Математический анализ

Раздел 1. Введение в анализ

Понятие функции

(основные определения, классификация, основные характеристики поведения)

2021 г.

Литература

- Пискунов Н.С. *Дифференциальное и интегральное исчисление. Т. 1,2*
- Кудрявцев Л.Д. *Краткий курс математического анализа*
- Берман Г.Н. *Сборник задач по курсу математического анализа*
- Запорожец Г.И. *Руководство к решению задач по математическому анализу*

Математический анализ – часть математики, в которой функции и их обобщения изучаются с помощью пределов.

§1. Понятие функции

1. Основные понятия

Пусть X,Y – множества произвольной природы.

Определение. *Если $\forall x \in X$ поставлен в соответствие* ***единственный*** *элемент $y \in Y$, то говорят, что на множестве X задана* ***функция*** *(****отображение****) с множеством значений Y.*

Записывают: $f\colon X \to Y$, $y = f(x)$

(где f – закон, осуществляющий соответствие)

X – **область (множество) определения функции**,
x $(x \in X)$ – **аргумент** (**независимая переменная**),
Y – **область** (**множество**) **значений**,

y $(y \in Y)$ – **зависимая переменная** (**функция**)

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ

1) словесный;

2) табличный;

3) графический;

Определение. ***Графиком функции*** $y = f(x)$ *называется геометрическое место точек плоскости с координатами* $(x; f(x))$.

График функции $y = f(x)$ будем также называть «кривой $y = f(x)$».

4) аналитический:

а) явное задание (т.е. формулой $y = f(x)$)

б) неявное задание (т.е. с помощью уравнения $F(x,y)=0$).

Определение. *Пусть заданы две функции*:

$$f : X \to Y\ ,\ f(x) = y,$$

$$\varphi : Y \to Z\ ,\ \varphi(y) = z.$$

Функция $\psi : X \to Z\ ,\ \psi(x) = z$ *называется* ***композицией функций*** φ и f *или* ***сложной функцией***.

Обозначают: $\varphi \circ f$ или φf.

Итак, по определению,

$$\varphi f(x) = z = \varphi(y) = \varphi(f(x))$$

Поэтому сложную функцию называют еще ***функцией от функции***. При этом функцию φ называют ***внешней***, функцию f – ***внутренней***.

Пусть задана функция $f : X \to Y$, $f(x) = y$ и $y_0 \in Y$.
Возможны два случая:

а) существует единственный аргумент $x_0 \in X$ такой, что $f(x_0) = y_0$;

б) существуют $x_1, x_2, \ldots \in X$ такие, что $f(x_\mathrm{i}) = y_0$.

Определение. *Если* $\forall y_0 \in Y$ *существует единственный* аргумент $x_0 \in X$ *такой, что* $f(x_0) = y_0$, *то функцию* $f(x)$ *называют* ***биекцией*** (или ***взаимно однозначной***).

Если $y = f(x)$ *– биекция, то можно определить функцию*

$$\varphi : Y \to X , \varphi(y_0) = x_0 .$$

Эту функцию называют ***обратной к функции f*** и в общем случае обозначают f^{-1}.

Функции $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ выражают одну и ту же связь между переменными x и y.

Поэтому *графики функции* $y = f(x)$ *и ее обратной функции* $x = f^{-1}(y)$ *совпадают*.

Для удобства, обратную функцию записывают в виде $y = f^{-1}(x)$ (т.е. переобозначают переменные).

Графики функций $y = f(x)$ *и* $y = f^{-1}(x)$ *симметричны относительно биссектрисы 1-го и 3-го координатного угла* (т.к. при переобозначении переменных оси Ox и Oy меняются местами).

Определение. ***Элементарной функцией*** *называется функция, которая может быть задана одной формулой* $y = f(x)$, *где* $f(x)$ *– выражение, составленное из основных элементарных функций и действительных чисел с помощью конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и взятия функции от функции.*

ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

1) степенные: $y = x^r$ $(r \in \mathbb{R})$
2) показательные: $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$
3) логарифмические: $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$
4) тригонометрические: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{ctg}\, x$
5) обратные тригонометрические: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg}\, x$, $y = \mathrm{arcctg}\, x$

3. Основные характеристики поведения функции

1) Четность функции

Функция $y = f(x)$ *называется* ***четной****, если :*

а) *область определения функции* $\mathrm{D}(f)$ *симметрична относительно начала координат;*

б) $f(-x) = f(x),\ \forall x \in \mathrm{D}(f)$.

Функция $y = f(x)$ *называется* ***нечетной****, если :*

а) *область определения функции* $\mathrm{D}(f)$ *симметрична относительно начала координат;*

б) $f(-x) = -f(x),\ \forall x \in \mathrm{D}(f)$.

Функция, не являющаяся четной или нечетной, называется ***функцией общего вида****.*

График четной функции симметричен относительно оси Oy.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Примеры. **Оставить полстраницы или страницу**

2) Периодичность функции

Определение. *Функция* $y = f(x) \not\equiv \text{const}$ *называется* ***периодической***, *если* $\exists\ t \neq 0$ *такое*, *что*

а) $x + t$, $x - t \in D(f)$, $\forall x \in D(f)$;

б) $f(x \pm t) = f(x)$.

Число t *при этом называют* ***периодом функции***.

Если $y = f(x)$ – периодическая, то ее наименьший положительный период T называют ***основным периодом***.

Любой период функции имеет вид kT , где $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$

График периодической функции состоит из повторяющихся фрагментов.

3) Монотонность функции

Определение. *Функция* $y = f(x)$ *называется* ***возрастающей*** (***неубывающей***) *на интервале* $(a;b)$, *если* $\forall x_1, x_2 \in (a;b)$ *таких, что* $x_1 < x_2$ *выполняется неравенство*

$$f(x_1) < f(x_2) \qquad (f(x_1) \le f(x_2)).$$

Определение. *Функция* $y = f(x)$ *называется* ***убывающей*** (***невозрастающей***) *на интервале* $(a;b)$, *если* $\forall x_1, x_2 \in (a;b)$ *таких, что* $x_1 < x_2$ *выполняется неравенство*

$$f(x_1) > f(x_2) \quad (f(x_1) \ge f(x_2)).$$

Возрастающие, убывающие, невозрастающие, неубывающие функции называются ***монотонными***.

4) Ограниченность функции

Определение. *Функция* $y = f(x)$ *называется* ***ограниченной снизу***, *если* $\exists a \in \mathbb{R}$ *такое, что*

$$a \le f(x)\ ,\ \ \forall x \in D(f).$$

Определение. *Функция* $y = f(x)$ *называется* ***ограниченной сверху***, *если* $\exists b \in \mathbb{R}$ *такое, что*

$$f(x) \le b\ ,\ \ \forall x \in D(f).$$

Определение. *Функция, ограниченная сверху и снизу, называется* ***ограниченной***.

Следовательно, функция ограниченная, если $\exists\ a,\ b \in \mathbb{R}$ такие, что

$$a \le f(x) \le b\ ,\ \ \forall x \in D(f).$$

Функция $y = f(x)$ ограничена $\Leftrightarrow$ $\exists M > 0$ такое, что

$$|\, f(x)\,| \le M\ ,\ \ \forall x \in D(f).$$