как в предыдущих случая, мы не получим. Эта операция связана с операцией $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a}$.

Сначала введем понятие лапласиана векторного поля. Полученное ранее выражение (29.6) может служить определением лапласиана скалярной функции. Совершенно так же определяется лапласиан от векторной функции $\vec{a}$ (обозначается как $\Delta\vec{a}$ или $\nabla^2\vec{a}$:

$$\Delta\vec{a} = \frac{\partial^2\vec{a}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vec{a}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\vec{a}}{\partial z^2}. \tag{29.11}$$

Подставив сюда разложение вектора $\vec{a}$ по координатным ортам $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$, получим, что определение (29.11) равносильно следующему.

♦ Лапласианом от векторной функции $\vec{a}(x, y, z)$ называется такой вектор, проекции которого на оси координат равны лапласианам от соответствующих проекций вектора $\vec{a}$, т.е.

$$\Delta\vec{a} = \Delta a_x\vec{\imath} + \Delta a_y\vec{\jmath} + \Delta a_z\vec{k}, \tag{29.12}$$

где

$$\Delta a_x = \frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2},$$
$$\Delta a_y = \frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2},$$
$$\Delta a_z = \frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2}.$$

Например,

$$\Delta\vec{r} = \Delta(x)\vec{\imath} + \Delta(y)\vec{\jmath} + \Delta(z)\vec{k} \equiv 0,$$

где

$$\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k},$$

т.е. лапласиан от радиус-вектора $\vec{r}$ равен нулю.

Операция $\Delta\vec{a}$, ставящая в соответствие вектору $\vec{a}$ некоторый вектор $\Delta\vec{a}$, и позволяет связать операции второго порядка $\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a}$ и $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a}$.

$$\Delta\vec{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a}. \tag{29.13}$$

Отсюда видно, что $\Delta\vec{a}$ не зависит от выбора системы координат.

Этот вектор $\Delta\vec{a}$ полезен при изучении специальных векторных полей (например, в теории электромагнитного поля).

Основные формулы для вычисления лапласиана векторного поля, которые доказываются с помощью формулы (29.11) или (29.13):

1) $\Delta C\vec{a} = C\Delta\vec{a}$, где C – постоянный скаляр;
2) $\Delta(\vec{a} + \vec{b}) = \Delta\vec{a} + \Delta\vec{b}$;

3) $\Delta\vec{c}\varphi = \vec{c}\Delta\varphi$, где
$$\vec{c} = c_x\vec{\imath} + c_y\vec{\jmath} + c_z\vec{k}$$
– постоянный вектор;

4) лапласиан «центрального» векторного поля равен
$$\Delta\varphi\vec{r} = \vec{r}\Delta\varphi + 2\,\mathrm{grad}\,\varphi.$$

Уравнение вида $\Delta\vec{a} = 0$ называется векторным уравнением Лапласа, а $\Delta\vec{a} = \vec{b}$, где $\vec{b}$ – известная векторная функция, называется векторным уравнением Пуассона.

Векторное уравнение Лапласа $\Delta\vec{a} = 0$ равносильно трем уравнениям Лапласа для скалярных функций
$$\Delta a_x = 0, \quad \Delta a_y = 0, \quad \Delta a_z = 0,$$
так что проекции вектора $\vec{a}$, удовлетворяющего уравнению Лапласа, оказываются гармоническими.

30. Классификация векторных полей

С помощью операций div (расходимость) и rot (вихрь) векторные поля делятся на следующие классы:

I) потенциальное, или безвихревое, поле – такое, у которого $\mathrm{rot}\,\vec{a} \equiv 0$;

II) соленоидальное (трубчатое) или поле без источников и стоков – такое, у которого $\mathrm{div}\,\vec{a} \equiv 0$;

III) лапласово, или гармоническое, поле – такое, у которого $\mathrm{rot}\,\vec{a} \equiv 0$, $\mathrm{div}\,\vec{a} \equiv 0$;

IV) поле общего вида: $\mathrm{rot}\,\vec{a} \neq 0$, $\mathrm{div}\,\vec{a} \neq 0$.

Рассмотрим каждое поле в отдельности и выявим их свойства.

30.1. Потенциальное поле

Рассмотрим потенциальное (безвихревое) поле – такое, у которого $\mathrm{rot}\,\vec{a} = 0$ во всех точках области (D).

Будем предполагать область (D), в которой задано векторное поле $\vec{a}$, поверхностно-однозначной.

Мы уже показали, что условие $\mathrm{rot}\,\vec{a} = 0$ равносильно трем скалярным условиям
$$\frac{\partial a_z}{\partial y} = \frac{\partial a_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial a_x}{\partial z} = \frac{\partial a_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial a_y}{\partial x} = \frac{\partial a_x}{\partial y}.$$
Выясним, какова связь между векторными полями без вихрей (потенциальными) и скалярными полями.

Поле вектора $\vec{a}$ будет потенциальным тогда и только тогда, когда $\vec{a}$ есть градиент некоторой скалярной функции $u = \varphi(x, y, z)$ в каждой точке области (D), т.е. когда $\vec{a} = \mathrm{grad}\,\varphi$. Действительно, если $\vec{a} = \mathrm{grad}\,\varphi$, то
$$\mathrm{rot}\,\vec{a} = \mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\varphi = 0.$$
Итак, условие $\mathrm{rot}\,\vec{a} \equiv 0$ равносильно условию $\vec{a} = \mathrm{grad}\,\varphi$.

Таким образом, понятие безвихревого (потенциального) поля и поля градиентов некоторой однозначной (скалярной) функции совпадают.

Функция $\varphi(x, y, z)$ называется потенциальной функцией или скалярным потенциалом безвихревого векторного поля.

Отметим некоторые свойства потенциального поля.

Свойство 1. Линейный интеграл от потенциального вектора $\vec{a}$ не зависит от пути интегрирования

$$\int\limits_{(L)} (\vec{a}, d\vec{r}).$$

Это свойство непосредственно следует из теоремы 28.1 и определения линейного интеграла.

Свойство 2. Циркуляция потенциального вектора $\vec{a}$ всегда равна нулю:

$$\oint\limits_{(L)} (\vec{a}, d\vec{r}) = 0.$$

Это свойство непосредственно следует из теоремы 28.1.

♦ Кривая L называется векторной линией векторного поля $\vec{a}(\vec{r})$, $\vec{r} \in E$, если касательная к ней в каждой точке параллельна вектору поля $\vec{a}(\vec{r})$ в точке касания.

Из определения векторной линии и условия параллельности касательной к кривой и заданного вектора следует, что

$$\frac{dx}{a_1(\vec{r})} = \frac{dy}{a_2(\vec{r})} = \frac{dz}{a_3(\vec{r})}. \tag{30.1}$$

Уравнение, определяющее векторные линии, в параметрической форме запишется так:

$$\vec{r}\,' = \vec{a}(\vec{r}). \tag{30.2}$$

♦ Поверхности $u(x, y, z) = C$ называются эквипотенциальными поверхностями потенциального поля.

Свойство 3. Векторные линии потенциального поля ортогональны к эквипотенциальным поверхностям потенциального поля.

В самом деле, вектор $\vec{a}(M) = \nabla u$ ортогонален к поверхности $u(x, y, z) = C$, проходящей через точку M, так как у потенциального поля $\vec{a} = \operatorname{grad} u$, а градиент ортогонален к соответствующей поверхности уровня.

Свойство 4. Векторные линии потенциального поля не могут быть замкнутыми (или в потенциальном поле векторные линии не могут быть замкнутыми).

Действительно, если бы какая-либо векторная линия (L) была замкнутой, то выполнялось бы равенство

$$\oint\limits_{(L)} (\vec{a}, d\vec{r}) = 0.$$

С другой стороны, вычислив циркуляцию поля по замкнутой векторной линии и воспользовавшись при этом формулой (30.2), получим

$$\oint\limits_{(L)} (\vec{a}(\vec{r}), d\vec{r}) = \int\limits_0^t (\vec{a}(\vec{r}(t)), \vec{r}\,'(t))dt = \int\limits_0^t [\vec{a}(\vec{r}(t))]^2 dt > 0.$$

Полученное противоречие и доказывает утверждение.

30.2. Соленоидальное поле

♦ Векторное поле $\vec{a}$ называется соленоидальным, или трубчатым, в области (D), если в каждой точке этой области

$$\operatorname{div}\vec{a} = 0.$$

Таким образом, соленоидальное поле – это поле без источников и стоков.

Теорема 30.1. *Для того чтобы векторное поле $\vec{a}(M)$ было соленоидальным в объёмной односвязной области G, необходимо и достаточно, чтобы поток вектора $\vec{a}(M)$ через любую замкнутую поверхность был равен нулю.*

Доказательство. Докажем сначала необходимость этого условия. Пусть (S) – замкнутая поверхность в G. Тогда

$$\Phi = \iint\limits_{(S)} (\vec{a}(\vec{r}), d\vec{S}) = \iiint\limits_{(V)} \operatorname{div}\vec{a}\, dV = 0.$$

Докажем теперь достаточность условия теоремы. Пусть $\Phi = 0$, тогда выберем в качестве (S) сферу с центром в точке M. Получим

$$\iiint\limits_{(V)} \operatorname{div}\vec{a}\, dV = 0.$$

$$\operatorname{div}\vec{a}(M) = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\iint\limits_{(S)} (\vec{a}, d\vec{S}) = 0.$$

Следовательно, $\Phi = 0$.

Отметим основные свойства соленоидального поля в предположении, что область (D) ограничена одной замкнутой поверхностью.

Так как $\operatorname{div}\vec{a} \equiv 0$ в области (D), то по формуле Остроградского имеем

$$\Phi = \iint\limits_{(S)} (\vec{a}, \vec{n}_0)\, dS = \iiint\limits_{(V)} \operatorname{div}\vec{a}\, dV = 0.$$

Свойство 1. Поток соленоидального поля через любую незамкнутую поверхность (с выбранной нормалью), опирающуюся на замкнутый контур L, имеет одно и то же значение, т.е. поток определяется контуром.

Пусть замкнутая поверхность $S = S_1 + S_2$. Тогда по свойству 1???

$$\Phi = \iint\limits_{(S)} (\vec{a}, \vec{n}_0)\, dS = 0,$$

но, с другой стороны,

$$\iint\limits_{(S)} (\vec{a}, \vec{n}_0)\, dS = \iint\limits_{(S_1)} (\vec{a}, \vec{n}_0)\, dS + \iint\limits_{(S_2)} (\vec{a}, \vec{n}_0)\, dS.$$

В результате

$$\iint\limits_{(S_1)} (\vec{a}, \vec{n}_0)\, dS = -\iint\limits_{(S_2)} (\vec{a}, \vec{n}_0)\, dS.$$

Изменив в интеграле справа направление $\vec{n}_0$ нормали на противоположное $\vec{n}_0^{(-)}$, чтобы оба потока вычислялись в одном направлении, получим

$$\iint\limits_{(S_1)} (\vec{a}, \vec{n}_0)\, dS = \iint\limits_{(S_2)} (\vec{a}, \vec{n}_0^{(-)})\, dS.$$

♦ Векторная трубка есть совокупность векторных линий, пересекающих замкнутый контур (L).

Свойство 2. Поток соленоидального поля через любое сечение данной векторной трубки этого поля имеет постоянное значение.

Пусть S_1 и S_2 – два произвольных поперечных сечения трубки, а S_3 – боковая поверхность трубки между сечениями S_1 и S_2. По формуле Остроградского имеем

$$\iiint\limits_{(V)} \operatorname{div} \vec{a}\, dV = \iint\limits_{(S_1)} (\vec{a}, \vec{n}_0)\, dS + \iint\limits_{(S_2)} (\vec{a}, \vec{n}_0)\, dS + \iint\limits_{(S_3)} (\vec{a}, \vec{n}_0)\, dS.$$

Интеграл слева равен нулю, так как $\operatorname{div} \vec{a} \equiv 0$; последний интеграл справа также равен нулю, поскольку на поверхности трубки $\vec{a} \perp \vec{n}_0$. Перенеся интеграл по (S_1) влево и изменив в этом интеграле направление $\vec{n}_0$ на противоположное $\vec{n}_0^{(-)}$, получим

$$\iint\limits_{(S_1)} (\vec{a}, \vec{n}_0^{(-)})\, dS = \iint\limits_{(S_2)} (\vec{a}, \vec{n}_0)\, dS,$$

что и требовалось доказать.

Свойство 3. В соленоидальном поле векторные линии не могут ни заканчиваться, ни начинаться внутри поля. Следовательно, они либо замкнуты, либо имеют концы на границе поля или бесконечные ветви (в случае неограниченного поля).

Этот факт следует из свойства 2. Действительно, если какая-либо трубка заканчивается в точке M, то в данной точке вектор должен принимать бесконечно большое значение, поскольку интенсивность трубки постоянна, а ее поперечное сечение в точке M равно нулю.

Понятие соленоидального поля тесно связано с понятием ротора векторного поля. Это видно из следующей теоремы.

Теорема 30.2. *Векторное поле, образованное вектором $\vec{a} = \operatorname{rot} \vec{b}$, соленоидально.*

Доказательство. Действительно, если $\vec{a} = \operatorname{rot} \vec{b}$, то

$$\operatorname{div} \vec{a} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{b} \equiv 0$$

в силу (29.4), а это и доказывает соленоидальность поля вихрей.

Можно показать, что верно и обратное утверждение, т.е. что всякое соленоидальное поле можно представить в виде вихря некоторого векторного поля. Вектор $\vec{b}$ называется векторным потенциалом соленоидального поля.

К соленоидальным полям можно отнести, например

1) магнитное поле (в отличие от электрического, оно не имеет источников векторных линий и поэтому является соленоидальным);
2) поле скоростей несжимаемой жидкости при отсутствии стоков и источников, т.е. при условии, что ни в одной точке жидкость не исчезает и не возникает.

30.3. Лапласово (или гармоническое) поле

♦ Векторное поле называется лапласовым (или гармоническим) в области (D), если в каждой точке этой области

$$\operatorname{rot}\vec{a} = 0, \quad \operatorname{div}\vec{a} = 0.$$

Таким образом, лапласово поле является одновременно и потенциальным и соленоидальным, т.е. не имеет ни вихрей, ни источников (стоков).

Из потенциальности поля следует, что $\vec{a} = \operatorname{grad}\varphi$. Тогда с учетом того, что $\operatorname{div}\vec{a} = 0$, получим

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = 0 \quad \text{или} \quad \Delta\varphi = 0.$$

Это уравнение называется уравнением Лапласа.

Для того чтобы вектор $\vec{a}$ был лапласовым, необходимо и достаточно, чтобы он являлся градиентом гармонической функции:

$$\vec{a} = \operatorname{grad}\varphi,$$

где $\Delta\varphi = 0$.

Для лапласова поля лапласиан всегда равен нулю: $\Delta\vec{a} = 0$. Это следует из формулы

$$\Delta\vec{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a},$$

если положить $\operatorname{div}\vec{a} = 0$, $\operatorname{rot}\vec{a} = 0$.

Обратное утверждение неверно.

30.4. Векторное поле общего вида

Векторные поля характеризуются тем, что

$$\operatorname{rot}\vec{a} \neq 0, \quad \operatorname{div}\vec{a} \neq 0.$$

Относительно таких полей справедлива теорема.

Теорема 30.3. *Вектор $\vec{a}$ общего вида всегда может быть представлен в виде суммы потенциального и соленоидального векторов*

$$\vec{a} = \vec{\Pi} + \vec{C}$$

или

$$\vec{a} = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{rot}\vec{b}.$$

Отметим, что принадлежность вектора $\vec{a}$ к классам I, II или III не нарушается при вычислении лапласиана от вектора $\vec{a}$. Например, если $\vec{a}$ – потенциальный вектор, то $\operatorname{rot}\vec{a} \equiv 0$ и $\Delta\vec{a}$ тоже; если $\vec{a}$ – соленоидальный, то $\operatorname{div}\vec{a} \equiv 0$ и $\Delta\vec{a}$ тоже.

Это прямо следует из отмеченного выше факта перестановочности оператора Лапласа с операторами grad, div, rot:

$$\Delta(\operatorname{grad}\varphi) = \operatorname{grad}(\Delta\varphi);$$
$$\Delta(\operatorname{div}\vec{a}) = \operatorname{div}(\Delta\vec{a});$$
$$\Delta(\operatorname{rot}\vec{a}) = \operatorname{rot}(\Delta\vec{a}).$$

30.5. Примеры векторных полей

1. Магнитное поле

Пусть магнитное поле создано постоянным током $\vec{I}$, текущим по бесконечному прямолинейному проводнику. Пусть ток течет по проводу в направлении снизу вверх.

Обозначим через ρ расстояние от точки M до оси Oz:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Тогда вектор магнитной напряженности

$$\vec{H} = \frac{2|\vec{I}|}{\rho^2}(-y\vec{\imath} + x\vec{\jmath}).$$

Покажем, что такое магнитное поле соленоидально. Для этого нужно доказать, что

$$\operatorname{div}\vec{H} = 0.$$

В нашем случае имеем

$$H_x = -\frac{2|\vec{I}|}{\rho^2}y = -H_x = -\frac{2|\vec{I}|y}{x^2+y^2}; \quad H_y = -\frac{2Ix}{\rho^2}; \quad H_z = 0.$$

Тогда

$$\operatorname{div}\vec{H} = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z},$$

где

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} = \frac{2Iy2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4Ixy}{\rho^4}; \quad \frac{\partial H_y}{\partial y} = -\frac{4Ixy}{\rho^4}; \quad \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0,$$

т.е.

$$\operatorname{div}\vec{H} = \frac{4Ixy}{\rho^4} - \frac{4Ixy}{\rho^4} = 0.$$

Таким образом, поле соленоидально.

2. Электрическое поле точечного заряда

Поместим заряд $+q_1$ в начало координат. Тогда напряженность электрического поля $\vec{E}$ — сила, с которой этот заряд действует на единичный положительный заряд, помещенный в точку $M(x, y, z)$, — определится по закону Кулона

$$|\vec{E}| = \frac{q_1}{r^2},$$

где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ – расстояние точки M от начала координат. Направление силы $\vec{E}$ совпадает с направлением радиус-вектора $\vec{OM}$. Поэтому

$$\vec{E} = E_x\vec{\imath} + E_y\vec{\jmath} + E_z\vec{k},$$

где

$$E_x = |\vec{E}|\cos\alpha = \frac{q_1}{r^2}\frac{x}{r} = \frac{q_1 x}{r^3};$$
$$E_y = |\vec{E}|\cos\beta = \frac{q_1}{r^2}\frac{y}{r} = \frac{q_1 y}{r^3};$$

$$E_z = |\vec{E}| \cos\gamma = \frac{q_1}{r^2}\frac{z}{r} = \frac{q_1 z}{r^3}.$$

Тогда

$$\vec{E} = \frac{q_1 x}{r^3}\vec{\imath} + \frac{q_1 y}{r^3}\vec{\jmath} + \frac{q_1 z}{r^3}\vec{k}$$

или

$$\vec{E} = \operatorname{grad}\Big(-\frac{q_1}{r}\Big).$$

По правилу дифференцирования сложной функции найдем

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{3q_1 x}{r^4}\frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{3q_1 xy}{r^5};$$
$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{3q_1 y}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{3q_1 xy}{r^5}.$$

Видим, что

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x}.$$

Легко установить, что

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x},$$

т.е. выполняется первое условие

$$\operatorname{rot}\vec{E} = 0, \quad \operatorname{rot}\vec{E} = -\operatorname{rot}\operatorname{grad}\Big(-\frac{q_1}{r}\Big) = 0.$$

Найдем дивергенцию поля напряженности через любую точку, кроме точки $O(0,0,0)$:

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Вычислим частные производные от E_x, E_y, E_z:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial(q_1 x/r^3)}{\partial x} = q_1\frac{r^2 - 3x^2}{r^5};$$
$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial(q_1 y/r^3)}{\partial y} = q_1\frac{r^2 - 3y^2}{r^5};$$
$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial(q_1 z/r^3)}{\partial z} = q_1\frac{r^2 - 3z^2}{r^5}.$$

Отсюда

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{q_1}{r^5}\big[3r^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)\big] = 0.$$

Таким образом, для электрического поля точечного заряда $\operatorname{rot}\vec{E} = 0$, $\operatorname{div}\vec{E} = 0$, т.е. это поле лапласово, или гармоническое.

31. Интегралы, зависящие от параметра

31.1. Собственные интегралы, зависящие от параметра

Рассмотрим функцию, заданную соотношением

$$J(\alpha) = \int\limits_a^b f(x, \alpha) dx. \tag{31.1}$$

♦ Функция $f(x, \alpha)$ называется равномерно непрерывной в прямоугольнике $a \leq x \leq b$, $c \leq \alpha \leq d$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta_\varepsilon > 0$, что для всех $|x - x'| < \delta_\varepsilon$ и $|\alpha - \alpha'| < \delta_\varepsilon$ справедливо неравенство

$$|f(x', \alpha') - f(x, y)| < \varepsilon, \quad x, x' \in [a, b], \quad \alpha, \alpha' \in [c, d].$$

Теорема 31.1. *Если функция $f(x, \alpha)$ непрерывна в прямоугольнике $a \leq x \leq b$, $c \leq \alpha \leq d$, то интеграл* (31.1) *определяет непрерывную функцию переменной α.*

Доказательство. Так как функция $f(x, \alpha)$ непрерывна в замкнутом прямоугольнике, то она равномерно непрерывна в этом прямоугольнике.

Для любых x, x' и α, α' и любых $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta_\varepsilon > 0$, что если $|x - x'| < \delta_\varepsilon$, то справедливо неравенство

$$|f(x, \alpha) - f(x', \alpha')| \leq \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

В частности, положим $x = x'$ и рассмотрим

$$|J(\alpha') - J(\alpha)| = \left| \int\limits_a^b f(x, \alpha') dx - \int\limits_a^b f(x, \alpha) dx \right| = \left| \int\limits_a^b [f(x, \alpha') - f(x, \alpha)] dx \right| \leq$$

$$\leq \int\limits_a^b |f(x, \alpha') - f(x, \alpha)| dx \leq \frac{\varepsilon}{b - a} \int\limits_a^b dx = \varepsilon.$$

Следовательно, согласно определению непрерывности, $J(\alpha)$ – непрерывная функция.

Теорема 31.2. *Если функции $f(x, \alpha)$ и $\partial f(x, \alpha)/\partial \alpha$ непрерывны в прямоугольнике $a \leq x \leq b$, $c \leq \alpha \leq d$, то соотношение* (31.1) *определяет дифференцируемую на отрезке $[c, d]$ функцию переменной α, причем справедливо соотношение*

$$\frac{dJ(\alpha)}{d\alpha} = \int\limits_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx. \tag{31.2}$$

Доказательство. По определению

$$J'(\alpha) = \lim_{\Delta\alpha \to 0} \frac{J(\alpha + \Delta\alpha) - J(\alpha)}{\Delta\alpha}.$$

Рассмотрим следующее соотношение:

$$\frac{J(\alpha+\Delta\alpha)-J(\alpha)}{\Delta\alpha}=\frac{1}{\Delta\alpha}\int\limits_a^b[f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)]dx.$$

Воспользуемся формулой конечных приращений:

$$\frac{1}{\Delta\alpha}\int\limits_a^b[f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)]dx=\frac{\Delta\alpha}{\Delta\alpha}\int\limits_a^b\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha+\theta\Delta\alpha)dx.$$

Вычтем из этого соотношения правую часть соотношения (31.2):

$$\Big|\frac{1}{\Delta\alpha}[J(\alpha+\Delta\alpha)-J(\alpha)]-\int\limits_a^b\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx\Big|=$$

$$=\Big|\int\limits_a^b\Big[\frac{\partial f(x,\alpha+\theta\Delta\alpha)}{\partial\alpha}-\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\Big]dx\Big|\leq\int\limits_a^b\Big|\frac{\partial f(x,\alpha+\theta\Delta\alpha)}{\partial\alpha}-\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\Big|dx.$$

Функция $\partial f/\partial\alpha$ непрерывна в замкнутом прямоугольнике $[a,b]\times[c,d]$, следовательно, она равномерно непрерывна, т.е. для любого $\varepsilon>0$ и любых α,α', x,x', принадлежащих $[a,b]\times[c,d]$ существует такое δ_ε, что при $|\alpha-\alpha'|<\delta_\varepsilon$ и $|x-x'|<\delta_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\Big|\frac{\partial f(x',\alpha')}{\partial\alpha}-\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\Big|<\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Отсюда заменой $\varepsilon/(b-a)$ получим утверждение теоремы.

Теорема 31.3. *Если функция $f(x,\alpha)$ непрерывна в замкнутом прямоугольнике $a\leq x\leq b$, $c\leq\alpha\leq d$, то существует интеграл*

$$\int\limits_c^d J(\alpha)d\alpha=\int\limits_c^d d\alpha\int\limits_a^b f(x,\alpha)dx, \qquad (31.3)$$

$$J(\alpha)=\int\limits_a^b f(x,\alpha)dx.$$

Доказательство непосредственно следует из формулы сведения двойного интеграла к повторному.

Следствие 31.3.1. *Если функция $f(x,\alpha)$ удовлетворяет условиям теоремы* 31.2*, а функции $a(\alpha)$ и $b(\alpha)$ непрерывно дифференцируемы на $[c,d]$, то справедливо соотношение*

$$\frac{d}{d\alpha}\int\limits_{a(\alpha)}^{b(\alpha)}f(x,\alpha)dx=f(b,\alpha)b'(\alpha)-f(a(\alpha),\alpha)a'(\alpha)+\int\limits_{a(\alpha)}^{b(\alpha)}\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx. \qquad (31.4)$$

Без доказательства.

Таким образом, мы видим, что что собственные интегралы, зависящие от параметра, мало отличаются от обычных функций. Для несобственных интегралов ситуация изменяется. В общем случае для таких интегралов несправедливо рассмотренные выше утверждения. Однако можно выделить класс несобственных интегралов, зависящих от параметра, для которых перечисленные выше свойства сохраняются, – это так называемые равномерно сходящиеся интегралы.

31.2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Рассмотрим функцию

$$J(\alpha) = \int\limits_a^\infty f(x,\alpha)dx. \tag{31.5}$$

По определению, несобственный интеграл сходится, если существует предел

$$J(\alpha) = \lim_{b\to\infty} \int\limits_a^b f(x,\alpha)dx, \quad \alpha \in [c,d].$$

♦ Несобственный интеграл называется равномерно сходящимся по параметру α, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое b_ε, что

$$\Bigl|J(\alpha) - \int\limits_a^{b_\varepsilon} f(x,\alpha)dx\Bigr| = \Bigl|\int\limits_{b_\varepsilon}^\infty f(x,\alpha)dx\Bigr| < \varepsilon \tag{31.6}$$

для всех $\alpha \in [c,d]$.

Пример 31.1. Показать, что

$$J(\alpha) = \int\limits_0^\infty \alpha e^{-\alpha x}dx, \quad \alpha \in [0,1],$$

сходится, но неравномерно.

Решение. Нужно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует b_ε

$$\Bigl|\int\limits_b^\infty \alpha e^{-\alpha x}dx\Bigr| < \varepsilon.$$

Сделаем в интеграле замену переменных

$$\begin{array}{lll} \alpha x = z & x_1 = b & z_1 = \alpha b \\ \alpha dx = dz & x_2 = \infty & z_2 = \infty \end{array}.$$

Тогда

$$J(\alpha) = \int\limits_{b\alpha}^\infty e^{-z}dz = -e^{-z}\Big|_{b\alpha}^\infty = e^{-b\alpha}.$$

Необходимо для любого $\varepsilon > 0$ предъявить b такое, чтобы выполнялось условие (31.6). Заметим, что для любого b существует $\alpha = 1/b$, что дает

$$\left|J\left(\frac{1}{b}\right)\right| = e^{-1}.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon < e^{-1}$ не существует b, для которого справедливо неравенство (31.6).

Теорема 31.4 (признак Вейерштрасса). *Пусть дан несобственный интеграл* (31.3). *Тогда существует функция* $g(x) \geq 0$ *такая, что* $|f(x,\alpha)| \leq g(x)$ *и*

$$\int\limits_a^\infty g(x)dx < \infty.$$

Тогда интегралы

$$\int\limits_a^\infty f(x,\alpha)dx, \qquad \int\limits_a^\infty |f(x,\alpha|dx$$

сходятся равномерно. Функция $g(x)$ *называется мажорирующей или мажорантой.*

Доказательство. Интеграл $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ сходится. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует b_ε такое, что

$$\int\limits_{b_\varepsilon}^\infty g(x)dx < \varepsilon.$$

Тогда

$$\Big|\int\limits_{b_\varepsilon}^\infty f(x,\alpha)dx\Big| \leq \int\limits_{b_\varepsilon}^\infty |f(x,\alpha)|dx \leq \int\limits_{b_\varepsilon}^\infty g(x)dx < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\Big|\int\limits_{b_\varepsilon}^\infty f(x,\alpha)dx\Big| < \varepsilon$$

для всех $\alpha \in [c,d]$ и интеграл (31.5) сходится равномерно.

Вторая часть утверждения доказывается аналогично.

Теорема 31.5. *Если функция* $f(x,\alpha)$ *непрерывна в полуполосе* $a \leq x \leq \infty$, $c \leq \alpha \leq d$, *а интеграл* (31.5) *сходится равномерно на* $[c,d]$ *по параметру* α, *то функция* $J(\alpha)$ (31.5) *непрерывна на* $[c,d]$.

Теорема 31.6. *Если функция* $f(x,\alpha)$ *и ее частная производная* f_α *непрерывны в полуполосе* $a \leq x \leq \infty$, $c \leq \alpha \leq d$, *а интеграл* (31.5) *сходится равномерно вместе с интегралом*

$$\int\limits_0^\infty \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx,$$

то функция $J(\alpha)$ *дифференцируема на* $[c, d]$ *и справедливо равенство:*

$$J'(\alpha) = \int\limits_a^\infty \frac{\partial f}{\partial \alpha} dx. \tag{31.7}$$

Теорема 31.7. *Если выполняются условия теоремы 31.5, то функция* $J(\alpha)$ *интегрируема на* $[c, d]$*, причем*

$$\int\limits_c^d J(\alpha) d\alpha = \int\limits_c^d d\alpha \int\limits_a^\infty f(x, \alpha) dx.$$

$\Diamond$ Равномерно сходящиеся несобственные интегралы можно дифференцировать и интегрировать по параметру при условии, чтобы при дифференцировании получается тоже сходящийся интеграл.

Пример 31.2. Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} dx.$$

Решение. Рассмотрим вспомогательный интеграл

$$J(\alpha, \beta) = \int\limits_0^\infty e^{-\beta x} \frac{\sin \alpha x}{x} dx. \tag{31.8}$$

Тогда

$$J(\alpha) = \lim_{\beta \to 0} J(\alpha, \beta).$$

Интеграл (31.8) обладает важным свойством: при любом фиксированном β он сходится по α:

$$\left| \frac{\sin \alpha x}{x} e^{-\beta x} \right| \le e^{-\beta x}.$$

Отсюда следует, что интеграл

$$\int\limits_1^\infty e^{-\beta x} dx, \quad 1 \le x \le \infty,$$

является мажорирующим для

$$\int\limits_1^\infty e^{-\beta x} \frac{\sin \alpha x}{x} dx,$$

который сходится равномерно для всех $\alpha \in [0, 1]$. Следовательно, интеграл (31.8) сходится равномерно и его можно дифференцировать по параметру $\alpha \in [0, 1]$. Продифференцировав (31.8) по параметру α, получим

$$J'_\alpha(\alpha, \beta) = \int\limits_0^\infty e^{-\beta x} \cos \alpha x dx = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}. \tag{31.9}$$

Здесь мы воспользовались результатами примера ??. Следовательно,

$$J(\alpha,\beta) = \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha} + C.$$

Из (31.8) следует, что $J(0,\beta) = 0$, откуда $C = 0$ и

$$J(\alpha) = \frac{\pi}{2}.$$

32. Гамма- и бета-функции

♢ Для изучения некоторых свойств преобразования Лапласа нам потребуется ввести гамма- и бета-функции. Гамма- и бета-функции являются представителями класса специальных функций, и их применение не ограничивается только приложением к преобразованиям Лапласа.

♦ В области $x > 0$ гамма-функция (или эйлеров интеграл второго рода) определяется абсолютно сходящимся интегралом

$$\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt. \tag{32.1}$$

Рис. 12

♢ Поведение функции $\Gamma(x)$ для действительного аргумента иллюстрирует рис. 12.

♢ Следует отметить, что иногда в качестве определения гамма-функции вместо (32.1) используют интегральное представление вида

$$\Gamma(x) = 2\int\limits_0^\infty e^{-\tau^2}\tau^{2x-1}d\tau. \tag{32.2}$$

Кроме того, Вейерштрассом было показано, что все свойства гамма функции, вытекающие из (32.1), (32.2) могут быть получены представлением $\Gamma(x)$ в виде бесконечного произведения

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x}\prod_{n=1}^\infty\Big(1+\frac{x}{n}\Big)e^{-x/n}, \tag{32.3}$$

где

$$\gamma = -\lim_{x\to1}\frac{d\Gamma(x)}{dx} = -\int\limits_0^\infty e^{-t}\ln t\,dt = \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^n\frac{1}{k} - \ln n\Big) \tag{32.4}$$

– постоянная Эйлера, приближенное значение которой равно 0,5772...

Если эквивалентность определений (32.1), (32.2) очевидна, поскольку переменные интегрирования связаны соотношением $\sqrt{t}=\tau$, то их эквивалентность представлению (32.3) будет показана ниже.

♦ Бета-функцией (или эйлеровым интегралом первого рода) называется интеграл

$$\mathrm{B}(x,y)=\int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt,\quad x>0,\ y>0. \tag{32.5}$$

Наряду с определением (32.5) достаточно распространенным является представление бета-функции в виде

$$\mathrm{B}(x,y)=2\int\limits_0^{\pi/2}(\sin\tau)^{2x-1}(\cos\tau)^{2y-1}d\tau, \tag{32.6}$$

следующем из (32.5) заменой $t=\sin^2\tau$.

♢ Набор определений $\Gamma(x)$ и $\mathrm{B}(x,y)$ в виде (32.1), (32.2), (32.3), (32.5), (32.8) удобен в конкретных приложениях, использующих гамма-функцию.

Свойства гамма- и бета-функций

Свойство 1 (основное функциональное соотношение). Для всех $x>0$ справедливо

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x). \tag{32.7}$$

Доказательство. Действительно, воспользуемся определением (32.1):

$$\Gamma(x+1)=\int\limits_0^\infty t^x e^{-t}dt,$$

которое проинтегрируем один раз по частям, полагая $U=t^x$, $dU=xt^{x-1}dt$, $V=-e^{-t}$, $dV=e^{-t}dt$. Тогда

$$\Gamma(x+1)=-t^xe^{-t}\Big|_0^\infty+z\int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt=x\Gamma(x),$$

что и требовалось доказать.

Основное функциональное соотношение можно получить, если воспользоваться определением (32.3). Действительно, если $x\neq -j$, $j=\overline{0,\infty}$, то

$$\frac{\Gamma(1+x)}{\Gamma(z)}=\frac{ze^{\gamma x}\prod\limits_{k=1}^\infty(1+x/k)e^{-x/k}}{(1+x)e^{\gamma(1+x)}\prod\limits_{n=1}^\infty[1+(1+x)/n]e^{-(x+1)/n}}=$$

$$=\frac{1}{1+x}\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^N\frac{(1+1/n)^{x+1}}{1+(1+x)/n}x\lim_{N\to\infty}\prod_{k=1}^N\frac{1+x/k}{(1+1/k)^x}=$$

$$=\frac{1}{1+x}\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^N\frac{(1+1/n)(x+n)}{x+n+1}=x\lim_{N\to\infty}\frac{N+1}{N+1+x}=x,$$

что и доказывает эквивалентность определений (32.1) и (32.3).

Свойство 2. Справедливо соотношение

$$\mathrm{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{32.8}$$

Доказательство см. в части I [1].

Свойство 3. Для натуральных n справедливо соотношение

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{32.9}$$

Доказательство. Положим в (32.7) $x = n$. Тогда

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = \cdots = n!\Gamma(1).$$

Поскольку

$$\Gamma(1) = \int\limits_0^\infty e^{-t}dt = 1,$$

соотношение (32.9) доказано.

◊ Если x и y – целые положительные числа ($x = n$, $y = m$), то формулу (32.8) можно записать в виде

$$\mathrm{B}(n,m) = \frac{\Gamma(n)\Gamma(m+1)}{m\Gamma(n+m)} = 1\Big/\Big[m\frac{(n+m-1)!}{(n-1)!m!}\Big] = \frac{1}{mC_{m+n-1}^{n-1}},$$

где

$$C_s^l = \frac{s!}{l!(s-l)!}$$

— биномиальные коэффициенты.

◊ Таким образом, если гамма-функцию можно рассматривать как обобщение факториала на случай комплексного??? аргумента, то бета-функцию – как обобщение биномиальных коэффициентов.

Свойство 4. Функцию $\Gamma(x)$ можно аналитически продолжить на всю числовую прямую, кроме точек $x = -n$, $n = \overline{0,\infty}$, в которых $\Gamma(x)$ имеет разрывы второго рода (см. рис. 12).

Доказательство см., например, в [1].

Свойство 5 (формула дополнения). Справедливо соотношение

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z}. \tag{32.10}$$

Доказательство. Достаточно доказать справедливость формулы (32.10) произвольного интервала $a < x < b$.

Согласно формуле (32.2)

$$\Gamma(x) = 2\int\limits_0^\infty e^{-u^2}u^{2x-1}du,$$

$$\Gamma(1-x) = 2\int\limits_0^\infty e^{-v^2} v^{1-2x} dv.$$

Следовательно, при $0 < x < 1$

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = 4\int\limits_0^\infty u^{2x-1} e^{-u^2} du \int\limits_0^\infty v^{1-2x} e^{-v^2} dv = 4\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty e^{-(u^2+v^2)} \Big(\frac{u}{v}\Big)^{2x-1} du dv.$$

Перейдем в полярную систему координат: $u = \rho\cos\varphi$, $v = \rho\sin\varphi$, $dudv = \rho d\rho\, d\varphi$. Тогда

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = 4\int\limits_0^\infty e^{-\rho^2} \rho d\rho \int\limits_0^{\pi/2} (\operatorname{ctg}\varphi)^{2x-1} d\varphi = 2\int\limits_0^{\pi/2} (\operatorname{ctg}\varphi)^{2x-1} d\varphi.$$

Последний интеграл заменой $\operatorname{tg}^2\varphi = \tau$ приводится к виду

$$I = 2\int\limits_0^{\pi/2} (\operatorname{ctg}\varphi)^{2x-1} d\varphi = \int\limits_0^1 \frac{\tau^{(1-x)-1}}{1+\tau} d\tau,$$

соответствующему интегралу (**??**) с $\alpha = 1 - x$, и, следовательно,

$$I = \frac{\pi}{\sin[\pi(1-x)]} = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

что и требовалось доказать (см. также пример 32.8).

♢ Формулу дополнения можно доказать проще, если воспользоваться определением (32.3). Действительно, для всех $z \neq n$, $n = \overline{-\infty, \infty}$, имеем

$$\Gamma(x)\Gamma(-x) = -\frac{1}{x^2}\prod_{n=1}^\infty \Big[\Big(1+\frac{x}{n}\Big)e^{-x/n}\Big]^{-1} \prod_{k=1}^\infty \Big[\Big(1-\frac{x}{k}\Big)e^{x/k}\Big]^{-1} = -\frac{1}{x^2}\prod_{n=1}^\infty \Big(1-\frac{x^2}{n^2}\Big)^{-1}.$$

С помощью формулы (**??**) для разложения целой функции в виде произведения

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \prod_{n=1}^\infty \Big(1 - \frac{x^2}{n^2}\Big)$$

найдем

$$\Gamma(x)\Gamma(-x) = -\frac{\pi}{x\sin\pi x},$$

откуда с учетом основного функционального соотношения

$$\Gamma(-x)(-x) = \Gamma(1-x)$$

приходим к (32.10).

Свойство 6. Функция $\Gamma(x)$ не имеет нулей, т.е. для всех x

$$\Gamma(x) \neq 0. \tag{32.11}$$

Доказательство. Проведем доказательство от противного. Пусть x_0 — нуль функции $\Gamma(x)$. Тогда $x_0 \neq -j$, $j = \overline{0, \infty}$, так как в этих точках $\Gamma(x)$ имеет полюсы 1-го порядка, и $x_0 \neq j$, $j = \overline{0, \infty}$, так как $\Gamma(n+1) = n!$. Рассмотрим предел

$$\lim_{x\to x_0} \Gamma(1-x) = \lim_{x\to x_0} \frac{\pi}{\Gamma(x)\sin\pi x} = \frac{\pi}{\sin\pi x_0 \lim\limits_{x\to x_0}\Gamma(x)} = \infty,$$

поскольку $\sin\pi x_0 \neq 0$. Следовательно, $\Gamma(1-x)$ имеет в точке x_0 разрыв второго рода, что противоречит свойству 4. Полученное противоречие и доказывает настоящее свойство.

Свойство 7. Справедливы соотношения

$$\Gamma\Big(\frac{2n+1}{2}\Big) = \frac{1}{2^n}(2n-1)!!\sqrt{\pi} \tag{32.12}$$

и

$$\Gamma\Big(\frac{1-2n}{2}\Big) = \frac{(-1)^n\sqrt{\pi}2^n}{(2n-1)!!}. \tag{32.13}$$

для $n = \overline{0, \infty}$.

Доказательство. Положим в соотношении (32.7) $x = (2n-1)/2$. Тогда

$$\Gamma\Big(\frac{2n+1}{2}\Big) = \frac{2n-1}{2}\Gamma\Big(\frac{2n+1}{2} - 1\Big) = \frac{2n-1}{2}\Gamma\Big(\frac{2(n-1)+1}{2}\Big) =$$
$$= \frac{(2n-1)(2n-3)}{2^2}\Gamma\Big(\frac{2(n-2)+1}{2}\Big) = \cdots = \frac{1}{2^n}(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1\cdot\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big).$$

Положив в (32.10) $x = 1/2$, получим

$$\Gamma^2\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{\pi}{\sin\pi/2} = \pi,$$

т.е.

$$\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \sqrt{\pi},$$

т.е. соотношение (32.12) справедливо. Подставив в (32.10) $x = n + 1/2$, с учетом (32.12) получим

$$\Gamma\Big(\frac{1}{2} - n\Big) = \frac{\pi}{\Gamma(1/2+n)\sin(n\pi + \pi/2)} = \frac{(-1)^n\pi}{\Gamma(1/2+n)} = \frac{(-1)^n\pi 2^n}{(2n-1)!!\sqrt{\pi}},$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Справедливо соотношение

$$\Gamma\Big(n + \frac{1}{2}\Big)\Gamma\Big(-n + \frac{1}{2}\Big) = (-1)^n\pi. \tag{32.14}$$

Доказательство. Воспользовавшись соотношениями (32.12) и (32.13), получим

$$\Gamma\Big(n + \frac{1}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{1}{2} - n\Big) = \frac{1}{2^n}(2n-1)!!\sqrt{\pi}\frac{(-1)^n\sqrt{\pi}2^n}{(2n-1)!!} = (-1)^n\pi,$$

что и требовалось доказать.

Свойство 8. Справедливы соотношения

$$\mathrm{B}(x,y)=\mathrm{B}(y,x). \qquad (32.15)$$

Доказательство следует непосредственно из (32.8).

Свойство 9. Справедливы соотношения

$$B(z,\omega+1)=\frac{\omega}{z}B(z+1,\omega)=\frac{\omega}{\omega+z}B(z,\omega); \qquad (32.16)$$

$$B(z,1)=\frac{1}{z}; \qquad (32.17)$$

$$B(z,z)=2^{1-2z}B\Big(\frac{1}{2},z\Big); \qquad (32.18)$$

$$B(z,1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}. \qquad (32.19)$$

Доказательство следует из соотношений (32.7) и (32.8). Легко увидеть, что соотношение (32.17) является аналогом основного функционального соотношения; (32.18) — аналогом формулы удвоения, а (32.19) — аналогом формулы дополнения.

Свойство 10 (формула Эйлера). Для натуральных n справедливо соотношение

$$\Gamma\Big(\frac{1}{n}\Big)\Gamma\Big(\frac{2}{n}\Big)\cdots\Gamma\Big(\frac{n-1}{n}\Big)\Gamma(1)=\frac{1}{\sqrt{n}}(2\pi)^{(n-1)/2}. \qquad (32.20)$$

Соотношение (32.20) называется формулой Эйлера.

Доказательство. Обозначим

$$f(n)=\Gamma\Big(\frac{1}{n}\Big)\Gamma\Big(\frac{2}{n}\Big)\cdots\Gamma\Big(\frac{n-1}{n}\Big)$$

и напишем это произведение в обратном порядке

$$f(n)=\Gamma\Big(\frac{n-1}{n}\Big)\Gamma\Big(\frac{n-2}{n}\Big)\cdots\Gamma\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

Составим

$$f^2(n)=\Big[\Gamma\Big(\frac{1}{n}\Big)\Gamma\Big(\frac{n-1}{n}\Big)\Big]\Big[\Gamma\Big(\frac{2}{n}\Big)\Gamma\Big(\frac{n-2}{n}\Big)\Big]\cdots\Big[\Gamma\Big(\frac{n-1}{n}\Big)\Gamma\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big].$$

Применим формулу $\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\pi/\sin\pi x$, тогда

$$f^2(n)=\frac{\pi}{\sin(\pi/n)}\frac{\pi}{\sin(2\pi/n)}\cdots\frac{\pi}{\sin[(n-1)\pi/n]}=\frac{\pi^{n-1}}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}\sin(k\pi/n)}.$$

Числа $e^{2i\pi k/n}$, $k=\overline{0,n-1}$, – корни n-ой степени из единицы. Поэтому можно записать

$$x^n-1=(x-1)(x-e^{2i\pi/n})(x-e^{4i\pi/n})\cdots(x-e^{(n-1)2i\pi/n}).$$

Отсюда

$$\frac{z^n-1}{z-1}=\prod_{k=1}^{n-1}(z-e^{2ik\pi/n}).$$

Перейдя к пределу при $z\to 1$, найдем

$$n=\prod_{k=1}^{n-1}(1-e^{ik\frac{2\pi}{n}}).$$

Но

$$\left|\prod_{k=1}^{n-1}(1-e^{ik\frac{2\pi}{n}})\right|=\prod_{k=1}^{n-1}\left|1-e^{ik\frac{2\pi}{n}}\right|\prod_{k=1}^{n-1}\left|e^{ik\frac{\pi}{n}}\right|\left|e^{-ik\frac{\pi}{n}}-e^{ik\frac{\pi}{n}}\right|=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}.$$

Приходим к равенству

$$n=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n},$$

откуда

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}.$$

Тогда

$$f^2(n)=\frac{\pi^{n-1}2^{n-1}}{n},\qquad f(n)=\frac{1}{\sqrt{n}}(2\pi)^{(n-1)/2},$$

что и требовалось доказать.

Свойство 11 (формула удвоения). Справедливо соотношение

$$\Gamma(x)\Gamma(x+1/2)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\Gamma(2x).$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$B(x,x)=\int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{x-1}dt=\int\limits_0^1\left[\frac{1}{4}-\Big(\frac{1}{2}-t\Big)^2\right]^{x-1}dt.$$

Так как парабола $y=\frac{1}{4}-\Big(\frac{1}{2}-t\Big)^2$ симметрична относительно прямой $t=1/2$, можно записать

$$B(x,x)=2\int\limits_0^{1/2}\left[\frac{1}{4}-\Big(\frac{1}{2}-t\Big)^2\right]^{x-1}dt.$$

Сделаем замену $1/2-t=\sqrt{u}/2$ и получим

$$B(x,x)=\frac{2}{4^x}\int\limits_0^1 u^{-1/2}(1-u)^{x-1}du=\frac{1}{2^{2x-1}}B\Big(\frac{1}{2},x\Big).$$

Переходя к гамма-функции, найдем

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(x)}{\Gamma(2x)} = \frac{1}{2^{2x-1}}\frac{\Gamma(1/2)\Gamma(x)}{\Gamma(x+1/2)},$$

откуда

$$\Gamma(x)\Gamma(x+1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\Gamma(2x).$$

Пример 32.1. Показать, что гамма-функцию можно определить интегралами

$$\Gamma(x) = \int\limits_0^1 \Big[\ln\frac{1}{t}\Big]^{x-1} dt, \quad x > 0. \tag{32.21}$$

Решение. Сделаем в интеграле (32.21) замену переменных $t = e^{-u}$. Тогда $dt = -e^{-u}du$, $\ln\frac{1}{t} = u$ и u будет пробегать значения от ∞ до нуля, в то время как t меняется от нуля до единицы. Следовательно,

$$\int\limits_0^1 \Big[\ln\frac{1}{t}\Big]^{x-1} dt = \int\limits_\infty^0 u^{x-1}(-e^{-u})du = \int\limits_0^\infty e^{-u}u^{x-1}du = \Gamma(x),$$

что и требовалось показать.

Пример 32.2. Показать, что

$$\int\limits_0^\infty e^{-x^4}dx = \Gamma\Big(\frac{5}{4}\Big). \tag{32.22}$$

Решение. Сделаем в интеграле (32.22) замену переменных $x^4 = u$. Тогда $x = u^{1/4}$ и $dx = \frac{1}{4}u^{-3/4}du$. Следовательно,

$$\int\limits_0^\infty e^{-x^4}dx = \int\limits_0^\infty e^{-u}\frac{1}{4}u^{-3/4}du = \frac{1}{4}\int\limits_0^\infty e^{-u}u^{\frac{1}{4}-1}du =$$
$$= \frac{1}{4}\Gamma\Big(\frac{1}{4}\Big) = \Gamma\Big(\frac{1}{4}+1\Big),$$

что и требовалось показать.

Пример 32.3. Используя гамма-функцию, показать, что

$$\int\limits_0^1 x^k \ln x dx = -\frac{1}{(k+1)^2}, \quad k > -1.$$

Решение. Подстановка $\ln x = t$ дает

$$\int\limits_0^1 x^k \ln x dx = \int\limits_{-\infty}^0 te^{(k+1)t}dt.$$

Полагаем $(k+1)t = -u$. При $k+1>0$ получим

$$\int_0^1 x^k \ln x dx = -\frac{1}{(k+1)^2}\int_0^\infty ue^{-u}du =$$

$$= -\frac{1}{(k+1)^2}\Gamma(2) = -\frac{1}{(k+1)^2},$$

что и требовалось показать.

Пример 32.4. Вычислить интеграл

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n}e^{-ax^2}dx, \quad a>0.$$

Решение. Используем четность подынтегральной функции и положим $ax^2 = t$ $(a>0)$. Тогда

$$J = 2\int_0^\infty x^{2n}e^{-ax^2}dx = \frac{1}{a^{n+1/2}}\int_0^\infty t^{n-1/2}e^{-t}dt =$$

$$= \frac{1}{a^{n+1/2}}\Gamma\Big(n+\frac{1}{2}\Big) = \frac{(2n-1)!!}{2^n a^{n+1/2}}\sqrt{\pi}.$$

Пример 32.5. Доказать соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty e^{-x^n}dx = 1.$$

Решение. Сделаем в этом интеграле замену переменных $x = t^{1/n}$ и $dx = \frac{1}{n}t^{1/n-1}dt$. Получим

$$\int_0^\infty e^{-x^n}dx = \frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-t}t^{1/n-1}dt = \frac{1}{n}\Gamma\Big(\frac{1}{n}\Big) = \Gamma\Big(\frac{1}{n}+1\Big).$$

В силу непрерывности гамма-функции $\Gamma(x)$ при $x>0$ найдем

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty e^{-x^n}dx = \lim_{n\to\infty}\Gamma\Big(\frac{1}{n}+1\Big) = \Gamma(1) = 1.$$

Пример 32.6. Вычислить интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} \quad (n>1).$$

Решение. Сделаем в интеграле замену переменных $x = t^{1/n}$ $(t > 0)$ и получим

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} = \frac{1}{n}\int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1}(1-t)^{-1/n}dt = \frac{1}{n}B\Big(\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\Big) =$$

$$= \frac{1}{n}\Gamma\Big(\frac{1}{n}\Big)\Gamma\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\frac{1}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{n\sin(\pi/n)}.$$

Здесь мы воспользовались формулой дополнения.

Пример 32.7. Доказать соотношение

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{4}. \tag{32.23}$$

Решение. Подстановкой $x^4 = t$ преобразуем интегралы к виду

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{4}\int_0^1 t^{-3/4}(1-t)^{-1/2}dt = \frac{1}{4}B\Big(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\Big) = \frac{\Gamma\Big(\frac{1}{4}\Big)\sqrt{\pi}}{4\Gamma\Big(\frac{3}{4}\Big)},$$

$$\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{4}B\Big(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\Big) = \frac{\Gamma\Big(\frac{3}{4}\Big)\sqrt{\pi}}{4\Gamma\Big(\frac{5}{4}\Big)} = \frac{\Gamma\Big(\frac{3}{4}\Big)\sqrt{\pi}}{\Gamma\Big(\frac{1}{4}\Big)}.$$

Перемножив интегралы, получим формулу (32.23).

Пример 32.8. Вычислить интеграл

$$J = \int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^\alpha x dx, \quad \alpha \neq n,\ n = \overline{-\infty, \infty}.$$

Решение. Сделаем в интеграле замену переменных $\operatorname{tg} x = \sqrt{t}$ $(t > 0)$ и получим

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{t^{(\alpha-1)/2}}{1+t}dt = \frac{1}{2}B\Big(\frac{\alpha+1}{2}, 1-\frac{\alpha+1}{2}\Big) =$$

$$= \frac{1}{1\Gamma(1)}\Gamma\Big(\frac{\alpha+1}{2}\Big)\Gamma\Big(1-\frac{\alpha+1}{2}\Big) = \frac{\pi}{1\cos(\pi\alpha/2)}.$$

Заметим, что этот результат можно получить непосредственно из формулы (32.6).

Пример 32.9. Показать, что

$$J = \int_0^{\pi/2} \sin^m x\cos^n x\, dx = \frac{1}{2}B\Big(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\Big). \tag{32.24}$$

Решение. Положим $\sin x = \sqrt{t}$ $(t > 0)$. Тогда

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^1 t^{(m-1)/2}(1-t)^{(n-1)/2}dt = \frac{1}{2}B\Big(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\Big).$$

Пример 32.10. Вычислить интеграл

$$J = \int\limits_{-1}^{1}(1+x)^a(1-x)^b dx, \quad a > -1, \quad b > -1. \tag{32.25}$$

Решение. Подстановкой $1 - x = 2t$ интеграл преобразуется к виду

$$J = 2^{a+b+1}\int\limits_0^1 t^b(1-t)^a dt = 2^{a+b+1}B(a+1, b+1).$$

$\Diamond$ Можно сделать в интеграле (32.25) замену переменных $x = \cos 2\varphi$.

Пример 32.11. Вычислить интеграл Дирихле

$$J = \iint\limits_D x^q y^p d\sigma,$$

где D – треугольник, ограниченный полуосями и прямой $x + y = 1$, $p > -1$, $q > -1$.

Решение. Перейдем от двойного интеграла к повторному:

$$J = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} x^p y^q dy.$$

Так как $q \neq -1$,

$$J = \frac{1}{q+1}\int\limits_0^1 x^p(1-x)^{q+1}dx = \frac{1}{q+1}B(p+1, q+2) = \frac{1}{q+1}\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+2)}{\Gamma(p+q+3)} =$$

$$= \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{(p+q+2)\Gamma(p+q+2)} = \frac{B(p+1, q+1)}{p+q+2}.$$

Пример 32.12. Вычислить интеграл

$$J = \int\limits_0^a t^{2n}\sqrt{a^2 - t^2}dt, \quad a > 0.$$

Решение. Полагаем $t = a\sin x$, $a > 0$. Получим

$$J = a^{2n+2}\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\cos^2 x\,dx.$$

Воспользовавшись соотношением (32.24), найдем

$$J = a^{2n+2}\frac{1}{2}B\Big(n+\frac{1}{2},\frac{3}{2}\Big) = a^{2n+2}\frac{\Gamma(n+1/2)\Gamma(3/2)}{2\Gamma(n+2)} = \frac{(2n-1)!!a^{2n+2}}{2^{n+2}(n+1)!}\pi.$$

Пример 32.13. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $|x|^n + |y|^n = a^n$ ($n > 0$, $a > 0$).

Решение. Ввиду центральной симметрии кривой относительно начала координат будем рассматривать только ее часть, расположенную в первом квадранте ($x \geq 0$, $y \geq 0$). В этом случае $y = (a^n - x^n)^{1/n}$, $0 \leq x \leq a$. Тогда для площади фигуры получим

$$S = 4\int\limits_0^a ydx = 4\int\limits_0^a (a^n - x^n)^{1/n}dx.$$

Сделаем в интеграле замену переменных

$$x = at^{1/n}, \qquad dx = (a/n)t^{1/n-1}dt.$$

Получим

$$S = \frac{4a^2}{n}\int\limits_0^1 (1-t)^{1/n}t^{1/n-1}dt = \frac{4a^2}{n}B\Big(\frac{1}{n}+1,\frac{1}{n}\Big) = \frac{2a^2}{n}\frac{\Gamma^2(1/n)}{\Gamma(2/n)}.$$

33. Определители Вронского и Грама

♦ Функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ являются линейно зависимыми на $]a,b[$, если одна из них является линейной комбинацией других для всех $x \in]a,b[$, т.е. существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, из которых хотя бы одно не равно нулю, что

$$\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \ldots + \alpha_m\varphi_m = 0. \tag{33.1}$$

Если тождество (33.1) выполняется лишь в случае, когда все $\alpha_i = 0$, то функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ называются линейно независимыми на $]a,b[$.

◊ Выражение «хотя бы одно α_k не равно нулю» можно определить неравенством $\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k^2 > 0$.

◊ Заметим, что если среди функций $\varphi_k(x)$, $k = \overline{1,m}$, хотя бы одна является тождественным нулем на промежутке $]a,b[$, то такая система функций является линейно зависимой.

Действительно, пусть, например, $\varphi_1(x) \equiv 0$. Выберем $\alpha_1 \neq 0$, а остальные $\alpha_k = 0$, $k = \overline{2,m}$. Тогда, очевидно, на $]a,b[$ имеет место тождество

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \ldots + \alpha_m\varphi_m(x) \equiv 0, \qquad x \in]a,b[, \tag{33.2}$$

которое и означает, что система функций $\varphi_1(x) \equiv 0$, $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$ линейно зависима на $]a, b[$, поскольку $\alpha_1 \neq 0$.

Из этого замечания следуют два частных случая.

◊ Любая линейно независимая система не содержит нулевую функцию.

◊ Любую линейно независимую систему функций $\varphi_k(x)$, $k = \overline{1, m}$, можно превратить в линейно зависимую, дополнив её $(m+1)$-ой функцией, тождественно равной нулю на $]a, b[$.

Для систем, состоящих из двух функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, условие (33.2) имеет вид

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) = 0, \qquad x \in]a, b[\tag{33.3}$$

или

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1},$$

Отсюда следует, что условием линейной зависимости двух функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ является либо равенство нулю хотя бы одной из них, либо, в противном случае, выполнение соотношения

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = \mathrm{const}, \tag{33.4}$$

при котором существуют ненулевые α_1 и α_2:

$$-\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \mathrm{const},$$

обращающие (33.3) в тождество.

Для произвольных систем функций существуют более общие критерии исследования линейной зависимости, использующие интегральные или дифференциальные операции в зависимости от условий, налагаемых на функции $\varphi_k(x)$, $k = \overline{1, m}$.

Для их формулировки введём в рассмотрение определители Грама и Вронского.

♦ Число, сопоставляемое каждой паре вещественных функций $x(t)$ и $y(t)$ по правилу

$$\langle x(t)|y(t)\rangle = \int\limits_a^b x(t)y(t)dt = 0, \tag{33.5}$$

называется скалярным произведением функций $x(t)$ и $y(t)$ с весом $\rho(t) > 0$ на интервале $]a, b[$.

Пусть

$$\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^n \tag{33.6}$$

– некоторая система функций, определенная на $]a, b[$.

♦ Определителем Грама системы (33.6) называется определитель

$$\Gamma[\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m] = \begin{vmatrix} \langle\varphi_1|\varphi_1\rangle & \langle\varphi_1|\varphi_2\rangle & \ldots & \langle\varphi_1|\varphi_n\rangle \\ \langle\varphi_2|\varphi_1\rangle & \langle\varphi_2|\varphi_2\rangle & \ldots & \langle\varphi_2|\varphi_n\rangle \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \langle\varphi_m|\varphi_1\rangle & \langle\varphi_m|\varphi_n\rangle & \ldots & \langle\varphi_m|\varphi_n\rangle \end{vmatrix}, \tag{33.7}$$

элементы которого задаются числами

$$\langle\varphi_k|\varphi_s\rangle = \int\limits_b^a \varphi_k(x)\varphi_s(x)dx, \tag{33.8}$$

называемыми скалярным произведением функций $\varphi_k(x)$ и $\varphi_s(x)$.

♦ Определителем Вронского (вронскианом) системы (33.6) называется функциональный определитель

$$W[\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_m]=\begin{vmatrix}\varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_m(x)\\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \dots & \varphi_m'(x)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \varphi_1^{(m-1)}(x) & \varphi_2^{(m-1)}(x) & \dots & \varphi_m^{(m-1)}(x)\end{vmatrix}=$$

$$=\det\left\{\begin{pmatrix}1\\ D\\ \dots\\ D^{m-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_m(x)\end{pmatrix}\right\}. \qquad (33.9)$$

Как следует из (33.7), определитель Грама определен, например, на системах квадратично интегрируемых функций (обеспечивающих существование и конечности интегралов (33.8)), т.е. на функциях $\varphi_k(x)\in L_2$. Что касается определителя Вронского, то он определен на функциях, подчиненных более строгим требованиям: существование непрерывных производных вплоть до $(m-1)$-го порядка включительно, т.е. на функциях $\varphi_k(x)\in\mathcal{C}^{m-1}_{]a,b[}$.

♢ Поскольку, в противоположность определителю Грама, являющегося числом, определитель Вронского в общем случае представляет собой функцию, которую, как мы увидим позже, можно рассматривать как решение некоторого дифференциального уравнения.

Сформулируем теперь критерии, с помощью которых исследуется линейная зависимость заданной системы функций.

Теорема 33.1 (критерий Грама). *Для того чтобы система функций $\varphi_k(x)$, $k=\overline{1,m}$, непрерывных на $[a,b]$, была линейно зависима на этом отрезке, необходимо и достаточно, чтобы её определитель Грама обращался в нуль, т.е. $\Gamma(\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_m)=0$. В противном случае система функций линейно независима.*

Доказательство. Рассмотрим сначала систему из двух функций, т.е. $m=2$. Пусть функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ линейно зависимы. В таком случае они связаны соотношением (33.4): $\varphi_2(x)=\alpha\varphi_1(x)$, а их определитель Грама, согласно (33.7), (33.8), обращается в нуль:

$$\Gamma[\varphi_1,\varphi_2]=\Gamma[\varphi_1,\alpha\varphi_1]=\begin{vmatrix}\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle & \langle\varphi_1|\alpha\varphi_1\rangle\\ \langle\alpha\varphi_1|\varphi_1\rangle & \langle\alpha\varphi_1|\alpha\varphi_1\rangle\end{vmatrix}=\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle^2\begin{vmatrix}1 & \alpha\\ \alpha & \alpha^2\end{vmatrix}=0.$$

Пусть теперь, наоборот, определитель Грама двух функций φ_1 и φ_2 равен нулю, т.е.

$$\Gamma[\varphi_1,\varphi_2]=\begin{vmatrix}\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle & \langle\varphi_1|\varphi_2\rangle\\ \langle\varphi_2|\varphi_1\rangle & \langle\varphi_2|\varphi_2\rangle\end{vmatrix}=0. \qquad (33.10)$$

Как известно, определитель равен нулю тогда и только тогда, когда между его столбцами существует линейная зависимость. Поэтому, исходя из равенства (33.10), можно записать

$$\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle=\alpha\langle\varphi_1|\varphi_2\rangle,$$
$$\langle\varphi_2|\varphi_1\rangle=\alpha\langle\varphi_2|\varphi_2\rangle$$

или

$$\begin{aligned}\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle-\alpha\langle\varphi_1|\varphi_2\rangle=0,\\ \langle\varphi_2|\varphi_1\rangle-\alpha\langle\varphi_2|\varphi_2\rangle=0,\end{aligned} \qquad (33.11)$$

где α – коэффициент пропорциональности.

Равенства (33.11) с учетом (33.8) можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\langle\varphi_1|\varphi_1-\alpha\varphi_2\rangle=0,\\ &\langle\varphi_2|\varphi_1-\alpha\varphi_2\rangle=0. \end{aligned} \tag{33.12}$$

Вычтя из первого уравнения (33.12) второе, умноженное на α, имеем

$$\langle\varphi_1-\alpha\varphi_2|\varphi_1-\alpha\varphi_2\rangle=\int\limits_a^b[\varphi_1(x)-\alpha\varphi_2(x)]^2dx=0.$$

Этот интеграл может быть равен нулю только при условии $\varphi_1(x)=\alpha\varphi_2(x)$, т.е. при условии линейной зависимости $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, что и требовалось доказать.

Для произвольного m доказательство проводится по индукции с использованием (33.2) вместо (33.3).

Перейдём теперь к определителю Вронского, с которым дело обстоит несколько иначе.

Лемма 33.1. *Если система функций $\varphi_k(x)$, $k=\overline{1,m}$, линейно зависима, то их вронскиан на интервале $]a,b[$ тождественно равен нулю, т.е.*

$$W[\varphi_1(x),\varphi_2(x),\dots,\varphi_m(x)]\equiv0,\quad x\in]a,b[.$$

Доказательство. Если система функций $\varphi_k(x)$, $k=\overline{1,m}$, линейна зависима, то существуют постоянные α_k, $k=\overline{1,m}$, не равные нулю и такие, что

$$\alpha_1\varphi_1(x)+\alpha_2\varphi_2(x)+\ldots+\alpha_m\varphi_m(x)\equiv0,\quad x\in]a,b[. \tag{33.13}$$

Поскольку вронскиан определен на системе функций, имеющих непрерывные производные до порядка $(m-1)$ включительно, то дифференцирование соотношения (33.13) $(m-1)$ раз даёт систему

$$\begin{aligned} &\alpha_1\varphi_1(x)+\alpha_2\varphi_2(x)+\ldots+\alpha_m\varphi_m(x)=0,\\ &\alpha_1\varphi_1'(x)+\alpha_2\varphi_2'(x)+\ldots+\alpha_m\varphi_m'(x)=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &\alpha_1\varphi_1^{(m-1)}(x)+\alpha_2\varphi_2^{(m-1)}(x)+\ldots+\alpha_m\varphi_m^{(m-1)}(x)=0. \end{aligned} \tag{33.14}$$

Неравенство нулю всех α_k одновременно означает, что эта алгебраическая для α_k система имеет нетривиальные решения. Из этого следует, что её определитель, которым является вронскиан $W[\varphi_1(x),\varphi_2(x),\dots,\varphi_m(x)]$, равен нулю во всех точках интервала $]a,b[$, т.е. на $]a,b[$ равен нулю тождественно.

Лемма 33.2. *Если вронскиан системы функций $\varphi_k(x)$, $k=\overline{1,m}$, отличен от нуля хотя бы в одной точке интервала $]a,b[$, то эта система функций линейно независима на $]a,b[$.*

Доказательство. Пусть существует точка $x_0\in]a,b[$, в которой вронскиан отличен от нуля: $W[\varphi_1(x_0),\varphi_2(x_0),\dots,\varphi_m(x_0)]\neq0$. Предположим, что система функций $\varphi_k(x)$, $k=\overline{1,m}$, линейно независима. Тогда в силу леммы 33.1 вронскиан этой системы на интервале $]a,b[$ тождественно равен нулю, в том числе и в точке $x=x_0$. Но в этом случае равенство $W[\varphi_1(x_0),\varphi_2(x_0),\dots,\varphi_m(x_0)]=0$

противоречит условию леммы $W[\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0), \ldots, \varphi_m(x_0)] \neq 0$, что и доказывает её справедливость.

Таким образом, мы установили, что если для исследуемой системы $\varphi_k(x)$, $k = \overline{1, m}$, в некоторой точке $x_0 \in]a, b[$ её вронскиан $W[\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0), \ldots, \varphi_m(x_0)]$, или коротко $W(x_0)$, не равен нулю: $W(x_0) \neq 0$, то, согласно лемме 33.2, эта система линейно независима. Если же $W(x_0) = 0$, то вопрос о линейной зависимости функций остаётся открытым.

Пример 33.1. Исследовать на линейную зависимость и возможность применения формулы Лиувилля–Остроградского систему функций

$$\varphi_1(x) = 1, \quad \varphi_2(x) = x, \quad \varphi_3(x) = x^2/2 \tag{33.15}$$

всеми рассмотренными выше методами.

Решение. 1. *Использование определения.* Функции (33.15) определены на всей числовой оси. Предположим, что функции (33.15) линейно зависимы на этом промежутке. Тогда, согласно определению, справедливо тождество

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 x + \alpha_3 \frac{x^2}{2} \equiv 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{33.16}$$

в котором все α_k не обращаются в нуль одновременно, т.е. выполняется неравенство $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 > 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Последнее невозможно (точнее, возможно, но только не более чем в двух точках), поскольку левая часть (33.16) является полиномом не выше второй степени, который, как известно, может обращаться в нуль не более чем в двух точках промежутка вещественной оси. Следовательно, функции (33.16) линейно независимы на любом промежутке $I_1 =]a, b[$.

2. Воспользуемся *определителем Грама.* Согласно определению (33.7), найдём $(a \neq b)$

$$\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle = \langle 1|1\rangle = \int\limits_a^b 1^2 dx = b - a;$$

$$\langle\varphi_1|\varphi_2\rangle = \langle\varphi_2|\varphi_1\rangle = \langle 1|x\rangle = \int\limits_a^b 1 \cdot x\, dx = \frac{b^2 - a^2}{2};$$

$$\langle\varphi_1|\varphi_3\rangle = \langle\varphi_3|\varphi_1\rangle = \langle 1|x^2/2\rangle = \int\limits_a^b 1 \cdot \frac{x^2}{2} dx = \frac{b^3 - a^3}{6};$$

$$\langle\varphi_2|\varphi_2\rangle = \langle x|x\rangle = \int\limits_a^b x \cdot x\, dx = \frac{b^3 - a^3}{3};$$

$$\langle\varphi_2|\varphi_3\rangle = \langle\varphi_3|\varphi_2\rangle = \langle x|x^2/2\rangle = \int\limits_a^b x\frac{x^2}{2} dx = \frac{b^4 - a^4}{8};$$

$$\langle\varphi_3|\varphi_3\rangle = \langle x^2/2|x^2/2\rangle = \int\limits_a^b \frac{x^2}{2}\frac{x^2}{2} dx = \frac{b^5 - a^5}{20}.$$

Отсюда

$$\Gamma[1,x,x^2/2] = \begin{vmatrix} (b-a) & (b^2-a^2)/2 & (b^3-a^3)/6 \\ (b^2-a^2)/2 & (b^3-a^3)/3 & (b^4-a^4)/8 \\ (b^3-a^3)/6 & (b^4-a^4)/8 & (b^5-a^5)/20 \end{vmatrix}.$$

Разложим этот определитель по 3-ей строке:

$$\begin{aligned} \Gamma[1,x,x^2/2] &= \frac{b^3-a^3}{6}\frac{(b-a)^4}{144}(b^2+a^2+4ab)- \\ &- \frac{b^4-a^4}{8}\frac{(b-a)^4(b+a)}{24} + \frac{b^5-a^5}{20}\frac{(b-a)^4}{12} = \\ &= \frac{(b-a)^4}{48}\Big[\frac{b^3-a^3}{18}(b^2+a^2+4ab) - \frac{b^4-a^4}{4}(b+a) + \frac{b^5-a^5}{5}\Big] = \\ &= \frac{(b-a)^4}{24\cdot 360}[b^5-5b^4a+10b^3a^2-10b^2a^3+5ba^4-a^5] = \frac{(b-a)^9}{8640}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\Gamma[1,x,x^2/2] \neq 0$ $(a \neq b)$ на любом промежутке $]a,b[\subset \mathbb{R}$, а, следовательно, система (33.15) линейно независима на этом промежутке.

$\lozenge$ Конечно, вычисление определителя Грама в данном случае достаточно громоздко. Это обусловлено характером системы (33.15), где все $\langle\varphi_k|\varphi_l\rangle \neq 0$. Обычно критерий Грама используется для так называемых ортогональных функций, у которых $\langle\varphi_k|\varphi_l\rangle = 0$ при $k \neq l$, что существенно упрощает вычисления (см. пример 33.4).

3. Воспользуемся *определителем Вронского*. Согласно определению (33.9), имеем

$$W(1,x,x^2/2) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2/2 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0. \tag{33.17}$$

Так как вронскиан (33.17) отличен от нуля на любом промежутке $]a,b[\subset \mathbb{R}$, то система (33.15), как и следовало ожидать, является линейно независимой в $\mathbb{R}$.

4. Метод *дифференциального уравнения для заданной системы функций*

Чтобы найти дифференциальное уравнение, решениями которого являются линейно независимые функции $1, x, x^2/2$, рассмотрим вспомогательную систему $1, x, x^2/2, y(x)$. Если рассматривать эти функции как решения одного уравнения 3-го порядка, т.е. считать $y(x)$ линейной комбинацией первых трех функций, то их вронскиан должен быть тождественным нулем:

$$W[1,x,x^2/2,y(x)] = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2/2 & y(x) \\ 0 & 1 & x & y'(x) \\ 0 & 0 & 1 & y''(x) \\ 0 & 0 & 0 & y'''(x) \end{vmatrix} = 0. \tag{33.18}$$

Разложим определитель (33.18) по четвертой строке с учетом (33.17):

$$W[1,x,x^2/2,y(x)] = W[1,x,x^2/2]y'''(x) = y'''(x) = 0,$$

т.е.

$$y'''(x) = 0. \tag{33.19}$$

Уравнение (33.19) и есть искомое линейное уравнение 3-го порядка, частными решениями которого являются функции (33.15): $1, x, x^2/2$. В этом можно убедиться, подставив их в (33.19). Кроме того, поскольку уравнение (33.19) ещё и допускает понижение порядка, то трехкратное интегрирование даёт его общее решение

$$y(x) = c_1\frac{x^2}{2} + c_2x + c_3,$$

частные решения которого и составляют линейно независимую систему $1, x, x^2/2$.

Из уравнения (33.19) следует, что $W(x) = 1$. Действительно, в этом уравнении коэффициент $a_{3-1}(x) = a_2(x) = 0$, и, следовательно, формула Лиувилля–Остроградского (**??**) в этом случае имеет вид

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_2(t)dt} = W(x_0)e^0 = W(x_0), \quad]x_0, x[\subset]a, b[. \tag{33.20}$$

Здесь процедуру вычисления вронскиана можно с учетом (33.20) упростить, например, положив $x_0 = 0$:

$$W(1, x, x^2/2) = W(1, x, x^2/2)\Big|_{x=0} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2/2 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\Bigg|_{x=0} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Пример 33.2. Пусть система функций $\varphi_k(x)$, $k = \overline{1, m}$, определена на $I =]a, b[$.

1. Если эта система функций линейно независима на I, следует ли из этого их линейная независимость на любом промежутке $I_1 =]\alpha, \beta[\subset I$?

2. Если эта система функций линейно независима на некотором промежутке $I_1 =]\alpha, \beta[\subset I$, следует ли из этого их линейная независимость на всем промежутке I?

Решение. Ответ на первый вопрос отрицательный: не следует, а на второй – положительный: следует. Рассмотрим подробнее.

1. Приведём пример, подтвердающий отрицательный ответ на первый вопрос. Функции x и $|x|$ линейно независимы, например, на промежутке $I =]-1, 2[$, поскольку тождество

$$\alpha_1 x + \alpha_2|x| \equiv 0, \quad x \in I, \tag{33.21}$$

возможно лишь при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Действительно, при $x = -0{,}5$ из (33.21) имеем $-0{,}5(\alpha_1 - \alpha_2) = 0$, а при $x = 0{,}5$ соответственно $0{,}5(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$. Таким образом, получим однородную систему

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= 0, \\ \alpha_1 - \alpha_2 &= 0, \end{aligned}$$

имеющую только тривиальное решение $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Это и означает линейную независимость x и $|x|$ на промежутке $I =] - 1, 2[$.

Если теперь положить $x \in I_1 =]0, 2[$, то из (33.21) имеем $(\alpha_1 + \alpha_2)x \equiv 0$, откуда следует, например, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$ и линейная зависимость x и $|x|$ на промежутке I_1. Если же $x \in I_2 =] - 1, 0[$, то из (33.21) имеем $(\alpha_1 - \alpha_2)x = 0$, откуда следует, например, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ и линейная зависимость x и $|x|$ на промежутке I_2.

Таким образом, функции x и $|x|$ линейно независимы на промежутке $I =] - 1, 2[$, но линейно зависимы как на $I_1 =]0, 2[$, так и на $I_2 =] - 1, 0[$.

Справедливости ради отметим, что, например, в промежутке $I_3 =]-1, 1[\subset I$ функции x и $|x|$ все-таки остаются линейно независимыми. Они будут таковыми на любом промежутке, содержащим точку $x = 0$, роль которой мы выясним позднее (см. «Особые точки дифференциального уравнения»).

По этой же причине при исследовании линейной зависимости функций x и $|x|$ мы не могли воспользоваться их вронскианом, поскольку непрерывная функция $|x|$ имеет разрывную в точке $x = 0$ первую производную.

2. Предположим, что исходная система, линейно независимая на I_1, на всем промежутке $I \subset I_1$ линейно зависима. Тогда на I имеет место тождество

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \ldots + \alpha_m\varphi_m(x) \equiv 0, \quad x \in I,$$

в котором все α_k не обращаются в нуль одновременно. Поскольку $I \supset I_1$, то тождество выполняется и на I_1. Но это означает линейную зависимость функций на I_1, что противоречит условию, доказывая тем самым линейную независимость системы на всем промежутке I.

Далее нам неоднократно придется обращаться к вычислению вронскианов от трех и более функций. В следующем примере будет получена полезная формула, позволяющая понижать порядок исходного вронскиана.

Пример 33.3. Показать, что если фукции $\varphi_k(x)$, $k = \overline{1,m}$, непрерывно дифференцируемы $m-1$ раз на промежутке $]a, b[$ и на этом промежутке $\varphi_1(x) \neq 0$, то для вронскиана функций из этой системы справедливы формулы понижения порядка

$$W[\varphi_1, \varphi_2] = \varphi_1^2\Big(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\Big)', \quad m = 2; \tag{33.22}$$

$$W[\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m] = \varphi_1^m W\Big[\Big(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\Big)', \Big(\frac{\varphi_3}{\varphi_1}\Big)', \ldots, \Big(\frac{\varphi_m}{\varphi_1}\Big)'\Big]. \tag{33.23}$$

Решение. Формула (33.22) очевидна, поскольку

$$W[\varphi_1, \varphi_2] = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix} = \varphi_1\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_2 = \varphi_1^2\Big(\frac{\varphi_1\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_2}{\varphi_1^2}\Big) = \varphi_1^2\Big(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\Big)'.$$

Получим теперь эту формулу таким способом, который можно использовать для вывода более общего соотношения (33.23). Заметим, что

$$\Big(\frac{\varphi_k}{\varphi_1}\Big)' = \varphi_k'\Big(\frac{1}{\varphi_1}\Big) + \varphi_k\Big(\frac{1}{\varphi_1}\Big)', \quad k = 1, 2, \tag{33.24}$$

откуда

$$\varphi_1\Big(\frac{\varphi_k}{\varphi_1}\Big)' = \varphi_k' + \varphi_k\Big(\frac{1}{\varphi_1}\Big)'\varphi_1, \quad k = 1, 2,$$

и, в частности,
при $k = 1$

$$0 = \varphi_1' + \Big(\frac{1}{\varphi_1}\Big)'\varphi_1^2, \tag{33.25}$$

при $k = 2$

$$\varphi_1\Big(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\Big)' = \varphi_2' + \varphi_2\Big(\frac{1}{\varphi_1}\Big)'\varphi_1. \tag{33.26}$$

Заметим далее, что если в определителе второго порядка

$$W[\varphi_1, \varphi_2] = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix} \tag{33.27}$$

первую строку умножить на $(1/\varphi_1)'\varphi_1$ (этот множитель подсказан формулой (33.25)) и сложить со второй строкой, то мы получим определитель

$$W[\varphi_1(x),\varphi_2(x)]=\begin{vmatrix}\varphi_1 & \varphi_2\\ \varphi_1'+\Big(\dfrac{1}{\varphi_1}\Big)'\varphi_1^2 & \varphi_2'+\varphi_2\Big(\dfrac{1}{\varphi_1}\Big)'\varphi_1\end{vmatrix},$$

который с учетом (33.25) и (33.26) примет вид

$$W[\varphi_1(x),\varphi_2(x)]=\begin{vmatrix}\varphi_1 & \varphi_2\\ 0 & \varphi_1\Big(\dfrac{\varphi_2}{\varphi_1}\Big)'\end{vmatrix}=\varphi_1^2\Big(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\Big)'.$$

Формула (33.23) получится аналогично, если вместо (33.24)–(33.26) воспользоваться формулой Лейбница

$$\Big(\frac{\varphi_k}{\varphi_1}\Big)^{(l)}=\varphi_k^{(l)}\Big(\frac{1}{\varphi_1}\Big)+C_l^1\varphi_k^{(l-1)}\Big(\frac{1}{\varphi_1}\Big)'+\ldots+C_l^{l-1}\varphi_k'\Big(\frac{1}{\varphi_1}\Big)^{(l-1)}+\varphi_k\Big(\frac{1}{\varphi_1}\Big)^{(l)},$$

где $k=\overline{1,m}$ и $l=\overline{1,m-1}$, $C_s^m=m!/s!(m-s)!$, и следующей из нее формулой

$$\varphi_1\Big(\frac{\varphi_k}{\varphi_1}\Big)^{(l)}=\varphi_k^{(l)}+C_l^1\varphi_k^{(l-1)}\Big(\frac{1}{\varphi_1}\Big)'\varphi_1+\ldots+C_l^{l-1}\varphi_k'\Big(\frac{1}{\varphi_1}\Big)^{(l-1)}\varphi_1+\varphi_k\Big(\frac{1}{\varphi_1}\Big)^{(l)}\varphi_1.$$

В частности, при $k=1$

$$0=\varphi_1^{(l)}+C_l^1\varphi_1^{(l-1)}\Big(\frac{1}{\varphi_1}\Big)'\varphi_1+\ldots+C_l^{l-1}\varphi_1'\Big(\frac{1}{\varphi_1}\Big)^{(l-1)}\varphi_1+\varphi_1\Big(\frac{1}{\varphi_1}\Big)^{(l)}\varphi_1.$$

Пример 33.4. Исследовать линейную независимость функций $\{\sin kx\}_{k=1}^4$ на промежутке $]0,\pi[$.

Решение. 1. Воспользуемся определителем Грама

$$\Gamma[\sin x,\sin 2x,\sin 3x,\sin 4x]=$$
$$=\begin{vmatrix}\langle\sin x|\sin x\rangle & \langle\sin x|\sin 2x\rangle & \langle\sin x|\sin 3x\rangle & \langle\sin x|\sin 4x\rangle\\ \langle\sin 2x|\sin x\rangle & \langle\sin 2x|\sin 2x\rangle & \langle\sin 2x|\sin 3x\rangle & \langle\sin 2x|\sin 4x\rangle\\ \langle\sin 3x|\sin x\rangle & \langle\sin 3x|\sin 2x\rangle & \langle\sin 3x|\sin 3x\rangle & \langle\sin 3x|\sin 4x\rangle\\ \langle\sin 4x|\sin x\rangle & \langle\sin 4x|\sin 2x\rangle & \langle\sin 4x|\sin 3x\rangle & \langle\sin 4x|\sin 4x\rangle\end{vmatrix}.$$

Вычислим сначала диагональные скалярные произведения:

$$\langle\sin kx|\sin kx\rangle=\int\limits_0^\pi\sin^2 kx\,dx=\frac{\pi}{2}\neq 0 \qquad (33.28)$$

для всех $k=\overline{1,4}$. Остальные ($k\neq l$) скалярные произведения равны нулю:

$$\langle\sin kx|\sin lx\rangle=\int\limits_0^\pi\sin kx\sin lx\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi[\cos(k-l)x-\cos(k+l)x]dx=0,\quad l,k=\overline{1,4}. \qquad (33.29)$$

Таким образом,

$$\Gamma[\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \sin 4x] = \begin{vmatrix} \dfrac{\pi}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\pi}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{\pi}{2} \end{vmatrix} = \Big(\frac{\pi}{2}\Big)^4 \neq 0,$$

что означает линейную независимость исследуемых функций.

$\Diamond$ Система функций, удовлетворяющих условиям (33.28) и (33.29) на некотором промежутке $]a, b[$, называется ортогональной на этом промежутке. Вычисление определителя Грама таких функций показывает, что ортогональные на $]a, b[$ функции линейно независимы на этом промежутке.

2. Воспользуемся определителем Вронского

$$W[\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \sin 4x] = \begin{vmatrix} \sin x & \sin 2x & \sin 3x & \sin 4x \\ \cos x & 2\cos 2x & 3\cos 3x & 4\cos 4x \\ -\sin x & -4\sin 2x & -9\sin 3x & -16\sin 4x \\ -\cos x & -8\cos 2x & -9\cos 3x & -64\cos 4x \end{vmatrix}.$$

Вместо громоздкого вычисления этого определителя воспользуемся формулой (33.23):

$$W[\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \sin 4x] = \sin^4 x\, W\Big[\Big(\frac{\sin 2x}{\sin x}\Big)', \Big(\frac{\sin 3x}{\sin x}\Big)' \Big(\frac{\sin 4x}{\sin x}\Big)'\Big],$$

поскольку все функции удовлетворяют условиям её применимости.

Теперь, используя известные тригонометрические соотношения, найдём

$$\begin{aligned} &\Big(\frac{\sin 2x}{\sin x}\Big)' = \Big(\frac{2\sin x\cos x}{\sin x}\Big)' = -2\sin x; \\ &\Big(\frac{\sin 3x}{\sin x}\Big)' = \Big(\frac{3\sin x - 4\sin^3 x}{\sin x}\Big)' = (3 - 4\sin^2 x)' = -8\sin x\cos x; \\ &\Big(\frac{\sin 4x}{\sin x}\Big)' = \Big[\frac{\cos x(4\sin x - 8\sin^3 x)}{\sin x}\Big]' = (4\cos x - 8\cos x\sin^2 x)' = \\ &\qquad = \sin x(-4 + 8\sin^2 x - 16\cos^2 x). \end{aligned}$$

Тогда

$$W(x) = \sin^4 x W[-2\sin x, -8\sin x\cos x, \sin x(-4 + 8\sin^2 x - 16\cos^2 x)].$$

Применив формулу (33.23) ещё раз, получим

$$\begin{aligned} W(x) &= \sin^4 x(-2\sin x)^3 W[(4\cos x)', (2 - 4\sin^2 x + 8\cos^2 x)'] = \\ &= -8\sin^7 x\, W[-4\sin x, -24\sin x\cos x] \end{aligned}$$

и, наконец,

$$W(x) = -8\sin^4 x(-4\sin x)^2\Big(\frac{-24\sin x\cos x}{-4\sin x}\Big)' = 32\sin^9 x(6\cos x)' = -192\sin^{10} x.$$

Вронскиан $W[\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \sin 4x] = -192\sin^{10} x \neq 0$ для всех x из промежутка $]0, \pi[$, что подтверждает результатт, полученный методом Грама: система линейно независима.

Пример 33.5. Исследовать на линейную зависимость системы функций:

$$1)\ 1, \operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x; \quad 2)\ e^x, \operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x; \quad 3)\ 1, \arcsin x, \arccos x; \quad 4)\ x^2, x|x|.$$

Решение. 1. Функции $1, \operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x$ обладают непрерывными производными любого порядка на любом промежутке $]a, b[\subset \mathbb{R}$. Вычисление их вронскиана даёт

$$W[1, \operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x] = \begin{vmatrix} 1 & \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \\ 0 & \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \\ 0 & \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \end{vmatrix} = \operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x = -1 \neq 0.$$

Это означает линейную независимость заданной системы функций на любом промежутке $]a, b[\subset \mathbb{R}$.

2. Как и в предыдущем случае, функции $e^x, \operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x$ обладают непрерывными производными любого порядка. Их вронскиан можно вычислить как по по определению:

$$W[e^x, \operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x] = \begin{vmatrix} e^x & \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \\ e^x & \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \\ e^x & \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \end{vmatrix} = 0, \quad x \in]a, b[\subset \mathbb{R}$$

(первая и третья строки совпадают), так и по формуле понижения порядка (33.23):

$$W[e^x, \operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x] = e^{3x} W\Big[\Big(\frac{e^x + e^{-x}}{2e^x}\Big)', \Big(\frac{e^x - e^{-x}}{2e^x}\Big)'\Big] =$$
$$= e^{3x} W[-e^{-2x}, e^{-2x}] = e^{3x} e^{-4x} (-1)' = 0, \quad x \in]a, b[\subset \mathbb{R}.$$

Естественно, результаты совпали. Вронскиан системы обращается в нуль и вопрос о линейной зависимости системы остаётся открытым.

Однако, если учесть тот факт, что функции $e^x, \operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x$ являются частными решениями одного уравнения 3-го порядка $y''' - y' = 0$, то вывод об их линейной зависимости вытекает непосредственно из теоремы **??**.

Этот вывод подтверждается и использованием определения линейной независимости. Действительно, линейная комбинация

$$\alpha_1 e^x + \alpha_2 \operatorname{ch} x + \alpha_3 \operatorname{sh} x \equiv 0$$

или

$$\Big(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2} + \frac{\alpha_3}{2}\Big) e^x + \Big(\frac{\alpha_2}{2} - \frac{\alpha_3}{2}\Big) e^{-x} \equiv 0$$

обращается тождественно в нуль на любом промежутке $]a, b[\subset \mathbb{R}$ при ненулевых коэффициентах, например $\alpha_2 = \alpha_3 = 1$, $\alpha_1 = -1$.

3. Функции $1, \arcsin x, \arccos x$ обладают непрерывными производными любого порядка на промежутке $]-1, 1[$. Вычисление их вронскиана по формуле понижения порядка (33.23) даёт

$$W[1, \arcsin x, \arccos x] = W\Big[\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\Big] = 0, \quad x \in]-1, 1[,$$

(функции различаются только знаком).

Поскольку вронскиан обращается в нуль и сделать вывод о линейной зависимости этих функций нельзя, воспользуемся определением:

$$\alpha_1 + \alpha_2 \arcsin x + \alpha_3 \arccos x \equiv 0, \quad x \in]-1, 1[.$$

Эта линейная комбинация обращается тождественно в нуль на промежутке $]-1,1[$ при ненулевых коэффициентах: $\alpha_1=-\pi/2$, $\alpha_2=\alpha_3=1$ в силу известного равенства

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2},$$

следовательно, функции $1,\arcsin x,\arccos x$ на промежутке $]-1,1[$ линейно зависимы.

4. Непрерывные функции x^2 и $x|x|$ обладают непрерывными производными первого порядка на любом промежутке $]a,b[\subset\mathbb{R}$. Вычислим их вронскиан:

$$W(x^2,x|x|)=\begin{vmatrix}x^2 & x|x|\\ 2x & 2|x|\end{vmatrix}\equiv 0. \tag{33.30}$$

Поскольку вронскиан обращается в нуль и вывод о линейной зависимости сделать нельзя, то обратимся к определению. Линейная комбинация

$$\alpha_1x^2+\alpha_2x|x|\equiv 0 \tag{33.31}$$

на любом промежутке $]-|a|,|b|[\subset\mathbb{R}$, содержащем точку $x=0$, обращается в нуль только при условии $\alpha_1=\alpha_2=0$. Действительно, $\alpha_1-\alpha_2=0$, например, при $x=-1$ и $\alpha_1+\alpha_2=0$ при $x=1$. Однородная система $\alpha_1-\alpha_2=0$, $\alpha_1+\alpha_2=0$ имеет только тривиальное решение $\alpha_1=\alpha_2=0$. Это означает, что на любом промежутке $]-|a|,|b|[\subset\mathbb{R}$ функции x^2 и $x|x|$ линейно независимы.

Если линейную комбинацию (33.31) рассматривать на любом промежутке, не содержащем точку $x=0$, например, на $]|a|,|b|[$ или $]-|a|,-|b|[$, то функции становятся линейно зависимыми. Действительно, на промежутке $]|a|,|b|[$ эти функции просто совпадают: x^2 и $x|x|=x^2$, а на промежутке $]-|a|,-|b|[$ они различаются только знаком: x^2 и $x|x|=-x^2$.

Система функций x^2 и $x|x|$ является наглядным примером систем, вронскиан которых тождественно равен нулю как на промежутке их линейной зависимости, так и на промежутке их линейной независимости.

Пример 33.6. Показать, что функции $1,x,\ldots,x^{m-1}$, $m\in\mathbb{N}$, линейно независимы на любом $]a,b[\subset\mathbb{R}$. Записать уравнение, решениями которого являются эти функции.

Решение. Этот пример является обобщением примера 33.1, где рассматривалась аналогичная система для $m=3$. Мы не будем в данном случае использовать определитель Грама в силу громоздкости его вычисления, а воспользуемся определением линейной независимости системы функций и их вронскианом. Прежде, однако, отметим, что исследуемые функции являются непрерывными и имеют непрерывные производные любого порядка на любом промежутке $]a,b[\subset\mathbb{R}$.

1. Воспользуемся определением и предположим, что функции линейно зависимы на некотором промежутке $]a,b[$. Тогда на этом промежутке справедливо тождество

$$\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\ldots+\alpha_{m-1}x^{m-1}\equiv 0, \tag{33.32}$$

в котором все α_k, $k=\overline{0,m-1}$, не обращаются в нуль все одновременно. Но это тождество не может быть справедливым для всех точек промежутка $]a,b[$, поскольку левая часть (33.32) является полиномом степени не выше $m-1$, который, как известно, может обращаться в нуль не более чем в $(m-1)$-й точке этого промежутка. Следовательно, функции $1,x,\ldots,x^{m-1}$ линейно независимы на $]a,b[$.

2. Этот же результат даёт вычисление вронскиана

$$W[1,x,\ldots,x^{m-1}] = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \ldots & x^{m-1} \\ 0 & 1! & 2x & \ldots & (m-1)x^{m-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & (m-1)! \end{vmatrix} =$$
$$= 1\cdot 1!\cdot 2!\cdots(m-1)! \neq 0.$$

3. Поскольку вронскиан системы отличен от нуля и имеет треугольный вид, то легко получить уравнение, решениями которого являются заданные функции. Проведя вычисления, аналогичные приведённым в примере 33.1, найдём

$$W[1,x,\ldots,x^{m-1},y(x)] = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \ldots & x^{m-1} & y(x) \\ 0 & 1! & 2x & \ldots & (m-1)x^{m-2} & y'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & (m-1)! & y^{(m-1)}(x) \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & y^{(m)}(x) \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$y^{(m)}(x) = 0. \tag{33.33}$$

Это уравнение допускает понижение порядка. Проинтегрировав его m раз, получим его общее решение

$$y(x) = c_1 + c_2 x + \ldots + c_{m-1}x^{m-1}.$$

Очевидно, что исходная система $1, x, \ldots, x^{m-1}$ есть система линейно независимых на любом промежутке $]a, b[$ частных решений уравнения (33.33).

Пример 33.7. Показать, что функции $e^{k_1 x}, \ldots, e^{k_m x}$ линейно независимы на $]a, b[$, если $k_1, \ldots, k_m$ – различные комплексные числа.

Решение. Действительно,

$$W[e^{k_1 x},\ldots,e^{k_m x}] = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & \ldots & e^{k_m x} \\ k_1 e^{k_1 x} & \ldots & k_m e^{k_m x} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ k_1^{m-1}e^{k_1 x} & \ldots & k_m^{m-1}e^{k_m x} \end{vmatrix} =$$
$$= e^{(k_1+\ldots+k_m)x}\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ k_1 & \ldots & k_m \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ k_1^{m-1} & \ldots & k_m^{m-1} \end{vmatrix} = e^{(k_1+\ldots+k_m)x}\prod_{1\le j\le i<m-1}(k_i-k_j)\neq 0,$$

так как последний определитель есть определитель Вандермонда, который не равен нулю, если все k_i различны, как не равна нулю и $\exp[(k_1+\ldots+k_m)x]$.

Рассмотрим, наконец, комплекснозначные функции действительного аргумента $w(x) = u(x) + iv(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Пример 33.8. Показать, что если система функций

$$w_k(x) = u_k(x) + iv_k(x), \quad w_k^*(x) = u_k(x) - iv_k(x), \quad k = \overline{1, m},$$

линейно независима на промежутке $]a, b[\subset \mathbb{R}$, то система функций

$$u_k(x), v_k(x), \quad k = \overline{1, m},$$

также линейно независима на этом промежутке.

Решение. Составим тождество

$$\sum_{k=1}^{m}[\alpha_k u_k(x) + \beta_k v_k(x)] \equiv 0,$$

где α_k и β_k – некоторые коэффициенты линейной комбинации. Принимая во внимание, что

$$u_k(x) = \frac{1}{2}[w_k(x) + w_k^*(x)], \quad v_k(x) = \frac{1}{2i}[w_k(x) - w_k^*(x)],$$

это тождество можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{m}\Big[\frac{\alpha_k}{2}(w_k + w_k^*) + \frac{\beta_k}{2i}(w_k - w_k^*)\Big] \equiv 0$$

или

$$\sum_{k=1}^{m}\Big[\frac{\alpha_k + i\beta_k}{2}w_k + \frac{\alpha_k - i\beta_k}{2i}w_k^*\Big] \equiv 0.$$

Из последнего равенства в силу линейной независимости на $]a, b[$ системы функций w_k, w_k^*, $k = \overline{1, m}$, следует

$$\begin{array}{l} \alpha_k + i\beta_k = 0, \\ \alpha_k - i\beta_k = 0, \end{array} \quad k \in \overline{1, m},$$

откуда $\alpha_k = \beta_k \equiv 0$, $k = \overline{1, m}$, что и означает линейную независимость функций $u_k(x), v_k(x)$, $k = \overline{1, m}$.

Пример 33.9. Доказать линейную независимость на любом промежутке $[a, b[\subset \mathbb{R}$ системы функций

$$\begin{array}{l} e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x,\ e^{\alpha_2 x}\cos\beta_2 x,\ \ldots,\ e^{\alpha_m x}\cos\beta_m x, \\ e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x,\ e^{\alpha_2 x}\sin\beta_2 x,\ \ldots,\ e^{\alpha_m x}\sin\beta_m x, \end{array}$$

где α_s, β_s — действительные числа, $\beta_s \neq 0$, $s = \overline{1, m}$, при условии, что все комплексные числа $k_s = \alpha_s + i\beta_s$ не равны между собой и $k_s \neq \bar{k}_s$.

Решение. Данные функции линейно независимы на любом промежутке $]a, b[\subset \mathbb{R}$, так как они являются действительными и мнимыми частями функций вида

$$\begin{array}{l} w_s = e^{k_s x} = e^{\alpha_s x}(\cos\beta_s x + i\sin\beta_s x), \\ \bar{w}_s = e^{\bar{k}_s x} = e^{\alpha_s x}(\cos\beta_s x - i\sin\beta_s x), \end{array} \quad s = \overline{1, m},$$

линейная независимость которых показана в примере 33.7.

Список литературы

1. Багров В.Г., Белов В.В., Задорожный В.Н., Трифонов А.Ю. *Методы математической физики.* Т. I: *Основы комплексного анализа. Элементы вариационного исчисления и теории обобщенных функций.* — Томск: Изд-во НТЛ, 2002. — 672 с.
2. Берман Г.Н. *Сборник задач по курсу математического анализа.* – М.: Наука, 1985.
3. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. *Краткий курс математического анализа.* – М.: Наука, 1971.
4. Бугров Я.С., Никольский С.М. *Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного.* – М.: Наука, 1985.
5. Бугров Я.С., Никольский С.М. *Задачник.* – М.: Наука, 1987.
6. Демидович Б.П. *Лекции по математической теории устойчивости.* – М.: Наука, 1967.
7. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. *Высшая математика в упражнениях и задачах.* – М.: Высшая школа, 1980.
8. Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Основы математического анализа (в 2-х томах).* – М. Наука, 1971 (т.1), 1973 (т.2).
9. Кальницкий Л.А., Добротин Д.А., Жевержев В.Ф. *Специальный курс высшей математики.* – М.: Высшая школа, 1976. – 400 с.
10. Каплан И.А. *Практические занятия по высшей математике* (в 3-х томах). – Харьков: Изд-во ХГУ. – Т. 1. – 1965; Т. 2 – 1971; Т. 3 – 1972.
11. Кудрявцев Л.Д. *Курс математического анализа* (в 2-х т.). – М.: Наука, 1981 (т. 1), 1982 (т. 2).
12. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. *Курс высшей математики.* – М.: Наука, 1971.
13. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. *Краткий курс высшей математики.* – М.: Наука, 1986.
14. Кузнецов Л.А. *Сборник индивидуальных заданий по курсу высшей математики.* – М. Наука, 1964.
15. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. *Математический анализ в примерах и задачах* (в 2-х т.). – Киев: Вища школа, т. 1 – 1975, т. 2 – 1977.
16. Мышкис А.Д. *Математика для ВТУЗОВ* (в 2-х т.). – М.: Наука, 1971 (т. 1), 1973 (т. 2).
17. Пискунов Н.С. *Дифференциальное и интегральное исчисление.* – М.: Наука, 1985.
18. Терехина Л.И., Фикс И.И. *Высшая математика.* Ч. 2. *Предел, непрерывность, производная, приложения производной, функции нескольких переменных*: Учебное пособие. – Томск: Изд-во ТПУ, 2002. – 180 с.
19. Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления* (в 3-х т.). – М.: Наука, 1966.