

## § 3. Ранг матрицы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Минор  $M_k$  матрицы  $A$  называется ее **базисным минором**, если он отличен от нуля, а все миноры матрицы  $A$  более высокого порядка  $k+1, k+2, \dots, t$  равны нулю.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **Рангом матрицы**  $A$  называется порядок ее базисного минора.

Обозначают:  $r(A)$  или  $\text{rang}(A)$ .

## Методы нахождения ранга матрицы

### **1) Метод окаймляющих миноров.**

Пусть  $M_s$  – минор порядка  $s$ . **Окаймляющим минором** для минора  $M_s$  называется любой минор порядка  $s+1$ , содержащий минор  $M_s$ .

**ТЕОРЕМА 1.** *Если в матрице  $A$  есть минор  $k$ -го порядка отличный от нуля, а все окаймляющие его миноры равны нулю, то ранг матрицы  $A$  равен  $k$ .*

Найти ранг матрицы можно по следующей схеме (**Метод окаймляющих миноров**):

- 1) Находим в матрице минор  $M_k$  порядка  $k$ , отличный от нуля (где  $k \geq 1$ ).
- 2) Ищем его окаймляющий минор  $M_{k+1}$  отличный от нуля. Если такого минора не существует, то ранг матрицы равен  $k$ . Если окаймляющий минор  $M_{k+1} \neq 0$ , то рассматриваем окаймляющие миноры для  $M_{k+1}$  и т.д.

## 2) Метод элементарных преобразований.

**Элементарными преобразованиями матрицы** называются преобразования следующего вида:

- 1) умножение строки (столбца) на число  $\alpha \neq 0$ ;
- 2) прибавление к  $i$ -й строке (столбцу)  $k$ -й строки (столбца), умноженной на число  $\alpha \neq 0$ ;
- 3) перестановка  $i$ -й и  $k$ -й строки (столбца);
- 4) вычеркивание одной из двух пропорциональных или равных строк (столбцов);
- 5) вычеркивание нулевых строк (столбцов).

Матрица **B** называется **эквивалентной** матрице **A**, если она может быть получена из **A** элементарными преобразованиями.

Обозначают:  $A \sim B$ .

ТЕОРЕМА 2. *Эквивалентные матрицы имеют равные ранги.*

ТЕОРЕМА 3. *Любая матрица  $A$  эквивалентна некоторой треугольной или трапециевидной матрице, не содержащей нулевых и пропорциональных строк. Причем эта треугольная или трапециевидная матрица может быть получена из  $A$  элементарными преобразованиями только строк.*

Найти ранг матрицы можно по следующей схеме (**метод элементарных преобразований**):

- 1) с помощью элементарных преобразований строк получаем для матрицы  $A$  эквивалентную треугольную или трапециевидную матрицу  $B$ ;
- 2) находим в матрице  $B$  базисный минор и определяем ранг матрицы  $B$  и матрицы  $A$ .

## § 4. Системы линейных уравнений

### 1. Основные понятия

Уравнение называется *линейным*, если оно содержит неизвестные только в первой степени и не содержит произведений неизвестных, т.е. если оно имеет вид  $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ , где  $a_i, b$  – числа.

$a_i$  называются *коэффициентами уравнения*,  $b$  называется *свободным членом*.

Если  $b = 0$ , то уравнение называется *однородным*. В противном случае уравнение называется *неоднородным*.

Рассмотрим систему  $m$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными, т.е. систему вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (1)$$

Обозначим через  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{A}^*$  следующие матрицы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}^* = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Матрицу  $\mathbf{A}$  называют **основной матрицей** системы (1),  
матрицу  $\mathbf{A}^*$  – **расширенной матрицей** системы (1).

Пусть  $\mathbf{X}$  – матрица-столбец неизвестных,  $\mathbf{B}$  – матрица-столбец свободных членов, т.е.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Тогда систему (1) можно записать в виде матричного уравнения  $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ . Его называют **матричной формой** системы (1).

Упорядоченный набор чисел  $c_1, c_2, \dots, c_n$  называется **решением системы** (1), если он обращает в верное равенство каждое уравнение системы.

Если система линейных уравнений имеет хотя бы одно решение, то ее называют **совместной**. Система линейных уравнений, не имеющая решений, называется **несовместной**.

Система, имеющая единственное решение, называется **определенной**. Система, имеющая множество решений, называется **неопределенной**.

**ТЕОРЕМА 1** (Кронекера – Капелли). Система линейных уравнений (1) совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу ее расширенной матрицы, т.е.  $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^*)$ .

**ТЕОРЕМА 2** (критерий единственности решения). Система линейных уравнений (1) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу ее расширенной матрицы и равен числу переменных, т.е.  $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^*) = n$ .

## 2. Методы решения систем линейных уравнений

### Матричный метод.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **Обратной** к матрице  $A$  называется матрица, обозначаемая  $A^{-1}$ , такая, что  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ .

### СВОЙСТВА ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

- 1) Если матрица  $A$  имеет обратную, то  $A$  и  $A^{-1}$  – квадратные одного порядка.
- 2) Если обратная матрица существует, то она единственная.
- 3) Если матрица  $A$  имеет обратную, то определитель матрицы  $A$  отличен от нуля.

Квадратная матрица, определитель которой отличен от нуля, называется **невырожденной**.

**ТЕОРЕМА 3.** Пусть  $\mathbf{A}$  – квадратная матрица. Матрица  $\mathbf{A}$  имеет обратную тогда и только тогда, когда ее определитель  $|\mathbf{A}|$  отличен от нуля. Причем обратная матрица  $\mathbf{A}^{-1}$  может быть найдена по формуле:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \mathbf{S}^T$$

где  $\mathbf{S}$  – матрица из алгебраических дополнений элементов матрицы  $\mathbf{A}$ , т.е.

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Матрица  $\mathbf{S}^T$  называется **союзной** (или присоединенной, или взаимной) для матрицы  $\mathbf{A}$ .

Нахождение решения по формуле  $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$  называют **матричным методом решения** системы.

## Метод Крамера

**ТЕОРЕМА 4 (Крамера).** *Если в системе линейных уравнений число уравнений  $m$  и число неизвестных  $n$  совпадает и  $|\mathbf{A}| \neq 0$ , то система совместна и имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам*

$$x_i = \frac{D_i}{D} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4)$$

где  $D = |\mathbf{A}|$ , а  $D_i$  – определитель, получаемый из определителя  $D$  заменой его  $i$ -го столбца на столбец свободных членов.

Формулы (4) называются **формулами Крамера**.