

Тема 1. Элементы линейной алгебры

ЗАНЯТИЕ 1. Матрицы и действия над ними

1. Даны матрицы: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & -4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \\ 5 & -7 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Найти: а) $\mathbf{D} = 2\mathbf{A} + 3\mathbf{B} - \mathbf{C}$, \mathbf{D}^T ;

б) $\mathbf{F} = \mathbf{A} - \mathbf{B} + 2\mathbf{C}$, \mathbf{F}^T .

Ответ: $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 7 \\ -3 & 11 & 21 \\ 12 & -11 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 11 & -2 & 3 \\ 1 & 22 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Найти матрицу \mathbf{X} , если

а) $2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 2 & 8 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$; б) $3 \cdot \mathbf{X} + \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

Ответ: а) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3 & -13 \\ -2 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$; б) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -2 & 1/3 \\ 1/3 & -4 \end{pmatrix}$.

3. Найти \mathbf{AB} , если $\mathbf{A} = (-1 \ 2 \ 2 \ 3)$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\mathbf{AB} = -4$.

4. Найти \mathbf{AB} и \mathbf{BA} , если $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 39 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 15 & -1 \end{pmatrix}$.

5. Найти \mathbf{AB} , если $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 5 & 7 & 9 & -1 \\ 3 & 4 & 5 & 15 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 8 & 46 \\ 22 & 30 & 38 & 58 \end{pmatrix}$.

6. Найти \mathbf{AB} и \mathbf{BA} , если $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 8 & 11 & 1 \\ 9 & 6 & -8 \\ -6 & -9 & -8 \end{pmatrix}$, $\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 9 & 2 & 10 \\ 12 & 15 & 0 \end{pmatrix}$.

7. Найти \mathbf{BA} , если $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & -6 & -9 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

8. Найти $\mathbf{ABC} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. **Ответ:** $\mathbf{ABC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix}$.

9. Найти \mathbf{A}^3 , если $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **Ответ:** $\mathbf{A}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

10. Найти значение многочлена $f(x) = -2x^2 + 3x + 4$ при $x = \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$, $f(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 13 & -10 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$.

11. Найти $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^n$. **Ответ:** $\begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$.

12. Найти $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ при $n = 2k$, $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ при $n = 2k + 1$.

13. Вычислить $\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \right]^n$. **Ответ:** $\begin{pmatrix} 3n+1 & -n \\ 9n & -3n+1 \end{pmatrix}$.