Глава 1.
Неопределенный интеграл

Лектор Ефремова О.Н.

2022 г.

§1. Первообразная функция и неопределенный интеграл

Основная задача дифференциального исчисления -

нахождение $f'(x)$ или $d(f(x)$ для функции $f(x)$.

Обратная задача - нахождение $f(x)$, если известна $f'(x)$.

Определение. *Пусть $f(x)$ и $F(x)$ определены на $X\subseteq\mathbb{R}$.*
Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** *для функции $f(x)$ на промежутке $X\subseteq\mathbb{R}$, если $F(x)$ дифференцируема на X и $\forall x\in X$ выполняется равенство*

$$F'(x) = f(x).$$

Примеры.

1. $F(x) = \sin x$ – первообразная для $f(x) = \cos x$ на $\mathbb{R}$, т. к.

$$(\sin x)' = \cos x\ ,\ \ \forall x\in\mathbb{R}.$$

2. $F(x) = \ln|x|$ – первообразная для $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, т. к.

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}.$$

Возникают вопросы:

1. Для любой ли функции существует первообразная?
2. Если функция имеет первообразную, то будет ли она единственной?

Теорема 1 (о связи первообразных).

Пусть $F(x)$ *– первообразная для функции* $f(x)$ *на* X.

Функция $\Phi(x)$ *будет первообразной для* $f(x)$ *на* X $\Leftrightarrow$ *функции* $\Phi(x)$ *и* $F(x)$ *на* X *связаны равенством*

$$\Phi(x) = F(x) + C,$$

где C *– некоторое число.*

Доказательство.

Определение. *Множество всех первообразных функции* $f(x)$ *называют* ***неопределенным интегралом*** *от функции* $f(x)$ *и обозначают символом* $\int f(x)dx$.

Называют:

символ $\int$ – знак интеграла.

$f(x)$ – подынтегральная функция,

$f(x)dx$ – подынтегральное выражение,

x – переменная интегрирования.

По определению и теореме 1 $\int f(x)dx = F(x) + C$,

где $F(x)$ – любая первообразная для $f(x)$, C – произвольная постоянная.

Операция нахождения первообразной для функции $f(x)$ называется ***интегрированием функции*** $f(x)$.

Теорема 2 (достаточное условие интегрируемости).

Если функция непрерывна на некотором промежутке, то она имеет на этом промежутке первообразную.

Замечание.

Производная от элементарной функции всегда является функцией элементарной.

Первообразная от элементарной функции может не быть функцией элементарной.

Интегралы от таких функций называются ***неберущимися***.

Примеры неберущихся интегралов

$$\int e^{-x^2}dx, \quad \int \sin x^2 dx, \quad \int \cos x^2 dx,$$

$$\int \frac{\sin x}{x}dx, \quad \int \frac{\cos x}{x}dx, \quad \int \frac{e^x}{x}dx, \quad \int \frac{dx}{\ln x}.$$

Свойства неопределенного интеграла

1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

2. Интеграл от дифференциала функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int d(F(x)) = F(x) + C.$$

Так как $d(F(x)) = F'(x)dx$, то формула примет вид

$$\int F'(x)dx = F(x) + C.$$

3. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух (конечного числа) функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций:

$$\int (f(x) \pm \varphi(x))dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx \; .$$

Доказательство.

4. Постоянный множитель k $(k \neq 0)$ можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

Доказательство.

Таблица интегралов

1. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

2. $\int dx = x + C$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

4. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

5. $\int e^x\,dx = e^x + C$

6. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

7. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

10. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$

11. $\int \frac{dx}{1 + x^2} = arctg\, x + C$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C$

14. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a + x}{a - x}\right| + C$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C$

16. $\int shx\,dx = chx + C$

17. $\int chx\,dx = shx + C$

18. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = th\,x + C$

19. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cth\,x + C$

§2. Методы интегрирования

1. Непосредственное интегрирование

Суть метода: с помощью простых преобразований подынтегральную функцию записывают в виде суммы функций, первообразные для которых известны.

Простые преобразования: арифметические действия, формулы сокращенного умножения, формулы алгебры и геометрии и т.д.

1) $$tg^2(x) = \frac{sin^2 x}{cos^2 x} = \frac{1 - cos^2 x}{cos^2 x} = \frac{1}{cos^2 x} - 1$$

2) $$\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}} = \frac{x^2 - 2x + 1}{\sqrt{x}} = \frac{x^2}{\sqrt{x}} - \frac{2x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{3/2} - 2x^{1/2} + x^{-1/2}$$

Примеры. Найти интегралы.

$$\int 1dx = x + c$$

1) $$\int (x^2 + 2e^x - 5)dx = \int x^2\, dx + 2\int e^x dx - 5\int dx =$$

$$= \frac{x^{2+1}}{2+1} + 2e^x - 5x + c = \frac{x^3}{3} + 2e^x - 5x + c.$$

2) $$\int \left(x - \frac{1}{x^2}\right)^2 dx = \int \left(x^2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^4}\right) dx = \int x^2 dx - 2\int \frac{dx}{x} + \int x^{-4} dx =$$

$$= \frac{x^{2+1}}{2+1} - 2ln|x| + \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + c = \frac{x^3}{3} - 2ln|x| - \frac{x^{-3}}{3} + c.$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad \int e^x dx = e^x + c \qquad \int \frac{dx}{x} = ln|x| + c$$

3) $$\int \frac{(x^2-3)dx}{x^2+1} = \int \frac{(x^2+1)-4}{x^2+1}dx = \int \frac{x^2+1}{x^2+1}dx - \int \frac{4dx}{x^2+1} =$$

$$= \int dx - 4\int \frac{dx}{1+x^2} = x - 4arctgx + c.$$

$$\int 1dx = x + c \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + c$$

2. Замена переменной (метод подстановки)

Определение. *Функция $y = f(x)$ называется* ***непрерывно дифференцируемой*** *на промежутке $X \subseteq \mathbb{R}$, если $f(x)$ дифференцируема на X, причем ее производная $f'(x)$ – непрерывна на X.*

Теорема 3 (о замене переменной под знаком интеграла).
Пусть $\varphi: T \to X$ и $x = \varphi(t)$ – непрерывно дифференцируема на T,
$f: X \to Y$ и $y = f(x)$ *непрерывна на X.*
Тогда функции $f(x)$ и $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ *интегрируемы на X и T соответственно, причем, если*

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

то

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C.$$

Доказательство.

3. Внесение функции под знак дифференциала

(частный случай подстановки)

Следствие теоремы 3 (об инвариантности формул интегрирования).

Любая формула интегрирования будет справедливой, если в ней заменить переменную на непрерывно дифференцируемую функцию, т.е., если

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

то

$$\int f(u)du = F(u) + C,$$

где $u = \varphi(x)$ *– любая непрерывно дифференцируемая функция.*

Например,

$$\int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$\int \cos(x^2+1)d(x^2+1) = \sin(x^2+1) + C,$$

$$\int \cos e^x d(e^x) = \sin e^x + C$$

Примеры. Найти интегралы

$$\int f(u)du = F(u) + c, \text{ где } u = u(x).$$

$$dy = y'dx, \quad \text{где } y = y(x)$$

$$dx = \frac{dy}{y'}, \quad \text{где } y = y(x)$$

Пример 1. $$\int \sin(3x)\, d(x) = \int \sin(3x) \frac{d(3x)}{(3x)'} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \sin(3x)\, d(3x) = -\frac{1}{3}\cos(3x) + c.$$

Пример 2. $$\int \cos(5x+1)\, d(x) = \int \cos(5x+1) \frac{d(5x+1)}{(5x+1)'} =$$

$$= \frac{1}{5}\int \cos(5x+1)\, d(5x+1) = \frac{1}{5}\sin(5x+1) + c.$$

Пример 3. $$\int xe^{-x^2}\, d(x) = \int xe^{-x^2} \frac{d(-x^2)}{(-x^2)'} = \int \cancel{x}e^{-x^2} \frac{d(-x^2)}{(-2\cancel{x})} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int e^{-x^2} d(-x^2) = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c.$$

Пример 4. $$\int \frac{e^x d(x)}{e^x+2} = \int \frac{e^x d(e^x+2)}{(e^x+2)(e^x+2)'} = \int \frac{\cancel{e^x} d(e^x+2)}{(e^x+2)(\cancel{e^x})} =$$

$$= \int \frac{d(e^x+2)}{e^x+2} = \int \frac{du}{u} = ln|u| + c = \ln(e^x+2) + c.$$

Пример 5. $$\int \frac{\arcsin x d(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\arcsin x d(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}(\arcsin x)'} = \int \frac{\arcsin x d(\arcsin x)}{\cancel{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1}{\cancel{\sqrt{1-x^2}}}} =$$

$$= \int \arcsin x d(\arcsin x) = \int u du = \frac{u^2}{2} + c = \frac{(\arcsin x)^2}{2} + c.$$

Пример 6. $$\int \frac{\sqrt[3]{\ln x} d(x)}{x} = \int \frac{\sqrt[3]{\ln x} d(\ln x)}{x(\ln x)'} = \int \frac{\sqrt[3]{\ln x} d(\ln x)}{\cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}} =$$

$$= \int \sqrt[3]{\ln x} d(\ln x) = \int u^{1/3} du = \frac{u^{4/3}}{4/3} + c = \frac{3(\ln x)^{4/3}}{4} + c.$$

4. Интегрирование по частям

Теорема 5. *Пусть функции* $u(x)$ *и* $v(x)$ *непрерывно дифференцируемы на* $X \subseteq \mathbb{R}$. *Тогда на* X *существуют интегралы*

$$\int u\,dv \quad \text{и} \quad \int v\,du$$

и справедливо равенство $\displaystyle\int u\,dv = uv - \int v\,du$. **(1)**

Формула **(1)** называется ***формулой интегрирования по частям***.

Доказательство.

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

I класс

$$\int P_n(x) \cdot a^x dx$$

$$\int P_n(x) \cdot e^{\propto x} dx$$

$$\int P_n(x) \cdot \sin(\propto x) dx$$

$$\int \underbrace{P_n(x)}_{U} \cdot \underbrace{\cos(\propto x) dx}_{dV}$$

II класс

$$\int \ln x \cdot P_n(x) dx$$

$$\int \arcsin x \cdot P_n(x) dx$$

$$\int \underbrace{\operatorname{arctg} x}_{U} \cdot \underbrace{P_n(x) dx}_{dV}$$

III класс

циклический

$$\int e^{\propto x} \cdot \sin(\beta x) dx$$

$$\int \underbrace{e^{\propto x}}_{U} \cdot \underbrace{\cos(\beta x) dx}_{dV}$$

Применить формулу 2 раза

$P_n(x)$ – многочлен степени n.

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

Пример 1.

$$\int x \cdot \sin(3x) dx = \left| \begin{array}{c} u = x, du = dx, \\ dv = \sin(3x)\, dx, \\ v = \int \sin(3x)\, dx = -\frac{1}{3}\cos(3x) \end{array} \right| = x \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)\cos(3x) -$$

$$-\int \left(-\frac{1}{3}\right)\cos(3x)\, dx = -\frac{x}{3}\cos(3x) + \frac{1}{3}\int \cos(3x)\, dx = -\frac{x}{3}\cos(3x) +$$

$$+\frac{1}{9}\sin(3x) + c.$$

Пример 2.

$$\int x \cdot e^{-2x} dx = \left| \begin{array}{c} u = x, du = dx, \\ dv = e^{-2x} dx, \\ v = \int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x} \end{array} \right| = x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-2x} -$$

$$-\int \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-2x} dx = -\frac{x}{2} e^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x} dx = -\frac{x}{2} e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + c.$$

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$$

Пример 3.

$$\int \ln x\,dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x,\ du = \frac{dx}{x}, \\ dv = dx, \\ v = \int dx = x \end{matrix} \right| = x \cdot \ln x - \int \cancel{x} \frac{dx}{\cancel{x}} = x \cdot \ln x - \int 1\,dx =$$

$$= x \cdot \ln x - x + c.$$

Пример 4.

$$\int \arcsin x\,dx = \left| \begin{matrix} u = \arcsin x,\ du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \\ dv = dx, \\ v = \int dx = x \end{matrix} \right| = x \cdot \arcsin x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= x \cdot \arcsin x - \int \frac{x\,d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2} \cdot (1-x^2)'} = x \cdot \arcsin x - \int \frac{\cancel{x}\,d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2} \cdot (-2\cancel{x})} =$$

$$= x \cdot \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u}, \text{где } u = 1 - x^2 \right| =$$

$$= x \cdot \arcsin x + \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\sqrt{1-x^2} + c = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c.$$

Пример 5. Циклический интеграл.

$$\int udv = u \cdot v - \int vdu$$

$$\int e^{2x}\sin x dx = \left| \begin{matrix} u = e^{2x}, du = 2e^{2x}dx, \\ dv = \sin x dx, \\ v = \int \sin x dx = -\cos x \end{matrix} \right| = e^{2x} \cdot (-\cos x) -$$

$$- \int (-\cos x) \cdot 2e^{2x}dx = -e^{2x} \cdot \cos x + 2\int e^{2x}\cos x dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = e^{2x}, du = 2e^{2x}dx, \\ dv = \cos x dx, \\ v = \int \cos x dx = \sin x \end{matrix} \right| = -e^{2x} \cdot \cos x + 2 \cdot \left(e^{2x} \cdot \sin x - \int \sin x \cdot 2e^{2x} dx \right) =$$

$$= -e^{2x} \cdot \cos x + 2e^{2x} \cdot \sin x - 4\int e^{2x}\sin x dx.$$

Обозначим $\int e^{2x}\sin x dx = I.$ Получим $I = -e^{2x} \cdot \cos x + 2e^{2x} \cdot \sin x - 4I.$

Выразим *I*: $I + 4I = e^{2x} \cdot (-\cos x + 2\sin x) \Rightarrow 5I = e^{2x} \cdot (2\sin x - \cos x) \Rightarrow$

$$I = \frac{e^{2x}}{5} \cdot (2\sin x - \cos x) + c \Rightarrow \int e^{2x}\sin x dx = \frac{e^{2x}}{5} \cdot (2\sin x - \cos x) + c.$$

Ответ. $\int e^{2x}\sin x dx = \frac{e^{2x}}{5} \cdot (2\sin x - \cos x) + c.$

§3. Интегрирование рациональных дробей

Определение. ***Рациональной дробью*** *называется отношение 2-х многочленов*, т.е. функция вида $\dfrac{P_m(x)}{P_n(x)}$,

где $P_m(x)$, $P_n(x)$ – многочлены степени m и n соответственно.

Если $m < n$, то рациональная дробь называется ***правильной***. В противном случае (т.е. если $m \geq n$) дробь называется ***неправильной***.

Неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = Q(x) + \frac{P_r(x)}{P_n(x)},$$

где $Q(x)$ – некоторый многочлен степени $(m-n)$,

$P_r(x)$ – многочлен степени $r < n$.

(многочлены $Q(x)$ и $P_r(x)$ получаются в результате деления с остатком $P_m(x)$ на $P_n(x)$).

Примеры рациональных дробей

1) $\dfrac{x^2+1}{x^2+4}$ - неправильная рациональная дробь.

Представим дробь в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби:

$$\frac{x^2+1}{x^2+4}=\frac{(x^2+4)-3}{x^2+4}=\frac{x^2+4}{x^2+4}-\frac{3}{x^2+4}=1-\frac{3}{x^2+4}.$$

2) $\dfrac{2x+1}{x^3-2x^2+3x+1}$ - правильная рациональная дробь.

3) $\dfrac{2x^4+1}{x^2+3x+1}$ - неправильная рациональная дробь (деление столбиком).

1. Интегрирование простейших рациональных дробей

Определение. ***Простейшими рациональными дробями* I, II, III, IV *типа*** *называются соответственно правильные дроби вида* $\dfrac{A}{x+a}$, $\dfrac{A}{(x+a)^m}$, $\dfrac{Ax+B}{x^2+bx+c}$, $\dfrac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^m}$,

где $D=b^2-4c<0$, m – *натуральное число* $(m>1)$.

Интегрирование простейших дробей I типа:

$$\int \frac{A}{x+a}dx = A\int \frac{dx}{x+a} = A\int \frac{d(x+a)}{x+a} = A\ln|x+a|+C.$$

Интегрирование простейших дробей II типа:

$$\int \frac{A}{(x+a)^m}dx = A\int \frac{d(x+a)}{(x+a)^m} = A\frac{(x+a)^{-m+1}}{-m+1}+C.$$

Интегрирование простейших дробей III типа:

$$\frac{Ax+B}{x^2+bx+c}, \quad где\ D = b^2 - 4c < 0 \cdot$$

Интегрирование простейших дробей IV типа:

$$\frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^m},$$

где $D = b^2 - 4c < 0$, m *– натуральное число* $(m > 1)$.

Пример. Найти интеграл.

$$\int \frac{(2x-1)dx}{x^2+4x+8} = \int \frac{(2x-1)dx}{(x+2)^2+4} = \left| \begin{matrix} \text{сделаем замену} \\ x+2=t, \\ x=t-2, \\ dx=dt \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{2(t-2)-1}{t^2+4}dt = \int \frac{2t-5}{t^2+4}dt = \left| \frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c} \right| = \int \frac{2tdt}{t^2+4} - 5\int \frac{dt}{t^2+2^2} =$$

$$= \int \frac{d(t^2+4)}{t^2+4} - 5\int \frac{dt}{t^2+2^2} = \ln|t^2+4| - \frac{5}{2} arctg \frac{t}{2} + c =$$

$$= \ln|x^2+4x+8| - \frac{5}{2} arctg \frac{x+2}{2} + c.$$

2. Интегрирование правильных рациональных дробей

Пусть $\dfrac{P_r(x)}{P_n(x)}$ – правильная рациональная дробь.

Запишем многочлен $P_n(x)$ в виде произведения линейных и квадратичных множителей:

$$P_n(x) = \alpha(x-a_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x-a_i)^{k_i} \cdot (x^2+b_1x+c_1)^{t_1} \cdot \ldots \cdot (x^2+b_sx+c_s)^{t_s}, \quad (2)$$

где $D_j = b_j^2 - 4c_j < 0, \quad j = 1,2,\ldots,s$.

Теорема 1. Любую правильную рациональную дробь можно представить единственным образом в виде суммы конечного числа простейших рациональных дробей.

При этом между слагаемыми этой суммы и множителями в разложении **(2)** имеет место следующее соответствие:

1) каждому множителю вида $(x-a)^k$ соответствует сумма из k простейших дробей вида

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k},$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_k$ – некоторые числа;

2) каждому множителю вида $(x^2+bx+c)^t$ соответствует сумма из t простейших дробей вида

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+bx+c)^2}+\ldots+\frac{B_tx+C_t}{(x^2+bx+c)^t},$$

где $B_1, B_2, \ldots, B_t, C_1, C_2, \ldots, C_t$ – некоторые числа.

Примеры.

$$1)\ \frac{x^3+2x-1}{(x-2)\cdot(x+1)^3}=\frac{A_1}{x-2}+\frac{A_2}{x+1}+\frac{A_3}{(x+1)^2}+\frac{A_4}{(x+1)^3};$$

$$2)\ \frac{x+1}{x^2(x^2-2x+1)}=\frac{x+1}{x^2(x-1)^2}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x-1}+\frac{A_4}{(x-1)^2};$$

$$3)\ \frac{x+1}{x^2(x^2+2x+2)}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+2};$$

$$4)\ \frac{x^4+1}{(x+2)(x^2+x+3)^2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B_1x+C_1}{x^2+x+3}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+x+3)^2}.$$

Для разложения правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей I, II, III и IV типов часто применяют следующие методы:

1) ***метод неопределенных коэффициентов***;

2) ***метод частных значений***.

Замечание. В отдельных случаях можно применить более простые методы.

Например, в интеграле $\int \frac{x^2 dx}{x^3 - 4}$

лучше внести под знак дифференциала $x^2 dx = \frac{1}{3} d(x^3 - 4)$.

В интеграле $\int \frac{x dx}{x^4 + x^2 + 1}$

лучше предварительно сделать замену переменной $x^2 = t$.

Для разложения правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей I, II, III и IV типов часто применяют следующие методы:

1) ***метод неопределенных коэффициентов***;

2) ***метод частных значений***.

Замечание. В отдельных случаях можно применить более простые методы.

Например, в интеграле $\int \frac{x^2 dx}{x^3 - 4}$

лучше внести под знак дифференциала $x^2 dx = \frac{1}{3} d(x^3 - 4)$.

В интеграле $\int \frac{x dx}{x^4 + x^2 + 1}$

лучше предварительно сделать замену переменной $x^2 = t$.

План интегрирование рациональной дроби

1. Если дробь неправильная, то надо выделить целую часть и записать ее в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = Q(x) + \frac{P_r(x)}{P_n(x)}\ .$$

2. Разложить знаменатель дроби $P_n(x)$ на множители (линейные и квадратичные).

3. Записать правильную рациональную дробь в виде суммы простейших дробей с неопределенными коэффициентами.

4. Найти коэффициенты разложения.

5. Найти интегралы от многочлена и всех простых дробей.

§3. Интегрирование тригонометрических выражений

1. $\int R(\sin x, \cos x)dx$ (над синусом и косинусом проведены только рациональные операции – сложение, вычитание, умножение и деление)

Универсальная тригонометрическая подстановка:

$$\boxed{\mathbf{tg}(x/2) = t}$$

Выразим x и получим $x = 2arctgt$ => $\boxed{dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}}$

$$\boxed{\sin x = \frac{2t}{1+t^2}} \quad \boxed{\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

Интеграл принимает вид:

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R_1(t)dt$$

Сводится к вычислению интеграла от рациональной функции.

В ряде случаев существуют и более простые методы.

2. $\int R(\sin x, \cos x)dx$

а) подынтегральная функция нечетна относительно синуса

$$\int R(-\sin x, \cos x)dx = -\int R(\sin x, \cos x)dx$$

Подстановка:

$\cos x = t$

б) подынтегральная функция нечетна относительно косинуса

$$\int R(\sin x, -\cos x)dx = -\int R(\sin x, \cos x)dx$$

Подстановка:

$\sin x = t.$

в) подынтегральная функция четная относительно синуса и косинуса

$$\int R(-\sin x, -\cos x)dx = \int R(\sin x, \cos x)dx$$

Подстановка:

$$tgx = t \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}; \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}; \; \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$$

3. Интегралы вида $\int R(tgx, \cos^2 x, \sin^2 x)dx$

$$\int R(ctgx, \cos^2 x, \sin^2 x)dx$$

Подстановка:

$tgx = t \quad => \quad dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$ $\qquad \sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2}; \ \cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2}$

$ctgx = t \ => \ dx = -\dfrac{dt}{1+t^2}$ $\qquad \cos^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2}; \ \sin^2 x = \dfrac{1}{1+t^2}$

4. $\int \sin kx \cos mxdx, \quad \int \cos kx \cos mxdx, \quad \int \sin kx \sin mxdx$

Следует использовать формулы:

$$\sin k\,x \cdot \cos l\,x = \frac{1}{2}\left[\sin(k-l)\,x + \sin(k+l)\,x\right]$$

$$\sin k\,x \cdot \sin l\,x = \frac{1}{2}\left[\cos(k-l)\,x - \cos(k+l)\,x\right]$$

$$\cos k\,x \cdot \cos l\,x = \frac{1}{2}\left[\cos(k-l)\,x + \cos(k+l)\,x\right]$$

5. Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$

а) m – нечётное $\Rightarrow$ отделяем $\sin x$:

$$t = \cos x$$
$$\sin x dx = -dt$$
$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

б) n – нечётное $\Rightarrow$ отделяем $\cos x$:

$$t = \sin x$$
$$\cos x dx = dt$$
$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

в) m и n – чётные $\Rightarrow$ **понижаем степень**

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

§4. Интегрирование иррациональных выражений

$$1.\int R(x,\sqrt{x^2+px+q})dx$$

$$x^2+bx+c=\left(x+b/2\right)^2+q^2$$

Замена: $t=x+b/2$

$$2.\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx$$

Подстановка:

$$x=a\cdot\sin\, t \quad dx=a\cdot\cos t\, dt$$

$$\sqrt{a^2-x^2} = \cos t$$

$$3.\int R(x,\sqrt{a^2+x^2})dx$$

Подстановка:

$$x=a\cdot tg\ t \quad dx=\frac{a\,dt}{\cos^2 t}$$

$$\sqrt{a^2-x^2} = \frac{a}{\cos t}$$

$$4.\ \int R(x,\sqrt{x^2-a^2})dx$$

Подстановка:

$$x=\frac{a}{\cos t} \quad dx=a\frac{\sin t\, dt}{\cos^2 t}$$

$$\sqrt{a^2-x^2} = a\frac{\sin t}{\cos t}$$

3. $\int R(x^{\alpha}, x^{\beta}, x^{\chi}, \ldots)dx$

Подстановка:

$\alpha, \beta, \gamma \ldots$ – дробные рациональные числа,
s – наименьшее общее кратное чисел $\alpha, \beta, \gamma \ldots$

$$x = t^{s}$$

4. $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\beta}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\chi}, \ldots\right)dx$

$\alpha, \beta, \gamma \ldots$ – дробные рациональные числа,
s – наименьшее общее кратное чисел $\alpha, \beta, \gamma \ldots$

Подстановка: $\frac{ax+b}{cx+d} = t^{s}$

5. Дифференциальный бином

Выражение вида $x^m(a+bx^n)^p$, где (m, n, p, a, b) – $const$,

называется ***дифференциальным биномом***.

Теорема (Чебышева).

Интегралы $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$ ($m,n,p \in Q$) выражаются в конечном виде через элементарные функции, если одно из чисел будет целым:

1) p **Подстановка:** $x = t^s$ (s – наименьшее общее кратное m и n)

2) $\dfrac{m+1}{n}$ **Подстановка:** $a+bx^n = t^s$, где s – знаменатель p

3) $\dfrac{m+1}{n}+p$ **Подстановка:** $\dfrac{a+bx^n}{x^n} = t^s$, где s – знаменатель p