ЗАНЯТИЕ 6

Линейные операции на множестве свободных векторов

1. Какому условию должны удовлетворять векторы $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$, чтобы выполнялось равенство:

а) $(\bar{\mathbf{a}}+\bar{\mathbf{b}})\perp(\bar{\mathbf{a}}-\bar{\mathbf{b}})$;

б) $|\bar{\mathbf{a}}+\bar{\mathbf{b}}|^2=|\bar{\mathbf{a}}|^2+|\bar{\mathbf{b}}|^2$;

в) $\dfrac{\bar{\mathbf{a}}}{|\bar{\mathbf{a}}|}=\dfrac{\bar{\mathbf{b}}}{|\bar{\mathbf{b}}|}$;

г) $\bar{\mathbf{a}}+\bar{\mathbf{b}}=\lambda(\bar{\mathbf{a}}-\bar{\mathbf{b}})$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

2. Даны координаты векторов $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{b}} \in V^{(2)}$ в некотором базисе $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2$: $\overline{\mathbf{a}}_1 = \{2; -1\}$, $\overline{\mathbf{a}}_2 = \{1; 2\}$, $\overline{\mathbf{b}} = \{7; 4\}$.

а) Доказать, что векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2$ можно взять в качестве базиса $V^{(2)}$.

б) Найти координаты вектора $\overline{\mathbf{b}}$ в базисе $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2$.

3. Векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3, \overline{\mathbf{b}} \in V^{(3)}$ в базисе $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ имеют координаты:

$\overline{\mathbf{a}}_1 = \{1; 2; 1\}$, $\overline{\mathbf{a}}_2 = \{-1; 1; 2\}$, $\overline{\mathbf{a}}_3 = \{2; -1; 1\}$, $\overline{\mathbf{b}} = \{5; 2; 1\}$.

а) Доказать, что $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ образуют базис в $V^{(3)}$.

б) Найти координаты вектора $\overline{\mathbf{b}}$ в базисе $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$.

4. Векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}} \in V^{(3)}$ в базисе $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ имеют координаты:

$$\overline{\mathbf{a}}_1 = \{1;\ 3;\ -4\}, \quad \overline{\mathbf{a}}_2 = \{2;\ -1;\ 2\}, \quad \overline{\mathbf{a}}_3 = \{3;\ -5;\ 8\},$$

$$\overline{\mathbf{b}} = \{0;\ -14;\ 20\}, \quad \overline{\mathbf{c}} = \{-2;\ 11;\ -10\}.$$

а) Можно ли векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ взять в качестве базиса $V^{(3)}$?

б) Можно ли выразить векторы $\overline{\mathbf{b}}$ и $\overline{\mathbf{c}}$ через $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$?

5. Даны декартовы координаты точек A, B, C, D:

$A(-1;\ 5;\ -10)$, $B(5;\ -7;\ 8)$, $C(2;\ 2;\ -7)$, $D(5;\ -4;\ 2)$.

а) Найти координаты векторов $\overline{\mathbf{AB}}$, $\overline{\mathbf{BC}}$, $\overline{\mathbf{CD}}$.

б) Доказать, что $\overline{\mathbf{AB}} \parallel \overline{\mathbf{CD}}$. Определить, будут ли $\overline{\mathbf{AB}} \upuparrows \overline{\mathbf{CD}}$?

в) Найти координаты вектора $\overline{\mathbf{x}}$ из условия

$$\overline{\mathbf{AB}} + 3\overline{\mathbf{x}} = -2\overline{\mathbf{BC}}.$$

г) Найти $\left|\overline{\mathbf{AB}}\right|$, $\left|\overline{\mathbf{BC}}\right|$, $\left|\overline{\mathbf{CD}}\right|$.

д) Найти орты векторов $\overline{\mathbf{AB}}$, $\overline{\mathbf{BC}}$, $\overline{\mathbf{CD}}$.

6. Вектор $\overline{\mathbf{x}}$ коллинеарен вектору $\overline{\mathbf{a}} = \{6;\,-8;\,-7{,}5\}$ и образует острый угол с осью Oz. Найти координаты вектора $\overline{\mathbf{x}}$, если $\left|\overline{\mathbf{x}}\right| = 50$.

Ответ: $\overline{\mathbf{x}} = \{-24;\, 32;\, 30\}$.

ЗАНЯТИЕ 7

Простейшие задачи векторной алгебры. Скалярное произведение векторов

1. Отрезок прямой, ограниченный точками $A(-1;\,8;\,3)$ и $B(7;\,-4;\,-1)$, разделен точками C, D, E на 4 равные части. Найти координаты этих точек.

2. Определить координаты концов отрезка, который разделен точками $C(2;\,0;\,2)$ и $D(5;\,-2;\,0)$ на три равные части.

3. Даны координаты вершин треугольника:

$$A(-1;\ 5;\ 10),\quad B(5;\ -7;\ 8),\quad C(3;\ 3;\ -6)$$

найти координаты центра тяжести этого треугольника (точку пересечения медиан).

4. Четырехугольник $ACDO$ является параллелограммом. Диагонали этого параллелограмма пересекаются в точке $B(0;\ 2)$. Найти координаты вершин C и D, если $A(-3;\ 0)$, $O(0;\ 0)$.

5. Векторы $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ взаимно перпендикулярны, вектор $\overline{\mathbf{c}}$ образует с ними углы, равные $\dfrac{\pi}{3}$. Зная, что $|\overline{\mathbf{a}}| = 3$, $|\overline{\mathbf{b}}| = 5$, $|\overline{\mathbf{c}}| = 8$, вычислить

$$(3\overline{\mathbf{a}} - 2\overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{b}} + 3\overline{\mathbf{c}}).$$

6. Векторы $\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}$ попарно образуют друг с другом углы, равные 60°. Зная, что $|\overline{\mathbf{a}}| = 4$, $|\overline{\mathbf{b}}| = 2$, $|\overline{\mathbf{c}}| = 6$, вычислить $|\overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{b}} + \overline{\mathbf{c}}|$.

7. Силы $\overline{\mathbf{F}}_1 = \{3;\ -4;\ 2\}$, $\overline{\mathbf{F}}_2 = \{2;\ 3;\ -5\}$, $\overline{\mathbf{F}}_3 = \{-3;\ -2;\ 4\}$ приложены к одной точке. Вычислить, какую работу совершает равнодействующая этих сил, перемещая точку прямолинейно из $M_1(5;\ 3;\ -7)$ в $M_2(4;\ -1;\ -4)$.

8. Определить, при каком значении α векторы $\overline{\mathbf{a}} + \alpha\overline{\mathbf{b}}$ и $\overline{\mathbf{a}} - \alpha\overline{\mathbf{b}}$ будут перпендикулярны, если $|\overline{\mathbf{a}}| = 3$, $|\overline{\mathbf{b}}| = 5$.

9. Векторы $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$ и $\overline{\mathbf{c}}$ удовлетворяют условию $\overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{b}} + \overline{\mathbf{c}} = \overline{\mathbf{0}}$. Найти

$$(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}) + (\overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}) + (\overline{\mathbf{c}}, \overline{\mathbf{a}}),$$

если $|\overline{\mathbf{a}}| = 3$, $|\overline{\mathbf{b}}| = 1$ и $|\overline{\mathbf{c}}| = 5$.

10. Определить, при каком значении α векторы

$$\overline{\mathbf{a}} = \alpha\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \quad \text{и} \quad \overline{\mathbf{b}} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \alpha\mathbf{k}$$

будут перпендикулярны.

11. Дан треугольник с вершинами

$$A(-1;\,-2;\,4),\ B(-4;\,-2;\,0),\ C(3;\,-2;\,1).$$

Найти: а) внутренний угол при вершине B;

б) $\text{Пр}_{\overline{\mathbf{AC}}}\overline{\mathbf{BC}}$;

в) $\text{Пр}_{\overline{\mathbf{AC}}}\overline{\mathbf{AB}}$.

12. Дан треугольник с вершинами $A(3;\,2;\,-3)$, $B(5;\,1;\,-1)$, $C(1;\,-2;\,1)$.

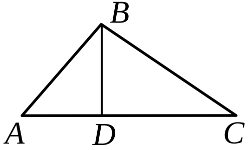
Найти: а) внешний угол при вершине A;

б) $\text{Пр}_{\overline{\mathbf{AB}}-2\overline{\mathbf{AC}}}\overline{\mathbf{BC}}$.

13. Найти вектор $\overline{\mathbf{x}}$, коллинеарный вектору $\overline{\mathbf{a}} = \{2;\,1;\,-1\}$ и удовлетворяющий условию $(\overline{\mathbf{x}};\overline{\mathbf{a}}) = 3$.

14. Найти проекцию вектора $\overline{\mathbf{s}} = \{4;\,-3;\,2\}$ на ось, составляющую с координатными осями равные острые углы.

15. Найти координаты вектора $\overline{\mathbf{BD}}$ в базисе $\overline{\mathbf{b}}$, $\overline{\mathbf{c}}$, где $\overline{\mathbf{b}} = \overline{\mathbf{AB}}$, $\overline{\mathbf{c}} = \overline{\mathbf{AC}}$, BD – высота треугольника ABC.



16. Даны ненулевой вектор $\overline{\mathbf{a}}$ и скаляр p. Найти любое решение уравнения $(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{a}}) = p$.

ЗАНЯТИЕ 8

Векторное и смешанное произведения векторов

1. Дано: $[\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{b}}]=[\overline{\mathbf{c}},\overline{\mathbf{d}}]$, $[\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{c}}]=[\overline{\mathbf{b}},\overline{\mathbf{d}}]$.

Доказать: $(\overline{\mathbf{a}}-\overline{\mathbf{d}})\parallel(\overline{\mathbf{b}}-\overline{\mathbf{c}})$.

2. Дано: $|\overline{\mathbf{a}}|=10$, $|\overline{\mathbf{b}}|=2$, $(\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{b}})=12$. Найти: $|[\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{b}}]|$.

3. Найти площадь параллелограмма и площадь треугольника, построенного на векторах $\overline{\mathbf{a}}=\overline{\mathbf{m}}+2\overline{\mathbf{n}}$ и $\overline{\mathbf{b}}=2\overline{\mathbf{m}}+\overline{\mathbf{n}}$, если $|\overline{\mathbf{m}}|=2$, $|\overline{\mathbf{n}}|=5$,
$\varphi=(\overline{\mathbf{m}}\,\widehat{,}\,\overline{\mathbf{n}})=30^\circ$.

4. Дан треугольник с вершинами: $A(2;\,-1;\,2)$, $B(1;\,2;\,-1)$, $C(3;\,2;\,1)$. Найти его площадь и высоту, опущенную из вершины B.

5. Вектор $\overline{\mathbf{x}}$ перпендикулярен векторам

$$\overline{\mathbf{a}} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \quad \text{и} \quad \overline{\mathbf{b}} = 18\mathbf{i} - 22\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$

и образует с Oy тупой угол. Найти его координаты, если $|\overline{\mathbf{x}}| = 14$.

6. Найти вектор $\overline{\mathbf{x}}$, перпендикулярный $\overline{\mathbf{a}} = \{2; 3; -1\}$ и $\overline{\mathbf{b}} = \{1; -2; 3\}$, и удовлетворяющий условию $(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{c}}) = -6$, где $\overline{\mathbf{c}} = \{2;\,-1;\,1\}$.

7. Показать, что точки $A(5;\,7;\,-2)$, $B(3;\,1;\,-1)$, $C(9;\,4;\,-4)$ и $D(1;\,5;\,0)$ лежат в одной плоскости.

8. Доказать тождество $(\bar{\mathbf{a}}+\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{b}}+\bar{\mathbf{c}},\bar{\mathbf{c}}+\bar{\mathbf{a}})=2(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}})$.

9. Вектор $\bar{\mathbf{c}}$ перпендикулярен векторам $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$, угол между $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ равен $\varphi=30^\circ$. Зная, что $|\bar{\mathbf{a}}|=6$, $|\bar{\mathbf{b}}|=3$, $|\bar{\mathbf{c}}|=3$, найти $(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}})$.

10. Показать, что точки $A(1;\,1;\,2)$, $B(2;\,-3;\,4)$, $C(2;\,3;\,1)$ и $D(-1;\,1;\,3)$ не лежат в одной плоскости. Найти:

а) объем пирамиды $ABCD$;

б) площадь треугольника ACD;

в) высоту пирамиды BK;

г) угол φ между ребром AB и гранью ACD.

Дополнительно

11. Найти вектор $\overline{\mathbf{x}}$ длины 1, перпендикулярный векторам $\overline{\mathbf{a}} = \{11; 10; 2\}$ и $\overline{\mathbf{b}} = \{4; 0; 3\}$, и направленный так, чтобы упорядоченная тройка векторов $\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{x}}$ имела положительную (правую) ориентацию.

12. Найти объем параллелепипеда и пирамиды, построенных на векторах $\overline{\mathbf{OA}}$, $\overline{\mathbf{OB}}$ и $\overline{\mathbf{OC}}$, если эти векторы направлены по биссектрисам координатных углов I четверти и длина каждого вектора равна 2.

13. Доказать тождество $([\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}],[\bar{\mathbf{c}},\bar{\mathbf{d}}])=\begin{vmatrix}(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{c}}) & (\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{d}})\\ (\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}}) & (\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{d}})\end{vmatrix}$ и показать, что площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ может быть найдена по формуле

$$S=\sqrt{\begin{vmatrix}(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{a}}) & (\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}})\\ (\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{a}}) & (\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{b}})\end{vmatrix}}.$$

14. Доказать тождество

$$(\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{b}},\overline{\mathbf{c}})\cdot(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}},\overline{\mathbf{z}})=\begin{vmatrix}(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{a}}) & (\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{b}}) & (\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{c}})\\ (\overline{\mathbf{y}},\overline{\mathbf{a}}) & (\overline{\mathbf{y}},\overline{\mathbf{b}}) & (\overline{\mathbf{y}},\overline{\mathbf{c}})\\ (\overline{\mathbf{z}},\overline{\mathbf{a}}) & (\overline{\mathbf{z}},\overline{\mathbf{b}}) & (\overline{\mathbf{z}},\overline{\mathbf{c}})\end{vmatrix}$$

и показать, что объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$ и $\overline{\mathbf{c}}$ равен

$$V=\sqrt{\begin{vmatrix}(\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{a}}) & (\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{b}}) & (\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{c}})\\ (\overline{\mathbf{b}},\overline{\mathbf{a}}) & (\overline{\mathbf{b}},\overline{\mathbf{b}}) & (\overline{\mathbf{b}},\overline{\mathbf{c}})\\ (\overline{\mathbf{c}},\overline{\mathbf{a}}) & (\overline{\mathbf{c}},\overline{\mathbf{b}}) & (\overline{\mathbf{c}},\overline{\mathbf{c}})\end{vmatrix}}.$$

15. Даны неколлинеарные векторы $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ и скаляр p. Найти любое решение уравнения $(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}) = p$.

16. Решить уравнение $[\overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}]x + [\overline{\mathbf{c}}, \overline{\mathbf{a}}]y + [\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}]z + \overline{\mathbf{d}} = \overline{\mathbf{0}}$.

ЗАНЯТИЕ 9

Линейные пространства и подпространства

1. Выяснить, образуют ли линейные пространства над $\mathbb{R}$ множества:

а) $M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \middle| \; a, b, c - \text{любые действительные числа} \right\}$;

б) $M_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \; a, b - \text{любые действительные числа} \right\}$;

в) $M_4 = \{\mathbf{a} = (\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \alpha_4) \mid \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0, \ \forall \alpha_i \in \mathbb{R}\}$;

г) $M_5 = \{\mathbf{a} = (\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \alpha_4) \mid \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1, \ \forall \alpha_i \in \mathbb{R}\}$;

д) $M_6 = \{\mathbf{a} = (\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \alpha_4) \mid \alpha_1 \cdot \alpha_4 = 0, \ \forall \alpha_i \in \mathbb{R}\}$;

е) $M_7 = \{\mathbf{a} = (0; \alpha_2; \alpha_3; 0) \mid \ \forall \alpha_i \in \mathbb{R}\}$.

2. Доказать утверждения:

а) $x_1, x_2, \ldots, x_m, o$ – линейно зависима;

б) если $x_1 = x_2$, то $x_1, x_2, \ldots, x_m$ – линейно зависима;

в) если $x_1, x_2, \ldots, x_m$ – линейно независима, то

$$\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots, \lambda_m x_m \quad (\lambda_i \neq 0)$$

тоже линейно независима;

г) если $x_1, x_2, \ldots, x_m$ – линейно независима, то

$$x_1, \quad x_1 + x_2, \quad \ldots, \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_m \; -$$

тоже линейно независима.

3. Выяснить, является ли линейно зависимой система:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$.

в) $2x^2 - 3x + 1$, $x^2 + 5$, $x + 3$.

г) $x^2 + 1$, $2x - 3$, 4.

д) $\mathbf{a}_1 = (1;1;1;1)$, $\mathbf{a}_2 = (1;-1;-1;1)$, $\mathbf{a}_3 = (1;-1;1;-1)$, $\mathbf{a}_4 = (1;1;-1;-1)$.

е) $\mathbf{b}_1 = (3;-4;1;2)$, $\mathbf{b}_2 = (4;-3;1;2)$, $\mathbf{b}_3 = (1;-6;1;2)$, $\mathbf{b}_4 = (1;-1;-1;-1)$.

ж) 1, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ на $(0;\pi/4)$.

з) e^x, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$ на $\mathbb{R}$.

и) 1, x^3, $x^2 \cdot |x|$ на $\mathbb{R}$.

4. Найти координаты вектора:

а) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ в базисе

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

б) $f(x) = 3x^2 - 2x + 5 \quad (f(x) \in \mathbb{R}^3[x])$ в базисе

$$g_1(x) = 1,\quad g_2(x) = x - 2,\quad g_3(x) = (x-2)^2.$$

в) $\mathbf{a} = (3;\ 0;\ -20)$ в базисе

$$\mathbf{a}_1 = (1;\ 2;\ -7),\quad \mathbf{a}_2 = (0;\ 3;\ 1),\quad \mathbf{a}_3 = (0;0;1).$$

5. Пусть $a, b \in L_4$ и имеют в некотором базисе координаты:

$$a = \{-1;\ 3;\ 4;\ 1\},\quad b = \{2;\ 0;\ 1;\ -1\}$$

Найти координаты вектора $c = 3a - b$ в том же базисе.

6. В пространстве L_3 даны два базиса e_1, e_2, e_3 и f_1, f_2, f_3. Найти координаты вектора x в базисе f_1, f_2, f_3, если

$$x = 3e_1 - 2e_2 + e_3,$$

$$f_1 = e_1 + e_2 + e_3,\quad f_2 = 3e_1 + 4e_3,\quad f_3 = e_3.$$

7. Пусть e_1, e_2 – базис пространства L_2 и

$$a_1 = e_1 + 4e_2, \quad a_2 = 3e_1 + 5e_2, \quad b_1 = 7e_1 + e_2, \quad b_2 = e_2.$$

Доказать, что векторы a_1, a_2 и b_1, b_2 тоже образуют базисы пространства L_2. Найти матрицу перехода от базиса a_1, a_2 к b_1, b_2.

Дополнительно

8. В линейном пространстве $\mathbb{R}^n[x]$ рассматриваются множества многочленов, удовлетворяющих условиям:

а) $f(0) = 0$; б) $f(1) = 0$; в) $f(0) = f(1) = 0$.

Докажите, что каждое из этих подмножеств является подпространством линейного пространства $\mathbb{R}^n[x]$ и найдите его размерность.

9. Докажите, что пересечение двух подпространств линейного пространства снова является подпространством этого пространства.

10. Пусть x, y – векторы линейного пространства, α, β – числа. Доказать, что $\alpha x + \beta y = \beta x + \alpha y$ тогда и только тогда, когда $\alpha = \beta$ или $x = y$.

ЗАНЯТИЕ 10.
Линейные операторы

1. Проверить, является ли линейным оператор:

а) $\varphi_1 : V^{(3)} \to V^{(3)}$, $\quad \varphi_1(\overline{\mathbf{x}}) = (\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{a}})\overline{\mathbf{a}}$, где $\overline{\mathbf{a}} \neq \overline{\mathbf{0}}$;

б) $\varphi_2 : V^{(3)} \to V^{(3)}$, $\quad \varphi_2(\overline{\mathbf{x}}) = \overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{a}}$, где $\overline{\mathbf{a}} \neq \overline{\mathbf{0}}$;

в) $\psi_1 : M(2\times 2, \mathbb{R}) \to M(2\times 2, \mathbb{R})$, $\quad \psi_1(\mathbf{X}) = \mathbf{BX} \quad (\mathbf{B} \neq \mathbf{O})$;

г) $\psi_2 : M(2\times 2, \mathbb{R}) \to M(2\times 2, \mathbb{R})$, $\quad \psi_2(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^2$

д) $f_1:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $f_1(\mathbf{x})=(\xi_1,\xi_1\cdot\xi_2,\xi_3+1)$,
где $\mathbf{x}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$;

е) $f_2:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $f_2(\mathbf{x})=(\xi_1,\xi_1+2\xi_2;\xi_1-\xi_2+3\xi_3)$,
где $\mathbf{x}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$.

ж) $g_1:\mathbb{R}^4[x]\to\mathbb{R}^4[x]$, $g_1(P_4(x))=P_4(2x+1)$,
где $P_4(x)$ – многочлен степени 4;

з) $g_2:\mathbb{R}^4[x]\to\mathbb{R}^4[x]$, $g_2(P_4(x))=P_4'(x)$,
где $P_4(x)$ – многочлен степени 4.

2. Найти матрицу линейного оператора в стандартном базисе линейного пространства

а) $\varphi_1 : V^{(3)} \to V^{(3)}$, $\quad \varphi_1(\overline{\mathbf{x}}) = (\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{a}})\overline{\mathbf{a}}$,
где $\overline{\mathbf{a}} = \{a_x; a_y; a_z\} \neq \overline{\mathbf{0}}$;

б) $\psi_1 : M(2\times 2, \mathbb{R}) \to M(2\times 2, \mathbb{R})$, $\quad \psi_1(\mathbf{X}) = \mathbf{BX}$,
где $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq \mathbf{O}$;

в) $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\quad f_1(\mathbf{x}) = (\xi_1, \xi_1 + 2\xi_2; \xi_1 - \xi_2 + 3\xi_3)$,
где $\mathbf{x} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$

3. Пусть $\varphi : L_2 \to L_2$,

e_1, e_2 и f_1, f_2 – два базиса пространства L_2.

В базисе e_1, e_2 оператор φ имеет матрицу $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Найти его матрицу **B** в базисе f_1, f_2, если

$$f_1 = e_1 - e_2, \quad f_2 = 3e_1 - 4e_2.$$

4. Пусть $\varphi : L_3 \to L_3$,

e_1, e_2, e_3 и f_1, f_2, f_3 – два базиса L_3.

В базисе e_1, e_2, e_3 оператор φ имеет матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти его матрицу **B** в базисе f_1, f_2, f_3, если

$$f_1 = e_1 + e_2, \quad f_2 = e_1 + e_3, \quad f_3 = e_2 + e_3.$$

ЗАНЯТИЕ 11

Собственные векторы линейного оператора. Диагонализируемость линейного оператора

1. Пусть $\varphi : L_3 \to L_3$. Выяснить, какие из векторов x_1, x_2, x_3 являются собственными векторами оператора φ, если в базисе e_1, e_2 оператор φ имеет матрицу $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, а векторы x_1, x_2, x_3 имеют в том же базисе координаты: $x_1 = \{1;\ 3\}$, $x_2 = \{3;\ 1\}$, $x_3 = \{5;\ 0\}$.

2. Линейный оператор φ пространства L_3 имеет в некотором базисе e_1, e_2, e_3 матрицу $\mathbf{A}$. Найти собственные подпространства этого оператора. Если оператор диагонализируем, то записать его диагональную матрицу и базис из собственных векторов.

а) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

в) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

б) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

г) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

д) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

ж) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -10 & 54 & 36 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 18 & 11 \end{pmatrix}$

е) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

з) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$