Аналитическая геометрия

Прямая в пространстве

2021 г.

§ 3. Прямая в пространстве

1. Уравнения прямой в пространстве

Пусть $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ – уравнения любых двух различных плоскостей, содержащих прямую ℓ .

Тогда координаты любой точки прямой ℓ удовлетворяют одновременно обоим уравнениям, т.е. являются решениями системы

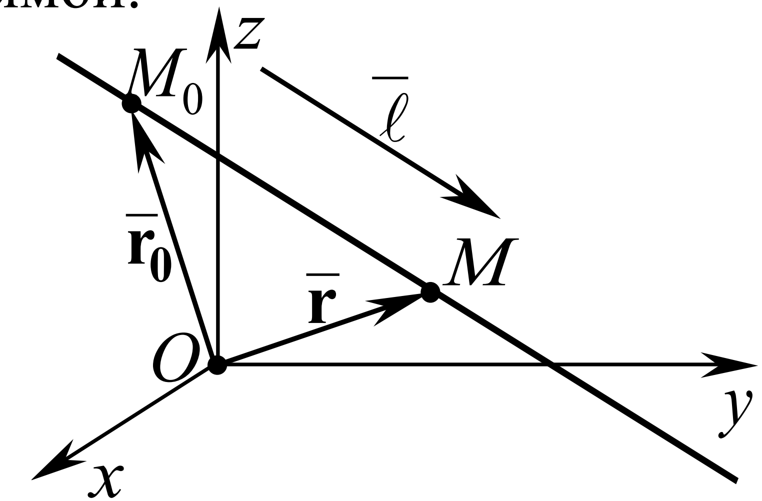
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Систему (1) называют ***общими уравнениями прямой в пространстве***.

Другие формы записи уравнений прямой в пространстве – ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ и КАНОНИЧЕСКИЕ уравнения.

ЗАДАЧА 1. Записать уравнение прямой в пространстве, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$, параллельно вектору $\overline{\ell} = \{m;n;p\}$

Вектор, параллельный прямой в пространстве, называют ***направляющим вектором*** этой прямой.



Пусть M – текущая точка прямой ,

$\overline{\mathbf{r}}$ – радиус-вектор точки M ,

$\overline{\mathbf{r}}_0$ – радиус-вектор точки M_0.

Рассмотрим $\overline{\ell}$ и $\overline{\mathbf{M_0M}} = \overline{\mathbf{r}} - \overline{\mathbf{r}}_0$.

По условию $\overline{\ell} \parallel \overline{\mathbf{M_0M}}$,

$\Rightarrow$ $\exists t \in \mathbb{R}$ такое, что $\overline{\mathbf{r}} - \overline{\mathbf{r}}_0 = t\overline{\ell}$.

Уравнение $$\overline{\mathbf{r}} = \overline{\mathbf{r}}_0 + t\overline{\ell} \qquad (2^*)$$

и систему уравнений $$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot m, \\ y = y_0 + t \cdot n, \\ z = z_0 + t \cdot p. \end{cases} \qquad (2)$$

называют ***параметрическими уравнениями прямой в пространстве*** (в векторной и координатной форме).

Пусть в задаче 1 вектор $\overline{\ell}$ не параллелен ни одной из координатных осей (т.е. $m \neq 0$, $n \neq 0$ и $p \neq 0$).

Выразим t из параметрических уравнений прямой:

$$x = x_0 + t \cdot m \qquad\qquad y = y_0 + t \cdot n \qquad\qquad z = z_0 + t \cdot p$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{x - x_0}{m}; \qquad\qquad \Rightarrow \quad t = \frac{y - y_0}{n}; \qquad\qquad \Rightarrow \quad t = \frac{z - z_0}{p}.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Уравнения
$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \qquad (3)$$

называют ***каноническими уравнениями прямой в пространстве***.

Частным случаем канонических уравнений являются УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ДВЕ ЗАДАННЫЕ ТОЧКИ.

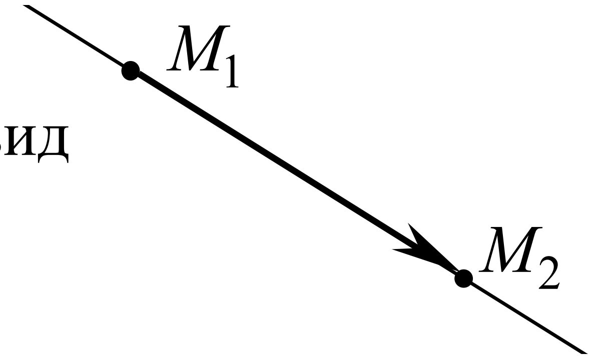
Пусть прямая проходит через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

Тогда $\overline{\mathbf{M_1M_2}}$ – направляющий вектор прямой.

Имеем: $\overline{\mathbf{M_1M_2}} = \{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\}$.

$\Rightarrow$ канонические уравнения прямой имеют вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$



Уравнения $$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \qquad (4)$$

называют ***уравнениями прямой, проходящей через две точки*** $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

2. Переход от общих уравнений прямой к каноническим

Пусть прямая ℓ задана общими уравнениями:

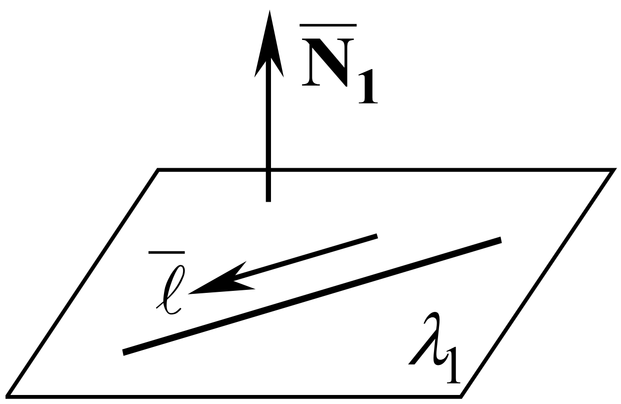
$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Чтобы записать канонические (параметрические) уравнения этой прямой, *необходимо найти ее направляющий вектор и координаты какой-нибудь точки* $M_0(x_0;y_0;z_0)$ *на прямой*.

а) Координаты точки M_0 – это одно из решений системы (1).

б) Направляющий вектор $\bar{\ell} = [\bar{\mathbf{N}}_1, \bar{\mathbf{N}}_2]$,

где $\bar{\mathbf{N}}_1 = \{A_1;\ B_1;\ C_1\}$ и $\bar{\mathbf{N}}_2 = \{A_2;\ B_2;\ C_2\}$ – нормальные векторы к плоскостям λ_1 и λ_2, уравнения которых входят в общие уравнения прямой.



3. Взаимное расположение прямых в пространстве

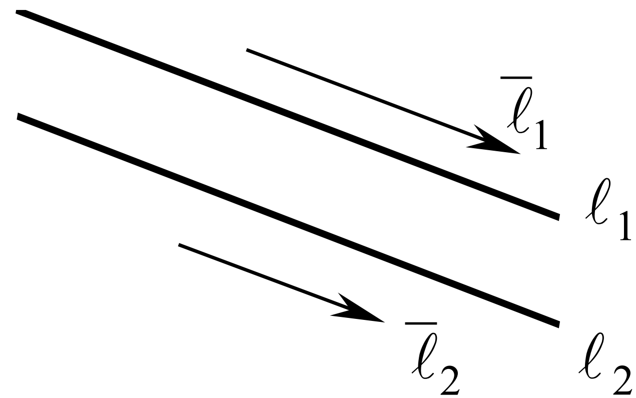
В пространстве две прямые могут:

а) быть параллельны, б) пересекаться, в) скрещиваться.

Пусть прямые ℓ_1 и ℓ_2 заданы каноническими уравнениями:

$$\ell_1:\ \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}, \qquad \ell_2:\ \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

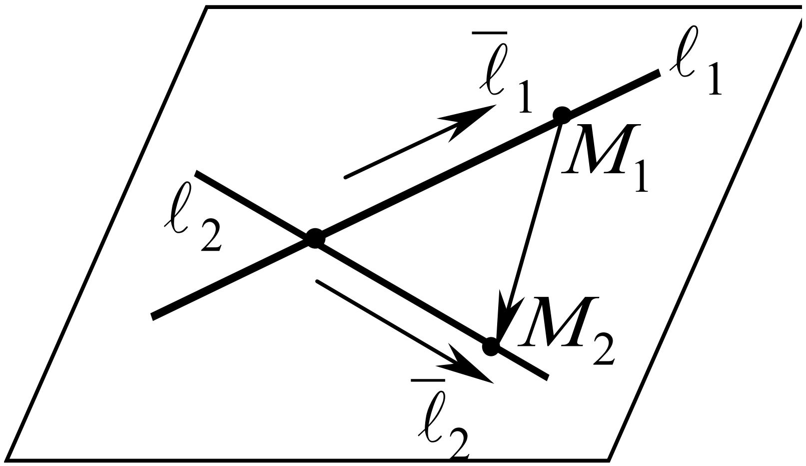
1) Пусть прямые ℓ_1 и ℓ_2 параллельны.



Прямые параллельны $\Leftrightarrow$ *их направляющие векторы* $\overline{\ell}_1=\{m_1;\, n_1;\, p_1\}$ и $\overline{\ell}_2=\{m_2;\, n_2;\, p_2\}$ *коллинеарные*, т.е. выполняется условие:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}. \qquad (6)$$

2) Пусть прямые ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются.



Прямые ℓ_1 *и* ℓ_2 *пересекаются* $\Leftrightarrow$ *они не параллельны и для них выполняется условие* $\left(\overline{\mathbf{M_1M_2}}, \overline{\ell}_1, \overline{\ell}_2\right) = 0$ (7*)

или, в координатной форме,

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (7)$$

3) Если для прямых ℓ_1 и ℓ_2 не выполняется условие (7) (или (7*)), то прямые скрещиваются.

4. Задачи, связанные с возможным взаимным расположением прямых

Возможное расположение прямых в пространстве приводит к следующим задачам:

1) параллельные прямые $\rightarrow$ расстояние между прямыми (т.е. расстояние от точки до прямой)?

2) пересекающиеся прямые $\rightarrow$ а) угол между прямыми?
б) точка пересечения прямых?

3) скрещивающиеся прямые $\rightarrow$ а) угол между прямыми?
б) расстояние между прямыми?

Пусть даны 2 прямые:

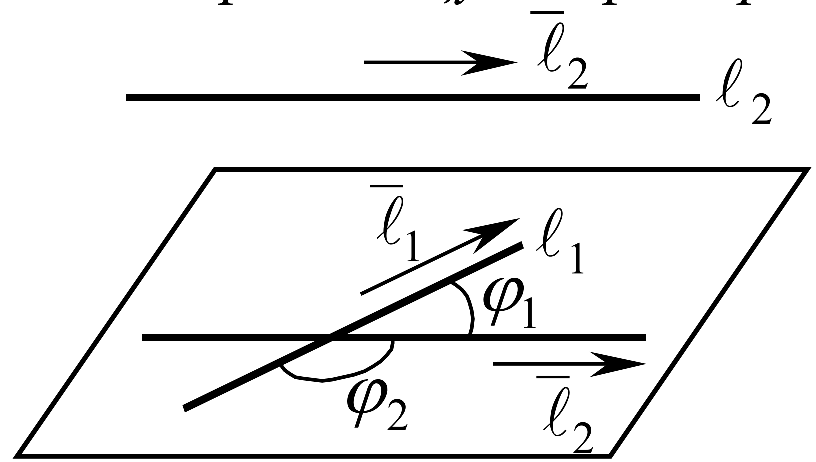
$$\ell_1: \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad \ell_2: \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

$\overline{\ell}_i = \{m_i; n_i; p_i\}$ – направляющий вектор прямой ℓ_i,

$M_i(x_i; y_i; z_i) \in \ell_i \quad (i = 1,2)$

ЗАДАЧА 2. Найти угол между пересекающимися (скрещивающимися) прямыми в пространстве.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Углом между двумя скрещивающимися прямыми*** *ℓ_1 и ℓ_2 называется угол между прямой ℓ_1 и проекцией прямой ℓ_2 на плоскость, проходящую через прямую ℓ_1 параллельно ℓ_2.*



Т.е., угол между скрещивающимися прямыми – это угол между двумя пересекающимися прямыми, параллельными данным.

Получаем:

$$\cos\varphi_{1,2} = \pm\frac{\left|(\overline{\ell}_1, \overline{\ell}_2)\right|}{\left|\overline{\ell}_1\right|\cdot\left|\overline{\ell}_2\right|} = \pm\frac{\left|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2\right|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}},$$

где знак плюс берется для острого угла, а знак минус – для тупого.

Пусть дана прямая $\ell:\ \dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$,

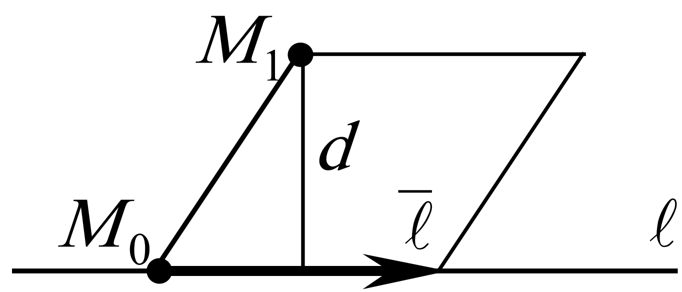
$M_1(x_1;y_1;z_1)$ – точка, не принадлежащая ℓ .

ЗАДАЧА 3. Найти расстояние от точки до прямой в пространстве.

Обозначим: $\overline{\ell}=\{m;\ n;\ p\}$ – направляющий вектор прямой ℓ ,

$M_0(x_0;y_0;z_0)$ – точка на прямой ℓ ,

d – расстояние от точки M_1 до ℓ .



Тогда
$$d=\frac{\left|\left[\overline{\ell},\ \overline{\mathbf{M_0M_1}}\right]\right|}{\left|\overline{\ell}\right|}.$$

Пусть даны две скрещивающиеся прямые:

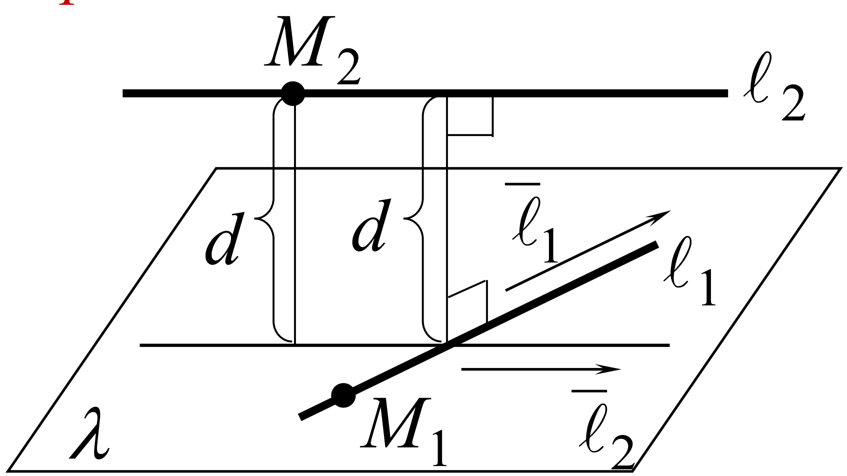
$$\ell_1: \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad \ell_2: \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2};$$

$\overline{\ell}_i=\{m_i; n_i; p_i\}$ – направляющий вектор прямой ℓ_i,

$M_i(x_i;y_i;z_i)\in \ell_i$ $(i=1,2)$.

ЗАДАЧА 4. Найти расстояние между ℓ_1 и ℓ_2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Расстоянием между двумя скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра.*



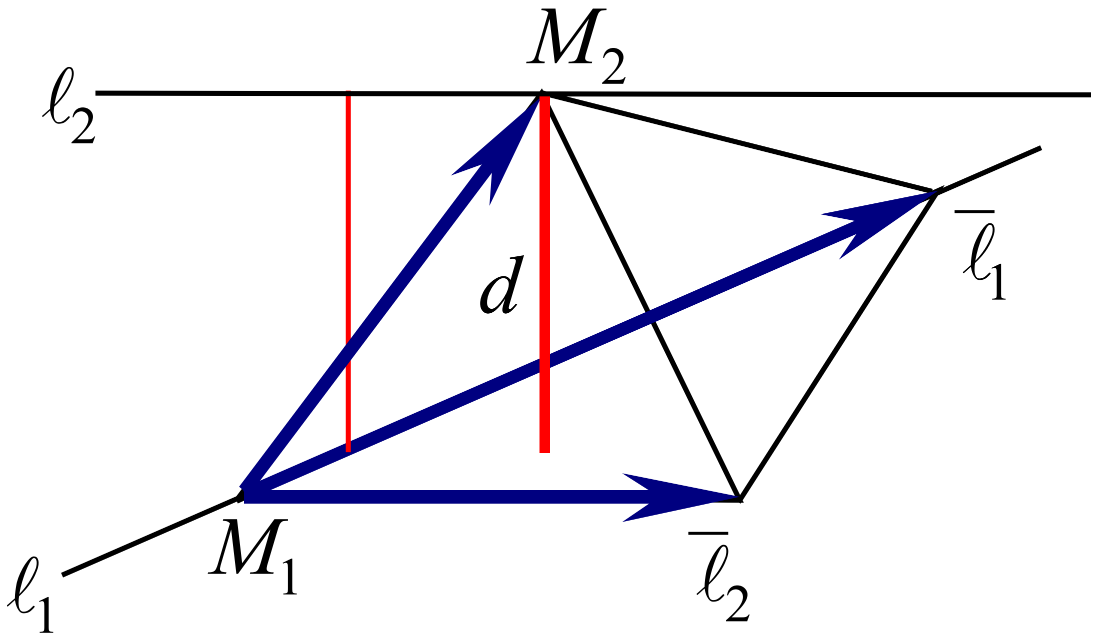
Получаем:

$$d=\frac{|Ax_2+By_2+Cz_2+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

где $Ax+By+Cz+D=0$ – общее уравнение плоскости λ,

$M_2(x_2; y_2; z_2)$ – любая точка на прямой ℓ_2.

Построим пирамиду на векторах $\overline{\ell}_1, \overline{\ell}_2, \overline{\mathbf{M_1M_2}}$.



Тогда d – высота пирамиды, опущенная из точки M_2.
Следовательно:

$$d = \frac{3 \cdot V_{\text{ïèð}}}{S_{\text{îñí}}} = \frac{3 \cdot \dfrac{1}{6} \cdot \left| \left(\overline{\ell}_1, \overline{\ell}_2, \overline{\mathbf{M_1M_2}} \right) \right|}{\dfrac{1}{2} \cdot \left| \left[\overline{\ell}_1, \overline{\ell}_2 \right] \right|} = \frac{\left| \left(\overline{\ell}_1, \overline{\ell}_2, \overline{\mathbf{M_1M_2}} \right) \right|}{\left| \left[\overline{\ell}_1, \overline{\ell}_2 \right] \right|}.$$

Пусть даны две пересекающиеся прямые

$$\ell_1: \ \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad \ell_2: \ \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

ЗАДАЧА 5. Найти точку пересечения прямых.

Пусть $M_0(x_0;y_0;z_0)$ – точка пересечения прямых.

Тогда $(x_0;y_0;z_0)$ – решение системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}, \\ \dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x=x_1+t\cdot m_1, \\ y=y_1+t\cdot n_1, \\ z=z_1+t\cdot p_1, \\ x=x_2+\tau\cdot m_2, \\ y=y_2+\tau\cdot n_2, \\ z=z_2+\tau\cdot p_2. \end{cases}$$

5. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Пусть в пространстве заданы плоскость λ и прямая ℓ. Они могут 1) быть параллельны;

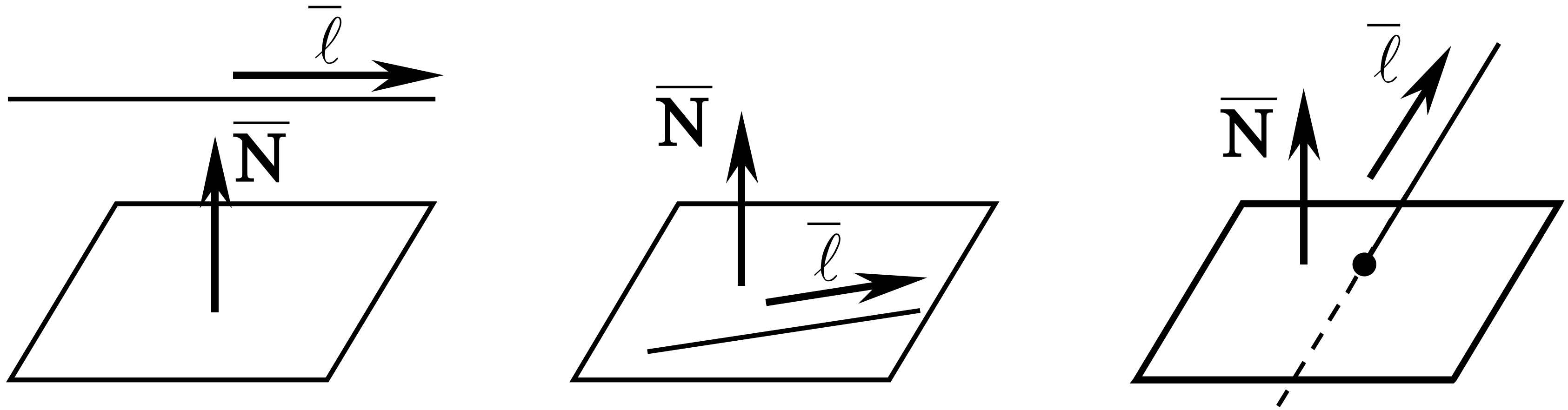
2) прямая может лежать в плоскости;

3) прямая и плоскость могут пересекаться в одной точке.

Пусть λ: $Ax + By + Cz + D = 0$ и $\ell : \dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$,

Тогда $\overline{\mathbf{N}} = \{A; B; C\}$ – нормальный вектор плоскости λ,

$\overline{\ell} = \{m; n; p\}$ – направляющий вектор прямой ℓ.



Имеем:

а) прямая и плоскость пересекаются в одной точке $\Leftrightarrow$

$$\left(\overline{\mathbf{N}}, \overline{\ell}\right) \neq 0.$$

Если прямая принадлежит плоскости, то координаты любой ее точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ удовлетворяют уравнению плоскости.

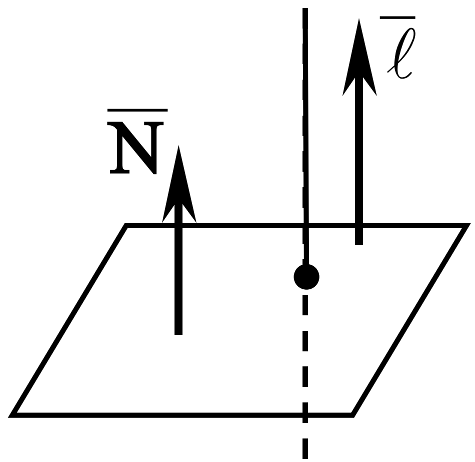
$\Rightarrow$ б) прямая принадлежит плоскости $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \left(\overline{\mathbf{N}}, \overline{\ell}\right) = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \end{cases}$$

в) прямая параллельна плоскости $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \left(\overline{\mathbf{N}}, \overline{\ell}\right) = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0; \end{cases}$$

Частным случаем пересечения прямой и плоскости в одной точке является перпендикулярность прямой и плоскости



В этом случае $\overline{\mathbf{N}} \parallel \overline{\ell}$,

т.е. $\dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{n} = \dfrac{C}{p}.$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Углом между прямой ℓ и плоскостью λ*** *называется угол φ между прямой ℓ и ее проекцией на плоскость λ.*

Из определения следует, что угол между прямой и плоскостью всегда острый.

Проведем прямую ℓ_1 через M_0 перпендикулярно λ.

$\Rightarrow \ \varphi = 90^\circ - \psi$, где ψ – острый угол между ℓ_1 и ℓ.

Так как $\overline{\mathbf{N}}$ – направляющий для ℓ_1, то

$$\cos\psi = \frac{\left|\left(\overline{\mathbf{N}}, \overline{\ell}\right)\right|}{\left|\overline{\mathbf{N}}\right| \cdot \left|\overline{\ell}\right|}.$$

Так как $\psi = 90^\circ - \varphi$, то

$$\cos\psi = \cos(90^\circ - \varphi) = \sin\varphi.$$

Следовательно

$$\sin\varphi = \cos\psi = \frac{\left|\left(\overline{\mathbf{N}}, \overline{\ell}\right)\right|}{\left|\overline{\mathbf{N}}\right| \cdot \left|\overline{\ell}\right|}.$$