ВАРИАНТ 1

1. Доказать, что векторы $\overline{\mathbf{e}}_1 = \{1; 2; -1\}$, $\overline{\mathbf{e}}_2 = \{2; 1; 1\}$, $\overline{\mathbf{e}}_3 = \{1; 2; 3\}$ образуют базис, и найти разложение в этом базисе вектора $\overline{\mathbf{a}} = \{-1; 3; 2\}$.
2. Найти длину вектора $\overline{\mathbf{a}} = 3\overline{\mathbf{e}}_1 - 2\overline{\mathbf{e}}_2$, где $|\overline{\mathbf{e}}_1| = 1$, $|\overline{\mathbf{e}}_2| = 2$, векторы $\overline{\mathbf{e}}_1$ и $\overline{\mathbf{e}}_2$ образуют угол 30°.
3. В плоскости xOy найти единичный вектор $\overline{\mathbf{s}}$, перпендикулярный вектору $\overline{\mathbf{a}} = \{2; 1; -1\}$ и образующий острый угол с осью Ox.
4. Дан треугольник с вершинами в точках $A(1; -1; 2)$, $B(2; 1; -1)$, $C(-1; 1; 3)$. Найти его площадь и высоту, опущенную из вершины B.
5. Проверить, лежат ли четыре точки в одной плоскости: $A(1; -1; 2)$, $B(3; 4; 5)$, $C(2; -1; 1)$, $D(2; 1; 3)$.

ВАРИАНТ 2

1. Даны три последовательные вершины параллелограмма: $A(2;1;-1)$, $B(1;-1;2)$, $C(3;2;-1)$. Найти координаты четверной вершины D.
2. Найти угол между векторами $\overline{\mathbf{a}} = 3\overline{\mathbf{e}}_1 + 2\overline{\mathbf{e}}_2$ и $\overline{\mathbf{b}} = \overline{\mathbf{e}}_1 - 3\overline{\mathbf{e}}_2$, где $\overline{\mathbf{e}}_1$ и $\overline{\mathbf{e}}_2$ – единичные векторы, образующие угол 120°.
3. Найти вектор $\overline{\mathbf{x}}$, зная, что он перпендикулярен векторам $\overline{\mathbf{a}} = \{-1; 2; 1\}$, $\overline{\mathbf{b}} = \{2; 1; -1\}$ и удовлетворяющий условию $\overline{\mathbf{x}} \cdot (2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) = 1$.
4. Даны вершины пирамиды: $A(1;-1;2)$, $B(2;1;-1)$, $C(-1;2;0)$, $D(0;-1;2)$. Найти его объем и длину высоты, опущенной из вершины D.
5. Выяснить, лежат ли точки $A(2;-1;3)$, $B(1;2;1)$ и $C(3;-4;5)$ на одной прямой.

ВАРИАНТ 3

1. Доказать, что векторы $\overline{\mathbf{a}}+\overline{\mathbf{b}}$, $\overline{\mathbf{b}}+\overline{\mathbf{c}}$, $\overline{\mathbf{c}}-\overline{\mathbf{a}}$ – компланарны.
2. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{\mathbf{a}}=\overline{\mathbf{m}}+3\overline{\mathbf{n}}$ и $\overline{\mathbf{b}}=2\overline{\mathbf{m}}-\overline{\mathbf{n}}$, где $\left|\overline{\mathbf{m}}\right|=2$, $\left|\overline{\mathbf{n}}\right|=3$ и угол между векторами $\overline{\mathbf{m}}$ и $\overline{\mathbf{n}}$ равен 30°.
3. Найти вектор $\overline{\mathbf{x}}$, зная, что он коллинеарен вектору $\overline{\mathbf{a}}=\{2;\,-1;\,3\}$, $\left|\overline{\mathbf{x}}\right|=3$, вектор $\overline{\mathbf{x}}$ образует тупой угол с осью Oy.
4. Вычислить площадь и высоты параллелограмма, построенного на векторах $\overline{\mathbf{a}}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\overline{\mathbf{b}}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$.
5. Даны три вектора: $\overline{\mathbf{a}}=\{2;\,-1;\,1\}$, $\overline{\mathbf{b}}=\{1;\,1;\,-1\}$, $\overline{\mathbf{c}}=\{3;\,2;\,0\}$. Найти $\text{Пр}_{\overline{\mathbf{b}}+2\overline{\mathbf{c}}}\overline{\mathbf{a}}$.

ВАРИАНТ 4

1. Доказать, что векторы $\overline{\mathbf{a}} = \{1;\ -1;\ 2\}$, $\overline{\mathbf{b}} = \{2;\ 1;\ 0\}$, $\overline{\mathbf{c}} = \{1;\ 2;\ -2\}$, $\overline{\mathbf{d}} = \{2;\ 1;\ 0\}$ компланарны и найти разложение вектора $\overline{\mathbf{d}}$ по векторам $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$, $\overline{\mathbf{c}}$.
2. Найти угол между векторами $\overline{\mathbf{a}} = 3\overline{\mathbf{e}}_1 + \overline{\mathbf{e}}_2$, $\overline{\mathbf{b}} = \overline{\mathbf{e}}_1 - 2\overline{\mathbf{e}}_2$, где $\overline{\mathbf{e}}_1$, $\overline{\mathbf{e}}_2$ – единичные векторы, образующие угол 60°.
3. Найти единичный вектор, перпендикулярный к вектору $\overline{\mathbf{a}} = \{1;\ -1;\ 2\}$ и оси абсцисс, и образующий тупой угол с осью Oz.
4. Даны вершины треугольника: $A(-1;\ 2;\ 0)$, $B(2;\ 1;\ -1)$, $C(1;\ 0;\ 2)$. Найти внутренние углы этого треугольника.
5. Даны вершины треугольной пирамиды: $A(-1;\ 2;\ 1)$, $B(2;\ 1;\ 0)$, $C(-2;\ 0;\ 1)$, $D(1;\ 2;\ -3)$. Вычислить ее объем и длину высоты, опущенной из вершины D.

ВАРИАНТ 5

1. Даны векторы $\overline{\mathbf{e}}_1 = \{2;\ 0;\ 1\}$, $\overline{\mathbf{e}}_2 = \{-1;\ 1;\ 2\}$, $\overline{\mathbf{e}}_3 = \{1;\ -1;\ 0\}$. Найти разложение вектора $\overline{\mathbf{a}} = \{-1; 2; 3\}$ по базису $\overline{\mathbf{e}}_1$, $\overline{\mathbf{e}}_2$, $\overline{\mathbf{e}}_3$.
2. Определить длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\overline{\mathbf{a}} = 2\overline{\mathbf{e}}_1 - \overline{\mathbf{e}}_2$ и $\overline{\mathbf{b}} = \overline{\mathbf{e}}_1 + 3\overline{\mathbf{e}}_2$, где $\overline{\mathbf{e}}_1$, $\overline{\mathbf{e}}_2$ – векторы, образующие угол 30° и $|\overline{\mathbf{e}}_1| = 2$, $|\overline{\mathbf{e}}_2| = 3$.
3. Найти единичный вектор, образующий с осью Oy угол 60° и с осью Oz – 120°.
4. Даны последовательные вершины четырехугольника: $A(2;\ -1;\ 0)$, $B(-1;\ 2;\ 1)$, $C(3;\ 1;\ 1)$, $D(1;\ 0;\ 3)$. Доказать, что его диагонали перпендикулярны.
5. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах: $\overline{AB} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$, $\overline{AC} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\overline{AD} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины A.

ВАРИАНТ 6

1. Может ли вектор составлять с осями координат углы 45°, 60°, 30°?
2. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\overline{\mathbf{a}} = 2\overline{\mathbf{e}}_1 + \overline{\mathbf{e}}_2$, $\overline{\mathbf{b}} = -\overline{\mathbf{e}}_1 + 3\overline{\mathbf{e}}_2$, где $\overline{\mathbf{e}}_1$ и $\overline{\mathbf{e}}_2$ – векторы, образующие 60° и $|\overline{\mathbf{e}}_1| = 2$, $|\overline{\mathbf{e}}_2| = 1$.
3. Найти вектор $\overline{\mathbf{x}}$, зная, что он перпендикулярен векторам $\overline{\mathbf{a}} = \{2;\ 1;\ -1\}$, $\overline{\mathbf{b}} = \{1;\ 0;\ -2\}$, образует тупой угол с осью Ox и $|\overline{\mathbf{x}}| = 2$.
4. Даны вершины треугольника: $A(1;-1;2)$, $B(2;0;-1)$, $C(0;0;1)$. Определить внешний угол треугольника при вершине A.
5. Доказать, что векторы $\overline{\mathbf{a}} = \{-1;\ 2;\ 0\}$, $\overline{\mathbf{b}} = \{2;\ -1;\ 1\}$, $\overline{\mathbf{b}} = \{1;\ 1;\ 1\}$ компланарны и получить разложение вектора $\overline{\mathbf{c}}$ по векторам $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$.

ВАРИАНТ 7

1. Выяснить, лежат ли точки $A(2;\,-1;\,0)$, $B(-1;\,0;\,2)$, $C(0;\,1;\,-1)$ на одной прямой.
2. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\overline{\mathbf{e}}_1 = \overline{\mathbf{m}} + 2\overline{\mathbf{n}}$, $\overline{\mathbf{e}}_2 = \overline{\mathbf{m}} - 3\overline{\mathbf{n}}$, где $\left|\,\overline{\mathbf{m}}\,\right| = 3$, $\left|\,\overline{\mathbf{n}}\,\right| = 1$, $(\overline{\mathbf{m}}\widehat{,}\overline{\mathbf{n}}) = \dfrac{\pi}{6}$.
3. Найти вектор $\overline{\mathbf{x}}$, если он перпендикулярен вектору $\overline{\mathbf{a}} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, оси Oz, образует с Ox тупой угол и $\left|\,\overline{\mathbf{x}}\,\right| = 3$.
4. Треугольник построен на векторах $\overline{\mathbf{AB}} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\overline{\mathbf{AC}} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$. Найти длину высоты этого треугольника, опущенную на вектор $\overline{\mathbf{AC}}$.
5. Объем треугольной пирамиды $V = 3$. Три ее вершины находятся в точках $A(1;\,-2;\,1)$, $B(2;\,0;\,-1)$, $C(2;\,3;\,-2)$. Найти координаты четвертой вершины D, если она находится на оси Ox.

ВАРИАНТ 8

1. Даны три вектора $\overline{\mathbf{p}} = \{-1;\ 2\ 0\}$, $\overline{\mathbf{q}} = \{2;\ -1;\ 1\}$, $\overline{\mathbf{r}} = \{1;\ 1;\ 2\}$. Найти разложение вектора $\overline{\mathbf{c}} = \{2;\ -1;\ 0\}$ по базису $\overline{\mathbf{p}}$, $\overline{\mathbf{q}}$, $\overline{\mathbf{r}}$.
2. Найти $\text{Пр}_{\overline{\mathbf{b}}}\overline{\mathbf{a}}$, где $\overline{\mathbf{a}} = 2\overline{\mathbf{e}}_1 - 3\overline{\mathbf{e}}_2$, $\overline{\mathbf{b}} = \overline{\mathbf{e}}_1 + \overline{\mathbf{e}}_2$, $\overline{\mathbf{e}}_1$ и $\overline{\mathbf{e}}_2$ – единичные векторы, образующие угол 60°.
3. Найти вектор $\overline{\mathbf{x}}$, если он коллинеарен вектору $\overline{\mathbf{a}} = \{-1;\ 2;\ -1\}$, образует с осью абсцисс острый угол и $\left|\overline{\mathbf{x}}\right| = 4$.
4. Даны вершины треугольника: $A(-1;\ 2;\ 0)$, $B(0;\ 1\ -1)$, $C(-1;\ 0;\ 2)$. Найти внутренние углы этого треугольника.
5. Выяснить, лежат ли четыре точки $A(-1;\ 2;\ 0)$, $B(0 : 1;\ -1)$, $C(2;\ 3;\ 1)$ и $D(1;\ 1;\ 1)$ в одной плоскости.

ВАРИАНТ 9

1. Векторы $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ взаимно перпендикулярны и $|\overline{\mathbf{a}}| = 3$, $|\overline{\mathbf{b}}| = 5$. Найти $|\overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{b}}|$ и $|\overline{\mathbf{a}} - \overline{\mathbf{b}}|$.
2. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\overline{\mathbf{a}} = \overline{\mathbf{e}}_1 - 2\overline{\mathbf{e}}_2$, $\overline{\mathbf{b}} = 3\overline{\mathbf{e}}_1 + \overline{\mathbf{e}}_2$, если $|\overline{\mathbf{e}}_1| = 2$, $|\overline{\mathbf{e}}_2| = 1$, $(\overline{\mathbf{e}}_1 \widehat{,} \overline{\mathbf{e}}_2) = 60^\circ$.
3. Найти единичный вектор $\overline{\mathbf{p}}$, перпендикулярный к вектору $\overline{\mathbf{a}} = \{-1;\ 2;\ -1\}$ и к оси Oz.
4. Даны вершины треугольника: $A(-1;\ 2;\ 0)$, $B(2;\ 0;\ -1)$, $C(1;\ 2;\ -1)$. Найти $\text{Пр}_{\overline{\mathbf{AC}}}\overline{\mathbf{AB}}$.
5. Найти объем пирамиды с вершинами в точках $A(2;\ -1;\ 1)$, $B(-1;\ 2;\ -1)$, $C(3;\ 1;\ 0)$, $D(0;\ 0;\ 1)$ и вычислить длину высоты, опущенной из вершины D.

ВАРИАНТ 10

1. Даны три последовательные вершины параллелограмма: $A(-1;\,2;\,3)$, $B(2;\,1;\,0)$, $C(1;\,2;\,2)$. Найти координаты четвертой вершины этого параллелограмма.
2. Вычислить внутренние углы треугольника, построенного на векторах $\overline{\mathbf{AB}} = \overline{\mathbf{e}}_1 - 2\overline{\mathbf{e}}_2$, $\overline{\mathbf{AC}} = 3\overline{\mathbf{e}}_1 + \overline{\mathbf{e}}_2$, если $\overline{\mathbf{e}}_1 \perp \overline{\mathbf{e}}_2$ и $|\,\overline{\mathbf{e}}_1\,| = 2$, $|\,\overline{\mathbf{e}}_2\,| = 3$.
3. В плоскости yOz найти вектор $\overline{\mathbf{p}}$, перпендикулярный вектору $\overline{\mathbf{q}} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, имеющий одинаковую с ним длину и образующий острый угол с осью Oz.
4. Вычислить площадь треугольника с вершинами в точках $A(-1;\,2;\,0)$, $B(2;\,1;\,-1)$, $C(1;\,0;\,2)$. Найти длину высоты этого треугольника, опущенную из вершины B.
5. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{\mathbf{a}} = \{-1;\,2;\,0\}$, $\overline{\mathbf{b}} = \{2;\,1;\,-1\}$, $\overline{\mathbf{c}} = \{0;\,2;\,1\}$.

ВАРИАНТ 11

ВАРИАНТ 12

ВАРИАНТ 13

ВАРИАНТ 14

ВАРИАНТ 15

ВАРИАНТ 16

ВАРИАНТ 17

ВАРИАНТ 18

ВАРИАНТ 19

ВАРИАНТ 20

ВАРИАНТ 21

ВАРИАНТ 22

ВАРИАНТ 23

ВАРИАНТ 24

ВАРИАНТ 25

ВАРИАНТ 26

ВАРИАНТ 27

ВАРИАНТ 28