Интегрирование по частям

$$\int u dv = uv - \int v du$$

1. $\left\{\begin{array}{l}\int p_n(x) e^{\alpha x} dx \\ \int p_n(x) a^{\beta x} dx \\ \int P_n(x) \sin \alpha x dx \\ \int P_n(x) \cos \alpha x dx\end{array}\right. \Rightarrow u = P_n(x)$

2. $\left\{\begin{array}{l}\int P(x) \log_a x dx \\ \int P(x) arctg \alpha x dx \\ \int P(x) arcctg \alpha x dx \\ \int P(x) \arcsin \alpha x dx \\ \int P(x) \arccos \alpha x dx\end{array}\right. \Rightarrow dv = P(x) dx$

3. Циклические интегралы (формула интегрирования по частям применяется два раза)

$\left\{\begin{array}{l}\int e^{\alpha x} \cos \beta x dx \\ \int e^{\alpha x} \sin \beta x dx\end{array}\right. \Rightarrow u = e^{\alpha x}$

Интегрирование рациональных функций

1. Проверяем, является ли рациональная дробь $\dfrac{Q(x)}{P(x)}$ правильной. Если у дроби степень многочлена в числителе не меньше степени многочлена в знаменателе (т.е. дробь неправильная), то делением многочлена на многочлен выделяем целую часть.

2. Раскладываем $P(x)$ на вещественные множители (линейные и квадратичные).

3. Представляем правильную рациональную дробь в виде суммы простейших дробей по правилу:

а) множителю знаменателя $(x-a)^k$ соответствуют дроби

$$\frac{A_1}{(x-a)^k} + \frac{A_2}{(x-a)^{k-1}} + \cdots + \frac{A_{k-1}}{(x-a)^2} + \frac{A_k}{(x-a)};$$

б) множителю знаменателя $(x^2+px+q)^l$ $(D<0)$ соответствуют дроби

$$\frac{M_1 x + N_1}{(x^2+px+q)^l} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2+px+q)^{l-1}} + \cdots + \frac{M_l x + N_l}{x^2+px+q}.$$

4. Приводим сумму простых дробей к общему знаменателю и сравниваем числители исходной и полученной дроби.

5. Находим неопределённые коэффициенты разложения.

6. Находим интеграл от рациональной дроби, как от суммы функций.

Интегрирование иррациональных функций

(R – рациональная функция своих аргументов)

1. $\int R\left(x, x^{m/n}, \ldots x^{r/s}\right) dx \Rightarrow \left|\begin{array}{l}\textit{замена} \\ x = t^k,\ dx = kt^{k-1} dt\end{array}\right|$

2. $\int R\left(x, (ax+b)^{m/n}, \ldots, (ax+b)^{r/s}\right) dx \Rightarrow \left|\begin{array}{l}\textit{замена} \\ ax+b = t^k\end{array}\right|$

3. $\int R\left(x, \left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{m/n}, \ldots, \left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{r/s}\right) dx \Rightarrow \left|\begin{array}{l}\textit{замена} \\ \dfrac{ax+b}{cx+d} = t^k\end{array}\right|$, где k – общий знаменатель дробей m/n,..., r/s (наименьшее общее кратное знаменателей $m, \ldots, s$).

4. $\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right) dx \Rightarrow \left|\begin{array}{l}\textit{замена} \\ x = a \sin t,\ dx = a \cos t dt\end{array}\right|$

5. $\int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right) dx \Rightarrow \left|\begin{array}{l}\textit{замена} \\ x = a tg t,\ dx = \dfrac{a dt}{\cos^2 t}\end{array}\right|$

6. $\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right) dx \Rightarrow \left|\begin{array}{l}\textit{замена} \\ x = \dfrac{a}{\cos t},\ dx = \dfrac{a \sin t dt}{\cos^2 t}\end{array}\right|$

7.

$$\int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{a(x+b/2a)^2 + c - b^2/4a}} \left|\begin{array}{l}\textit{замена} \\ x + b/2a = t,\ dx = dt\end{array}\right|$$

Интегрирование простейших дробей I, II и III типов

1. $\int \dfrac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + c$.

2. $\int \dfrac{A}{(x-a)^k} dx = \dfrac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + c$.

3.

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \int \frac{Ax+B}{(x+p/2)^2 + q - p^2/4} dx =$$

$\left|\begin{array}{l}\textit{замена} \\ x + p/2 = t,\ dx = dt\end{array}\right|$, где $D = p^2 - 4q < 0$

Интегрирование дифференциального бинома

$$\int x^m \left(ax^n + b\right)^p dx,\ m, n \in Q$$

1. $p > 0$ (p – целое). Возводим выражение $(ax^n + b)$ в степень p по формуле бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 + \cdots + b^n$$

2. $p < 0$ (p – целое). Замена $\left|x = t^k\right|$, где k – общий знаменатель дробей n и m.

Интегрирование дифференциального бинома

$$\int x^m \left(ax^n + b\right)^p dx,\ m, n \in Q$$

3. $p = \dfrac{r}{s}$ – дробь и $\dfrac{m+1}{n}$ – целое число. Замена $\left|ax^n + b = t^s\right|$.

4. $p = \dfrac{r}{s}$ – дробь и $\dfrac{m+1}{n} + p$ – целое число.

Замена $\left|ax^n + b = t^s x^n\right|$, где s – знаменатель p.

Интегрирование тригонометрических функций

(R – рациональная функция)

1. Универсальная подстановка

$$\int R(\sin x,\cos x)dx = \left| \begin{array}{l} \text{замена} \\ tg\,\frac{x}{2}=t,\, dx=\frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right|$$

2. Если $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$, то

$$\int R(\sin x,\cos x)dx = \left| \begin{array}{l} \text{замена} \\ tgx=t,\, dx=\frac{dt}{1+t^2} \\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2},\, \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \end{array} \right|$$

3. $\int R(tgx)dx = \left| \begin{array}{l} \text{замена} \\ tgx=t,\, dx=\frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right|$

4. $\int R(ctgx)dx = \left| \begin{array}{l} \text{замена} \\ ctgx=t,\, dx=-\frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right|$

5. $\int R(\sin x)\cos xdx = \left| \begin{array}{l} \text{замена} \\ \sin x=t,\, \cos xdx=dt \end{array} \right|$

6. $\int R(\cos x)\sin xdx = \left| \begin{array}{l} \text{замена} \\ \cos x=t,\, \sin xdx=-dt \end{array} \right|$

Интегрирование тригонометрических функций

7. $\int \sin mx\cdot\cos nxdx$, $\int \cos mx\cdot\cos nxdx$, $\int \sin mx\cdot\sin nxdx$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right]$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$$

8. $\int \sin^n xdx$, $\int \cos^n xdx$, $\int \sin^n x\cos^m xdx$

а) если *n, m* – чётные целые положительные числа, то применяем формулы понижения степени

$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$,

$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$;

б) n – рациональное или целое число, m –нечётное положительное целое число

$$\int \sin^n x\cos^m xdx=\int \sin^n x\cos^{m-1} x\cos xdx=$$

$$=\int \sin^n x\left(1-\sin^2 x\right)^{\frac{m-1}{2}} d(\sin x)=\left| \begin{array}{l} \text{замена} \\ \sin x=t, \end{array} \right|$$

в) m – рациональное или целое число, n – нечётное положительное целое число

$$\int \sin^n x\cos^m xdx=\int \sin^{n-1} x\cos^m x\sin xdx=$$

$$=-\int \left(1-\cos^2 x\right)^{\frac{n-1}{2}}\cos^m xd(\cos x)=\left| \begin{array}{l} \text{замена} \\ \cos x=t, \end{array} \right|$$

Интегрирование некоторых трансцендентных функций

1. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}} = \left| \begin{array}{l} \text{подстановка} \\ e^x=t,\, x=\ln t,\, dx=\frac{dt}{t} \end{array} \right|$

2. $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{e^x+1}} = \left| e^x+1=t^4,\, x=\ln\left(t^4-1\right),\, dx=\frac{4t^3dt}{t^4-1} \right|$

3. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} = \left| \begin{array}{l} \text{подстановка} \\ x=atgt \\ \text{или}\quad x=\frac{1}{z} \end{array} \right|$

4. $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx = \left| \begin{array}{l} \text{по частям} \\ u=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right),\, dv=dx \end{array} \right|$

5. $\int \frac{xdx}{\cos^2 x} = \left| \begin{array}{l} \text{по частям} \\ u=x,\, dv=\frac{dx}{\cos^2 x} \end{array} \right|$

6. $\int \frac{\ln xdx}{\sqrt{x}} = \left| \begin{array}{l} \text{по частям} \\ u=\ln x,\, dv=\frac{dx}{\sqrt{x}} \end{array} \right|$

«Неберущиеся» интегралы

$\int \frac{e^x}{x}dx$, $\int \frac{dx}{\ln x}$, $\int \frac{\sin x}{x}dx$, $\int \frac{\cos x}{x}dx$, $\int \cos\left(x^2\right)dx$, $\int \sin\left(x^2\right)dx$, $\int e^{-x^2}dx$