Аналитическая геометрия

Плоскость

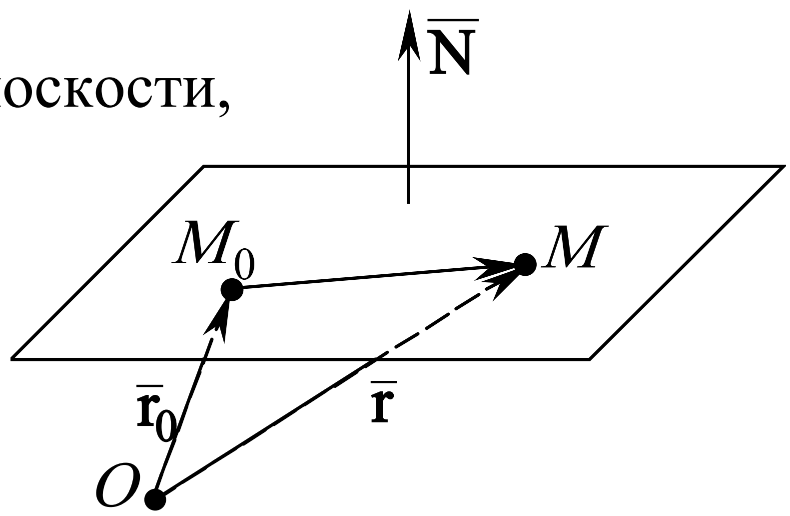
2021 г.

§ 2. Плоскость

1. Общее уравнение плоскости и его исследование

ЗАДАЧА 1. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$, перпендикулярно вектору $\bar{\mathbf{N}} = \{A; B; C\}$.

Вектор, перпендикулярный плоскости, называют ***нормальным вектором*** этой плоскости.



Пусть $M(x;y;z)$ – текущая точка на плоскости,

$\bar{\mathbf{r}}$ – радиус-вектор точки M ,

$\bar{\mathbf{r}}_0$ – радиус-вектор точки M_0.

Рассмотрим векторы

$$\bar{\mathbf{N}} \quad \text{и} \quad \overline{\mathbf{M_0M}} = \bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_0 .$$

По условию $\bar{\mathbf{N}} \perp \overline{\mathbf{M_0M}}$,

$$\Rightarrow \ (\bar{\mathbf{N}}, \bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_0) = 0 , \qquad (1^*)$$

или, в координатной форме

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 . \qquad (1)$$

Уравнения $$(\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_0, \bar{\mathbf{N}}) = 0 \qquad (1^*)$$

и $$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (1)$$

называют ***уравнением плоскости, проходящей через точку*** $M_0(x_0;y_0;z_0)$ ***перпендикулярно вектору*** $\bar{\mathbf{N}} = \{A;\ B;\ C\}$ (в векторной и координатной форме соответственно).

Уравнения $$(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{N}}) + D = 0 \qquad (2^*)$$

и $$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (2)$$

называют ***общим уравнением плоскости*** (в векторной и координатной форме соответственно).

ВЫВОДЫ:

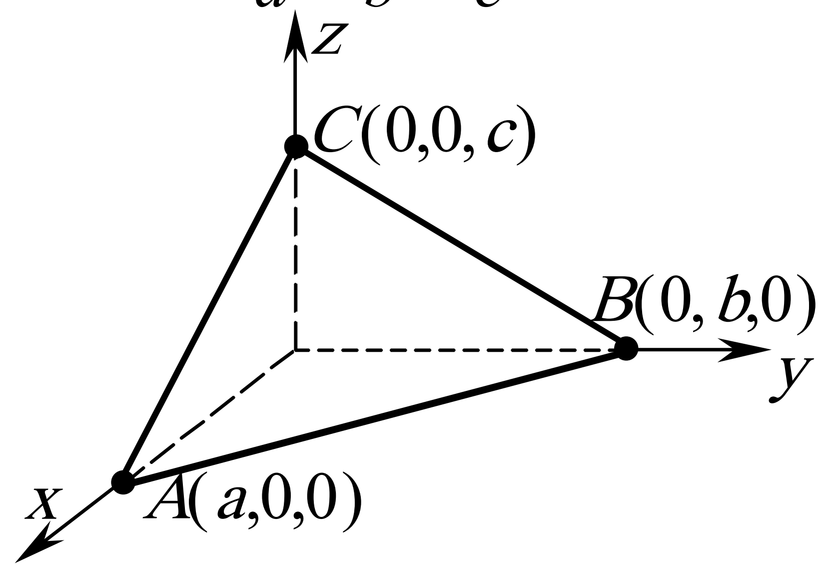
1) Плоскость является поверхностью первого порядка. В общем случае она задается уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, где A,B,C,D – числа.
2) Коэффициенты A, B, C не обращаются в ноль одновременно, так как с геометрической точки зрения это координаты вектора, перпендикулярного плоскости.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОСТИ

Если в уравнении $Ax+By+Cz+D=0$ все коэффициенты A,B,C и D отличны от нуля, то уравнение называют ***полным***; если хотя бы один из коэффициентов равен нулю – ***неполным***.

1) Пусть общее уравнение плоскости – полное. Тогда его можно записать в виде

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad (3)$$

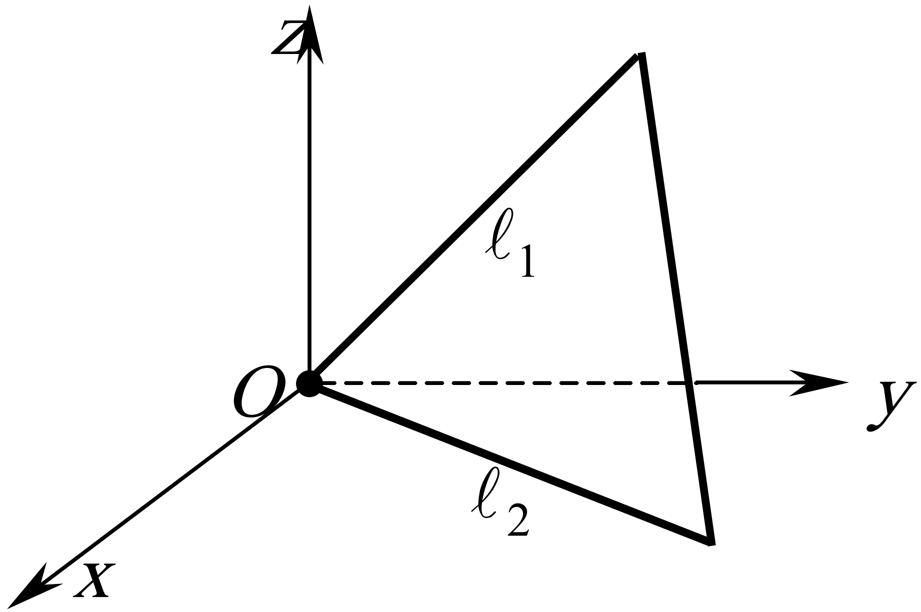


С геометрической точки зрения a, b и с – отрезки, отсекаемые плоскостью на координатных осях Ox, Oy и Oz соответственно. Уравнение (3) называют ***уравнением плоскости в отрезках***.

2) Пусть в общем уравнении плоскости коэффициенты A, B и C – ненулевые, а $D = 0$, т.е. уравнение плоскости имеет вид

$$Ax+By+Cz = 0.$$

Такая плоскость проходит через начало координат $O(0;0;0)$.



ℓ_1: $By+Cz = 0$ (пересечение с плоскостью Oyz)

ℓ_2: $Ax+By = 0$ (пересечение с плоскостью Oxy)

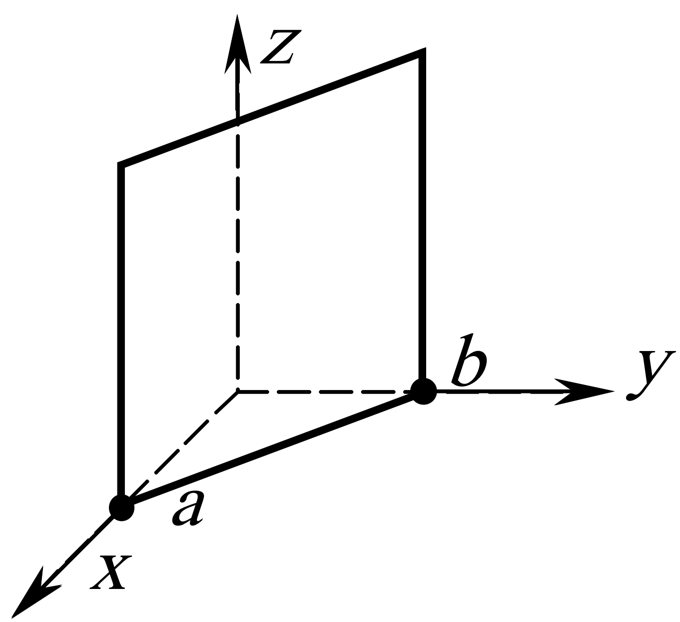
3) Пусть в общем уравнении плоскости один из коэффициентов A, B или C – нулевой, а $D \neq 0$, т.е. уравнение плоскости один из следующих трех видов:

а) $Ax+By+D = 0$ б) $Ax+Cz+D = 0$ в) $By+Cz+D = 0$.

Эти уравнения можно записать соответственно в виде

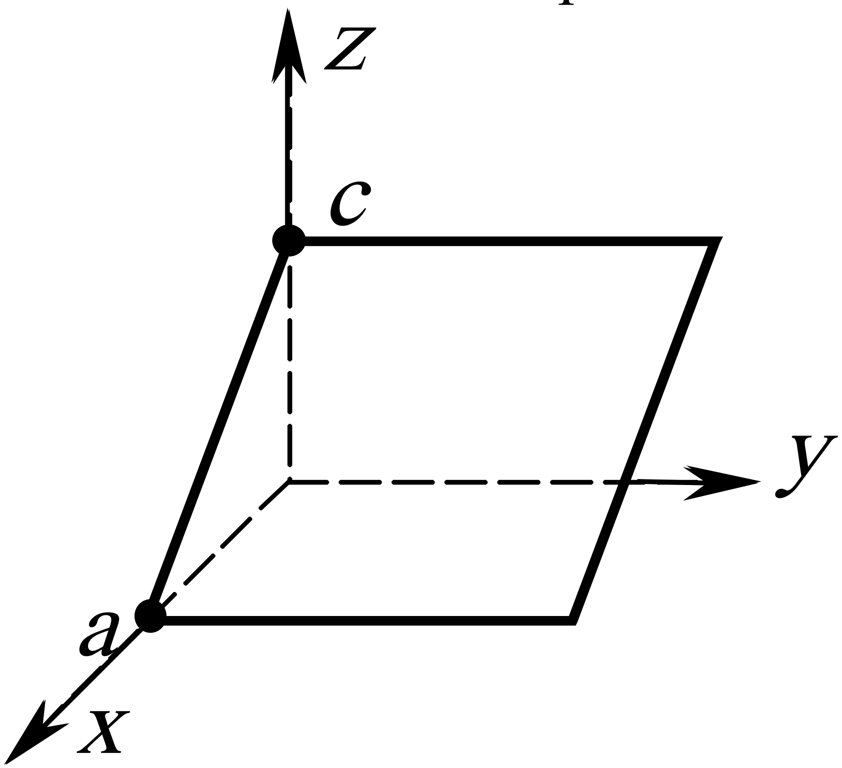
а) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ б) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=1$ в) $\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

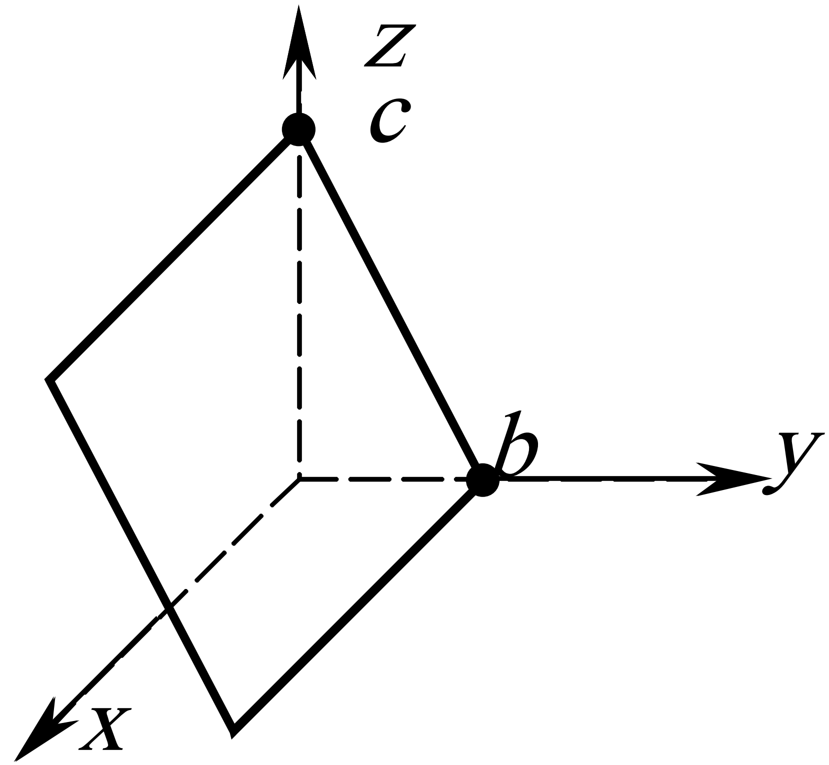
а) плоскость отсекает на осях Ox и Oy отрезки a и b соответственно и параллельна оси Oz;



б) плоскость отсекает на осях Ox и Oz отрезки a и c соответственно и параллельна оси Oy;

в) плоскость отсекает на осях Oy и Oz отрезки b и c соответственно и параллельна оси Ox.





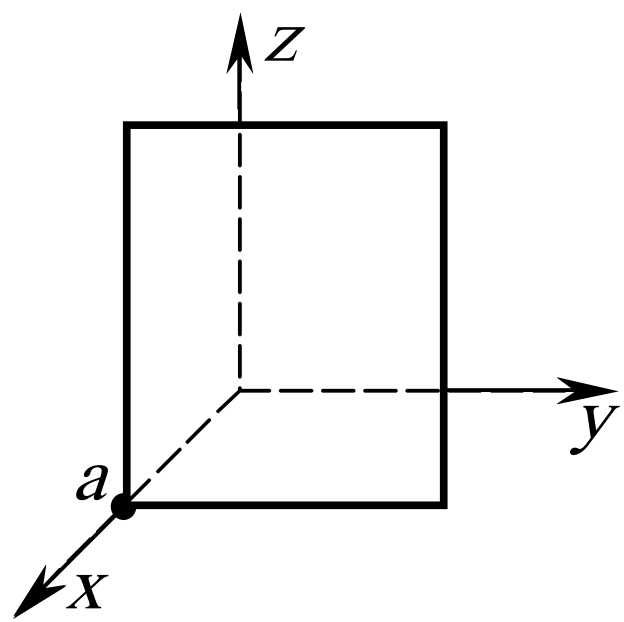
Иначе говоря, ***плоскость, в уравнении которой отсутствует одна из координат, параллельна оси отсутствующей координаты***.

4) Пусть в уравнении плоскости (2) два из трех коэффициентов A, B или C – нулевые, а $D \neq 0$, т.е. уравнение плоскости имеет вид: а) $Ax+D=0$ или б) $By+D=0$ или в) $Cz+D=0$.

Эти уравнения можно записать соответственно в виде:

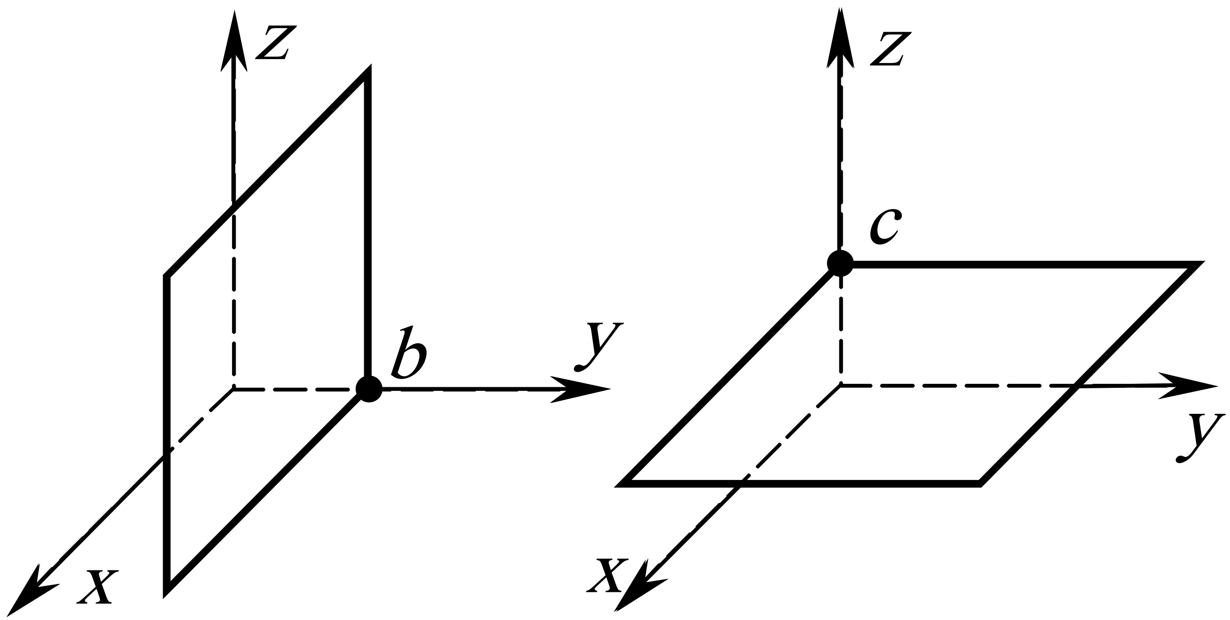
а) $\dfrac{x}{a}=1$ б) $\dfrac{y}{b}=1$ в) $\dfrac{z}{c}=1$

а) плоскость отсекает на оси Ox отрезок a и параллельна осям Oy и Oz (т.е. параллельна плоскости Oyz);



б) плоскость отсекает на Oy отрезок b и параллельна осям Ox и Oz (т.е. параллельна плоскости Oxz);

в) плоскость отсекает на Oz отрезок c и параллельна осям Ox и Oy (т.е. параллельна плоскости Oxy).

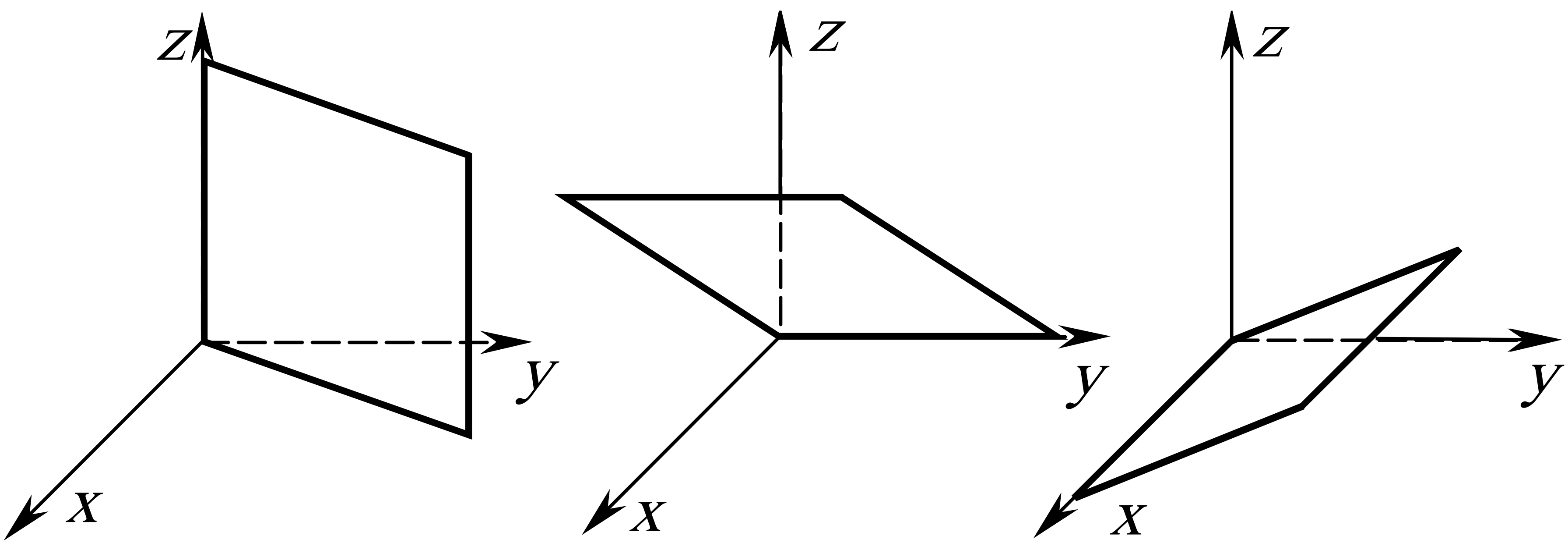


Иначе говоря, ***плоскость, в уравнении которой отсутствуют две координаты, параллельна координатной плоскости, проходящей через оси отсутствующих координат***.

5) Пусть в общем уравнении плоскости (2) $D = 0$ и один из коэффициентов A, B или C тоже нулевой, т.е. уравнение плоскости имеет вид:

а) $Ax+By = 0$ или б) $Ax+Cz = 0$ или в) $By+Cz = 0$.

Плоскость проходит через начало координат и ось отсутствующей координаты



6) Пусть в общем уравнении плоскости (2) три коэффициента равны нулю, т.е. уравнение плоскости имеет вид

а) $Ax = 0$ или б) $By = 0$ или в) $Cz = 0$.

Эти уравнения можно записать соответственно в виде:

а) $x = 0$ – уравнение координатной плоскости Oyz;

б) $y = 0$ – уравнение координатной плоскости Oxz,

в) $z = 0$ – уравнение координатной плоскости Oxy.

2. Другие формы записи уравнения плоскости

1. Уравнение плоскости, проходящей через точку перпендикулярно вектору (см. уравнение (1) и (1*)).
2. Уравнение плоскости в отрезках (см уравнение (3)).
3. Уравнение плоскости, проходящей через точку параллельно двум неколлинеарным векторам.
4. Уравнение плоскости, проходящей через три точки.

1) Уравнение плоскости, проходящей через точку параллельно двум неколлинеарным векторам

ЗАДАЧА 2. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$, параллельно неколлинеарным векторам $\overline{\ell}_1 = \{m_1;\, n_1;\, p_1\}$ и $\overline{\ell}_2 = \{m_2;\, n_2;\, p_2\}$.

Пусть $M(x;y;z)$ – текущая точка на плоскости,

$\bar{\mathbf{r}}$ – радиус-вектор точки M,

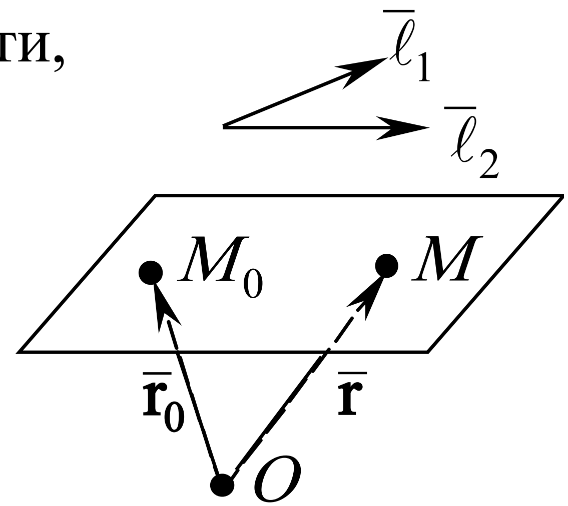
$\bar{\mathbf{r}}_0$ – радиус-вектор точки M_0.

Рассмотрим векторы

$\bar{\ell}_1, \bar{\ell}_2$ и $\overline{\mathbf{M_0M}} = \bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_0$.

По условию $\bar{\ell}_1, \bar{\ell}_2$, $\overline{\mathbf{M_0M}}$ – компланарны

$\Rightarrow (\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_0, \bar{\ell}_1, \bar{\ell}_2) = 0$.



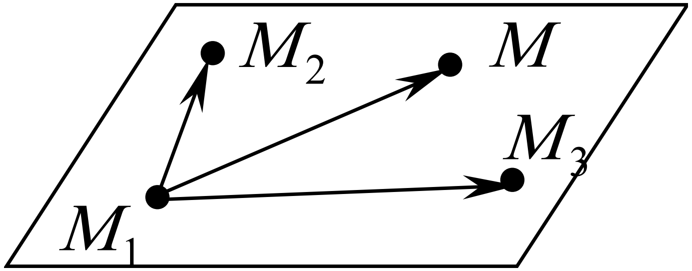
Уравнения $\left(\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_0, \bar{\ell}_1, \bar{\ell}_2\right) = 0$ (4*)

и $\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$ (4)

называют ***уравнениями плоскости, проходящей через точку параллельно двум неколлинеарным векторам*** (в векторной и координатной форме соответственно).

2) Уравнение плоскости, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой – частный случай уравнения (4)

Пусть плоскость проходит через три точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ и $M_3(x_3;y_3;z_3)$, не лежащие на одной прямой.



Тогда векторы

$$\overline{\mathbf{M_1M_2}} = \bar{\mathbf{r}}_2 - \bar{\mathbf{r}}_1, \quad \overline{\mathbf{M_1M_3}} = \bar{\mathbf{r}}_3 - \bar{\mathbf{r}}_1$$

параллельны плоскости.

$\Rightarrow$ По формуле (4*) получаем:

$$\left(\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_1, \bar{\mathbf{r}}_2 - \bar{\mathbf{r}}_1, \bar{\mathbf{r}}_3 - \bar{\mathbf{r}}_1\right) = 0.$$

Уравнения

$$\left(\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_1, \bar{\mathbf{r}}_2 - \bar{\mathbf{r}}_1, \bar{\mathbf{r}}_3 - \bar{\mathbf{r}}_1\right) = 0 \qquad (5^*)$$

и

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (5)$$

называют ***уравнениями плоскости, проходящей через три точки*** $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ и $M_3(x_3;y_3;z_3)$ (в векторной и координатной форме соответственно).

3. Взаимное расположение плоскостей

В пространстве две плоскости могут:

а) быть параллельны,

б) пересекаться.

Пусть уравнения плоскостей λ_1 и λ_2 имеют вид:

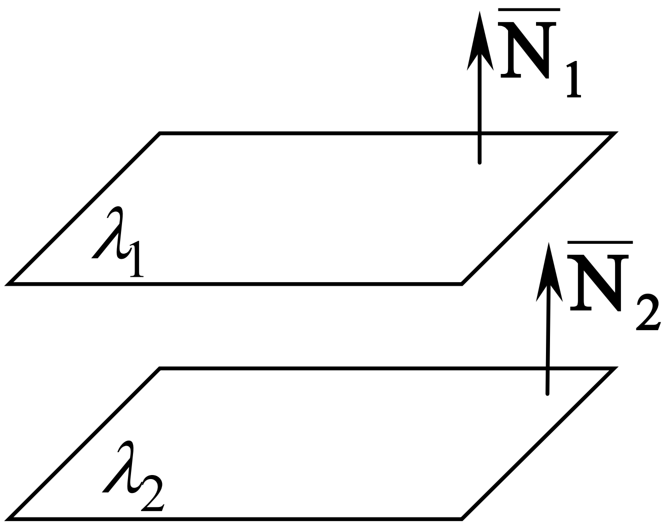
$$\lambda_1:\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\lambda_2:\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Тогда: $\bar{\mathbf{N}}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$ – нормаль к λ_1 ;

$\bar{\mathbf{N}}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$ – нормаль к λ_2.

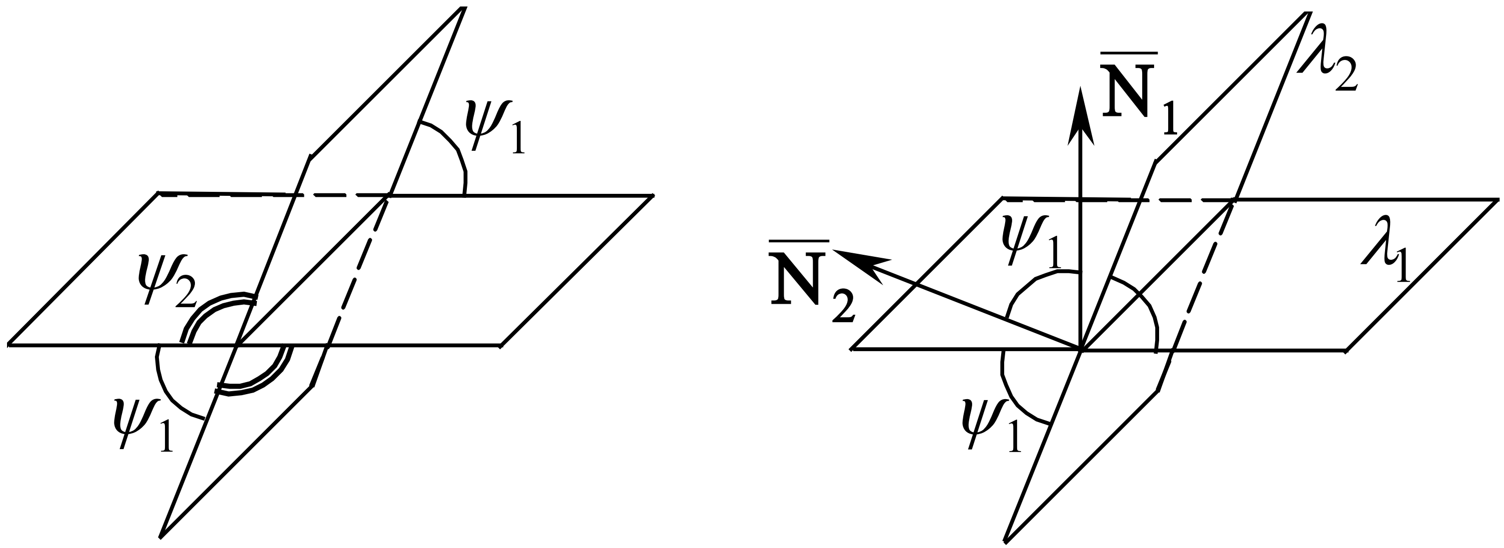
1) Пусть плоскости параллельны:



Получаем, что *плоскости* λ_1 *и* λ_2 *параллельны тогда и только тогда, когда в их общих уравнениях коэффициенты при соответствующих неизвестных пропорциональны, т.е.*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

2) Пусть плоскости пересекаются



$$\cos\psi_{1,2} = \pm\frac{\left|(\overline{\mathbf{N}}_1, \overline{\mathbf{N}}_2)\right|}{\left|\overline{\mathbf{N}}_1\right| \cdot \left|\overline{\mathbf{N}}_2\right|} = \pm\frac{\left|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2\right|}{\sqrt{(A_1)^2 + (B_1)^2 + (C_1)^2} \cdot \sqrt{(A_2)^2 + (B_2)^2 + (C_2)^2}}$$

знак плюс берется в том случае, когда надо найти величину острого угла, а знак минус – когда надо найти величину тупого угла.

Частный случай – плоскости перпендикулярны, т.е.

$$\psi_1 = \psi_2 = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \qquad \cos\psi_1 = \cos\psi_2 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \cos\psi_{1,2} = \pm\frac{\left|(\overline{\mathbf{N}}_\mathbf{1}, \overline{\mathbf{N}}_\mathbf{2})\right|}{\left|\overline{\mathbf{N}}_\mathbf{1}\right| \cdot \left|\overline{\mathbf{N}}_\mathbf{2}\right|} = 0$$

Критерий перпендикулярности плоскостей, заданных общими уравнениями:

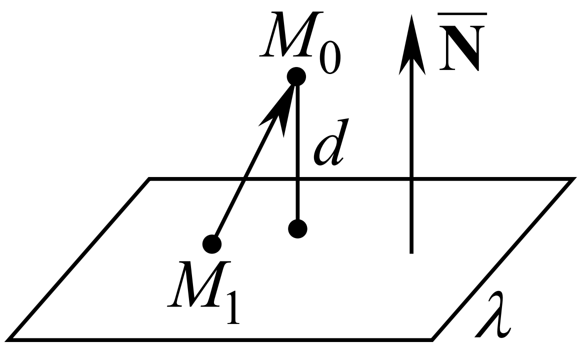
$$(\overline{\mathbf{N}}_\mathbf{1}, \overline{\mathbf{N}}_\mathbf{2}) = A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0.$$

4. Расстояние от точки до плоскости

ЗАДАЧА 3. Пусть плоскость λ задана общим уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0\ ,$$

$M_0(x_0;y_0;z_0)$ – точка, не принадлежащая плоскости λ .
Найти расстояние d от точки M_0 до плоскости λ .



$$d = \frac{\left|(\overline{\mathbf{N}}, \overline{\mathbf{M_1 M_0}})\right|}{\left|\overline{\mathbf{N}}\right|} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$