

Тема 3. «Прямая в пространстве»

- 1) Записать уравнения перпендикуляра, опущенного из точки $A(2; -3; 5)$ на плоскость $x - y + 2z - 4 = 0$ (уравнения записать в каноническом, параметрическом и общем виде).

Ответ: $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-5}{2}$.

- 2) Записать уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(0; 2; -3)$

параллельно прямой $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3 + 4t \\ z = -4 + 7t \end{cases}$

Ответ: $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+3}{7}$.

- 3) Записать уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(1; 2; -4)$

параллельно прямой $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases}$

Ответ: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+4}{-1}$ (1-й способ)

$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x + z + 3 = 0 \end{cases}$ (2-й способ)

- 4) Записать уравнение прямой $\begin{cases} x - 2y + z - 1 = 0 \\ 2x + y + 8z - 2 = 0 \end{cases}$ в каноническом виде.

Ответ: $\frac{x-1}{-17} = \frac{y}{-6} = \frac{z}{5}$.

- 5) Записать уравнения прямой, проходящей через точку $M(3; 2; -1)$ и пересекающей ось Ox под прямым углом.

Ответ: $\frac{x-3}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-1} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2t \\ z = -t \end{cases}$

- 6) Записать уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(-1; -9; 12)$ и $M_2(1; -1; 4)$. Определить координаты точки пересечения этой прямой с плоскостью xOy .

Ответ: $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{-8} = \frac{z-4}{8}$, $P(2; 3; 0)$.

- 7) Дана плоскость $x + y - 2z - 6 = 0$ и точка $M_1(1; 1; 1)$ не принадлежащая этой плоскости. Найти точку M_2 , симметричную точке M_1 относительно заданной плоскости.

Ответ: $M_2(3; 3; -3)$

- 8) Записать уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(0; 5; -2)$, ортогонально прямой

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{3} \quad \text{и} \quad \frac{x-2}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}.$$

Ответ: $\frac{x}{-3} = \frac{y-5}{10} = \frac{z+2}{-8}$

- 9) Найти расстояние от точки $M(2; 4; -1)$ до прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$.

Ответ: $d = \frac{\sqrt{42}}{\sqrt{14}} = \sqrt{3}$, $[\overline{M_0M}, \ell] = \{-4; 1; -5\}$, $\overline{M_0M} = \{1; 4; 0\}$.

- 10) Доказать, что прямые

$$\ell_1 : \begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0 \\ x - y - z - 22 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \ell_2 : \frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4}$$

параллельны. Найти расстояние между ними. (Клетеник, 1064)

Ответ: $\ell_1 : \frac{x+12}{-3} = \frac{y}{1} = \frac{z+34}{-4}$, $d = \frac{\sqrt{16250}}{\sqrt{26}} = \sqrt{625} = 25$,

$$[\overline{M_2M_1}, \ell_2] = \{63; 109; -20\}$$

- 11) Даны прямые $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4}$ и $\frac{x-3}{\ell} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2}$. При каком значении ℓ они пересекаются. Найти точку пересечения прямых. (Клетеник, 1027)

Ответ: $\ell = 3$, $Q(0; -3; 5)$ ($\leftrightarrow t = 1, \tau = -1$).

- 12) Доказать, что прямые скрещиваются. Найти угол (острый) между ними

$$\ell_1 : \begin{cases} x = 2t - 4 \\ y = t + 4 \\ z = -2t - 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \ell_2 : \begin{cases} x = 4t - 5 \\ y = -3t + 5 \\ z = -5t + 5 \end{cases}$$

Ответ: $\varphi = 45^\circ$