Аналитическая геометрия

Кривые второго порядка

2021 г.

§ 4. Кривые второго порядка

Кривой 2-го порядка на плоскости называют геометрическое место точек $M(x;y)$, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$F(x,y) = 0,$$

где $F(x,y)$ – многочлен степени 2.

Кривые второго порядка делятся на

1) ***вырожденные*** и 2) ***невырожденные***

Вырожденные кривые второго порядка это прямые и точки, которые задаются уравнением второй степени. Если уравнению второго порядка не удовлетворяет ни одна точка плоскости, то тоже говорят, что уравнение определяет вырожденную кривую (мнимую кривую второго порядка).

Например, $(x-1)^2+(y+2)^2=0$, $y^2-x^2=0$, $y^2+x^2=-1$.

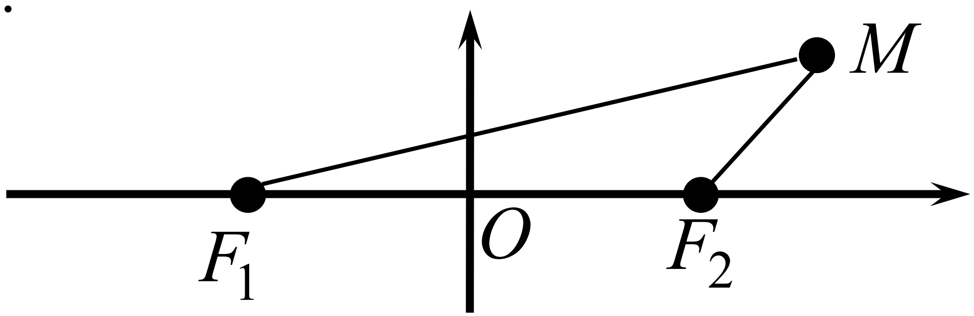
Невырожденными кривыми второго порядка являются эллипс, окружность, гипербола и парабола.

1. Эллипс и окружность

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Эллипсом*** *называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек плоскости* F_1 *и* F_2 *есть величина постоянная и равная* $2a$ $(2a>|F_1F_2|)$.

Точки F_1 и F_2 называют ***фокусами*** эллипса.

Выберем декартову прямоугольную систему координат так, чтобы фокусы F_1 и F_2 лежали на оси Ox на одинаковом расстоянии от O.



В такой системе координат:

$$F_1(-c;0) \quad \text{и} \quad F_2(c;0)\,,$$

где $|OF_1| = |OF_2| = c$.

По определению эллипса $|F_1M| + |F_2M| = 2a$,

$$\Rightarrow \quad \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Избавимся от квадратных корней и получим:

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 \ ,$$

$$\Rightarrow \quad (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = (a^2 - c^2)a^2 \ .$$

По определению $2a > 2c$, $\Rightarrow \quad a^2 - c^2 > 0$.

$\Rightarrow \ a^2 - c^2 = b^2$, для некоторого числа b.

Уравнение примет вид: $b^2x^2 + a^2y^2 = b^2a^2$.

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Уравнение $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

называется ***каноническим уравнением эллипса***.

Система координат, в которой эллипс имеет такое уравнение, называется его ***канонической системой координат***.

Оставить место для вывода уравнения эллипса

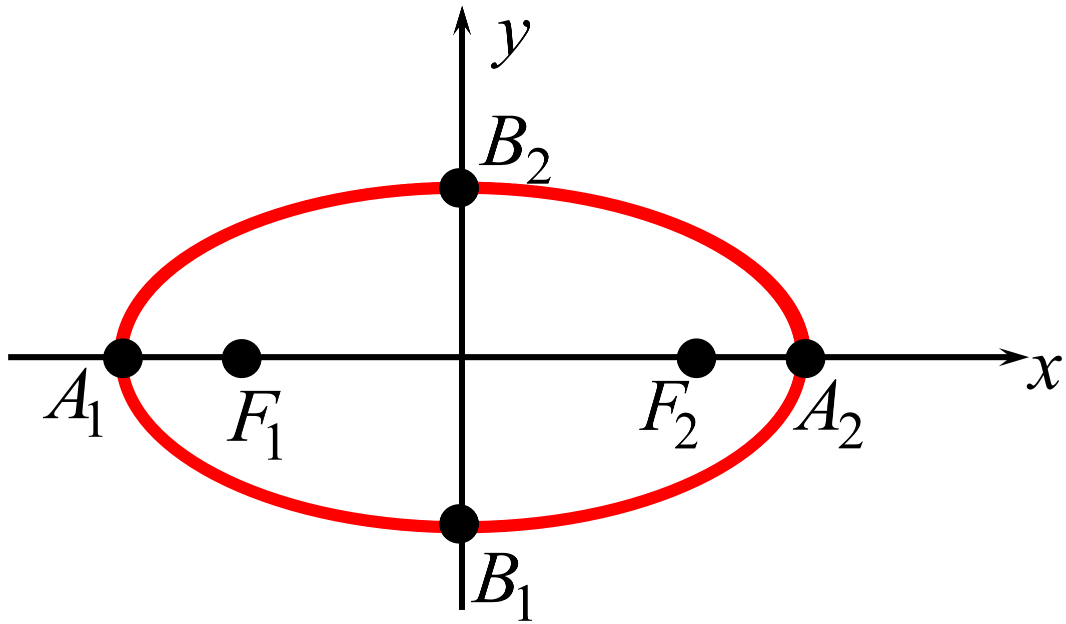
1 страница

СВОЙСТВА ЭЛЛИПСА

1) Эллипс лежит внутри прямоугольника, ограниченного $x = \pm a$, $y = \pm b$.
2) Эллипс имеет центр симметрии (начало координат) и две оси симметрии (оси Ox и Oy).

   Центр симметрии эллипса называют ***центром эллипса***.

   Ось симметрии эллипса, проходящую через фокусы (ось Ox) называют ***большой*** (или фокальной) осью симметрии, а вторую ось (ось Oy) – ***малой*** осью.



Точки A_1 , A_2 , B_1 , B_2 называются ***вершинами эллипса***.

Отрезок A_1A_2 и его длина $2a$ называются ***большой*** (***фокальной***) ***осью***, отрезок B_1B_2 и его длина $2b$ – ***малой осью***.

Величины a и b называются ***большой*** и ***малой полуосью*** соответственно.

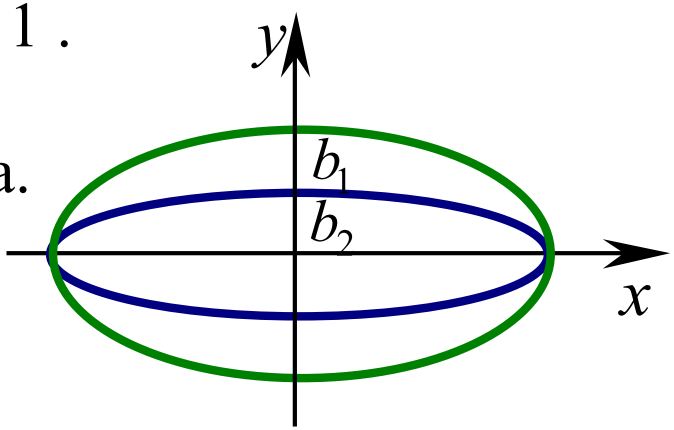
Длина отрезка F_1F_2 (равная $2c$) называется ***фокусным расстоянием***. Если M – произвольная точка эллипса, то отрезки MF_1 , MF_2 и их длины r_1, r_2 называются ***фокальными радиусами точки*** M

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Величина* ε *, равная отношению фокусного расстояния эллипса к его большой оси, называется* ***эксцентриситетом*** *эллипса,* т.е.

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

Так как $c = \sqrt{a^2 - b^2} < a$, то $0 < \varepsilon < 1$.

Величина ε характеризует форму эллипса.



Пусть даны два эллипса такие, что

$$a_1 = a_2\,, \qquad b_1 > b_2\,.$$

Тогда $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$.

$\Rightarrow$ Чем больше эксцентриситет, тем сильнее «сжат» эллипс.

Зная ε эллипса легко найти фокальные радиусы точки $M(x;y)$:

$$r_1 = |\,MF_1\,| = a + \varepsilon x\,, \qquad r_2 = |\,MF_2\,| = a - \varepsilon x\,.$$

Замечания.

1) Пусть в уравнении эллипса $a = b = r$. Для этой кривой

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = 0 \qquad \Rightarrow F_1 = F_2 = O\,, \qquad \varepsilon = \frac{c}{a} = 0$$

Геометрически, это означает, что точки кривой равноудалены (на расстояние r) от ее центра O, т.е. кривая является ***окружностью***.

Каноническое уравнение окружности принято записывать в виде $$x^2 + y^2 = r^2\,,$$

где r – расстояние от любой точки окружности до ее центра; r называют ***радиусом окружности***.

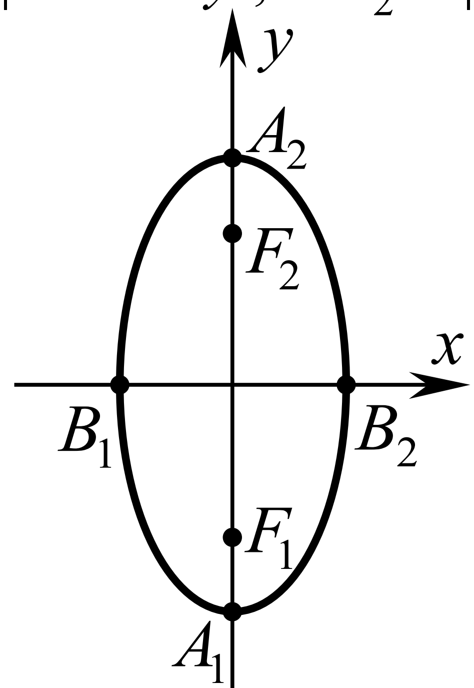
2) Если выбрать систему координат так, чтобы фокусы F_1 и F_2 были на оси Oy на одинаковом расстоянии от начала координат, то уравнение эллипса будет иметь вид

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

Для этого эллипса большая ось – ось Oy, малая ось – ось Ox, фокусы имеют координаты $F_1(0;-c)$ и $F_2(0;c)$, где $c=\sqrt{a^2-b^2}$

Фокальные радиусы точки $M(x;y)$ находятся по формулам

$$r_1=|MF_1|=a+\varepsilon y\,,\qquad r_2=|MF_2|=a-\varepsilon y\,.$$

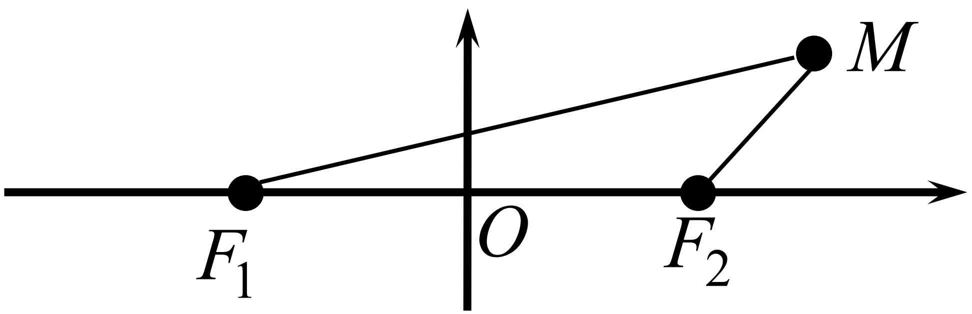


2. Гипербола

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Гиперболой*** *называется геометрическое место точек плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух фиксированных точек плоскости* F_1 *и* F_2 *есть величина постоянная и равная* $2a$ $(2a < |F_1F_2|)$.

Точки F_1 и F_2 называют ***фокусами*** гиперболы.

Выберем декартову прямоугольную систему координат так, чтобы фокусы F_1 и F_2 лежали на оси Ox на одинаковом расстоянии от O.



В такой системе координат:

$$F_1(-c;0) \quad \text{и} \quad F_2(c;0),$$

где $|OF_1| = |OF_2| = c$.

По определению гиперболы $\left|\,|F_1M| - |F_2M|\,\right| = 2a$,

$$\Rightarrow \quad \sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a.$$

Избавимся от квадратных корней и получим:

$$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4\ ,$$

$$\Rightarrow \quad (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = (c^2 - a^2)a^2\ .$$

По определению $2a < 2c$, $\quad \Rightarrow \quad c^2 - a^2 > 0$.

$\Rightarrow\ c^2 - a^2 = b^2$, для некоторого числа b.

Уравнение примет вид: $b^2x^2 - a^2y^2 = b^2a^2$.

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Уравнение
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (2)$$

называется ***канонические уравнением гиперболы***.

Система координат, в которой гипербола имеет такое уравнение, называется его ***канонической системой координат***.

Оставить место для вывода уравнения гиперболы

1 страница

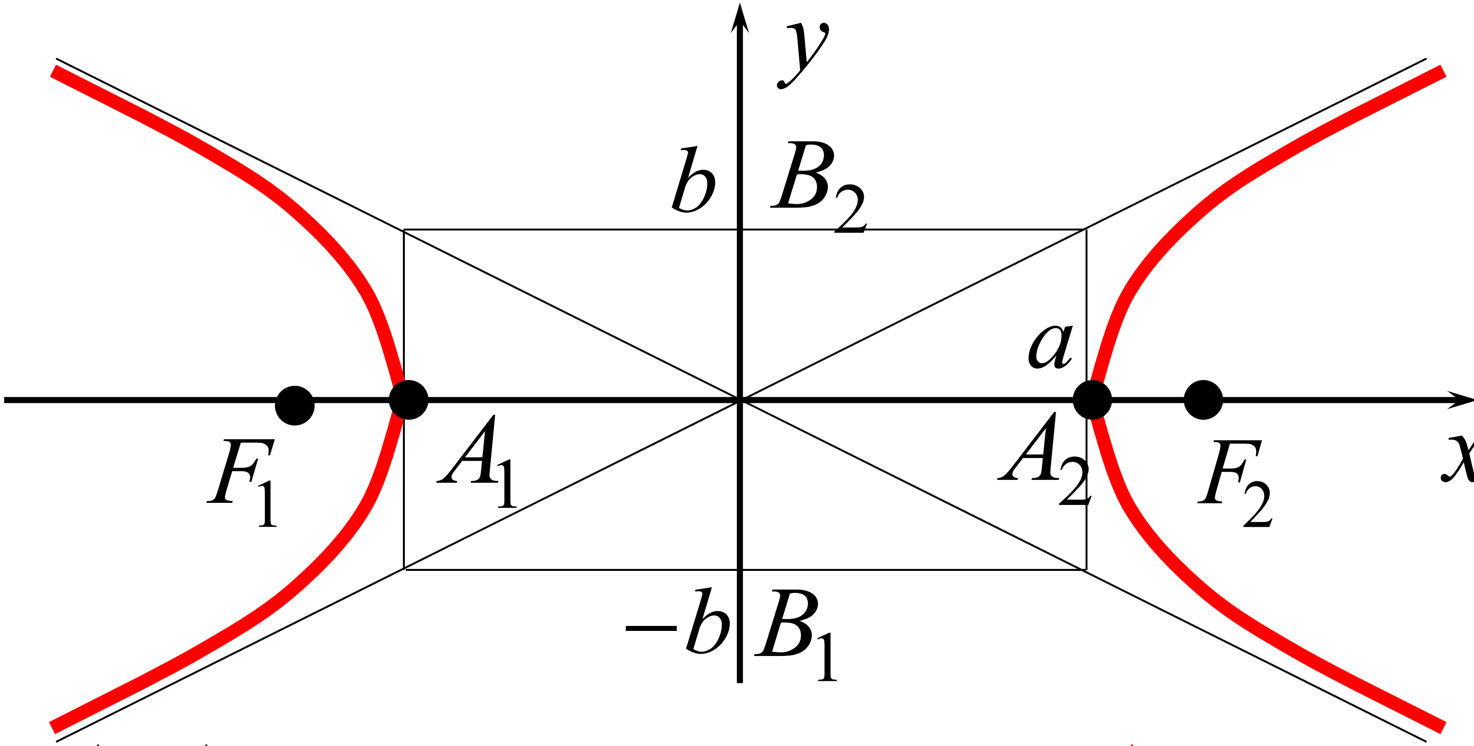
СВОЙСТВА ГИПЕРБОЛЫ

1) Точек гиперболы нет в полосе, ограниченной прямыми $x=\pm a$.

2) Гипербола имеет центр симметрии (начало координат) и две оси симметрии (оси Ox и Oy).

Центр симметрии гиперболы называют ***центром гиперболы***.

Ось симметрии гиперболы, проходящую через фокусы (ось Ox) называют ***действительной*** (или ***фокальной***) ***осью*** симметрии, а вторую ось (ось Oy) – ***мнимой осью***.



Точки A_1 , A_2 называются ***вершинами гиперболы***.
Отрезок A_1A_2 и его длина $2a$ называются ***действительной*** (***фокальной***) ***осью***, отрезок B_1B_2 и его длина $2b$ – ***мнимой осью***.
Величины a и b называются ***действительной*** и ***мнимой полуосью*** соответственно.
Длина отрезка F_1F_2 (равная $2c$) называется ***фокусным расстоянием***. Если M – произвольная точка гиперболы, то отрезки MF_1 , MF_2 и их длины r_1, r_2 называются ***фокальными радиусами точки*** M

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Величина ε, равная отношению фокусного расстояния гиперболы к ее действительной оси, называется* ***эксцентриситетом*** *гиперболы,* т.е.

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

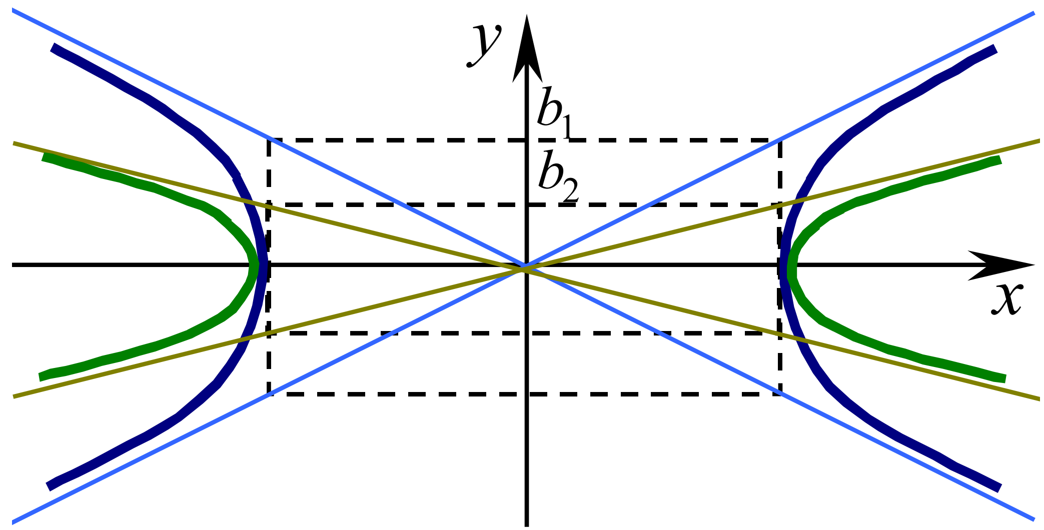
Так как $c = \sqrt{a^2 + b^2} > a$, то $\varepsilon > 1$.

Величина ε характеризует форму гиперболы.

Пусть даны две гиперболы такие, что

$$a_1 = a_2, \quad b_1 > b_2 .$$

Тогда $\quad \varepsilon_1 > \varepsilon_2$.



$\Rightarrow$ Чем больше эксцентриситет, тем «шире» гипербола.

Зная эксцентриситет гиперболы легко найти фокальные радиусы точки $M(x;y)$.

Если точка M лежит на правой ветке гиперболы (т.е. $x > 0$), то

$$r_1 = |MF_1| = a + \varepsilon x\,, \qquad r_2 = |MF_2| = -a + \varepsilon x\,.$$

Если M лежит на левой ветке гиперболы (т.е. $x < 0$), то

$$r_1 = |MF_1| = -(a + \varepsilon x)\,, \qquad r_2 = |MF_2| = -(-a + \varepsilon x)\,.$$

Замечания.

1) Если в уравнении гиперболы $a = b$, то гипербола называется ***равнобочной***.

Асимптоты равнобочной гиперболы, перпендикулярны.

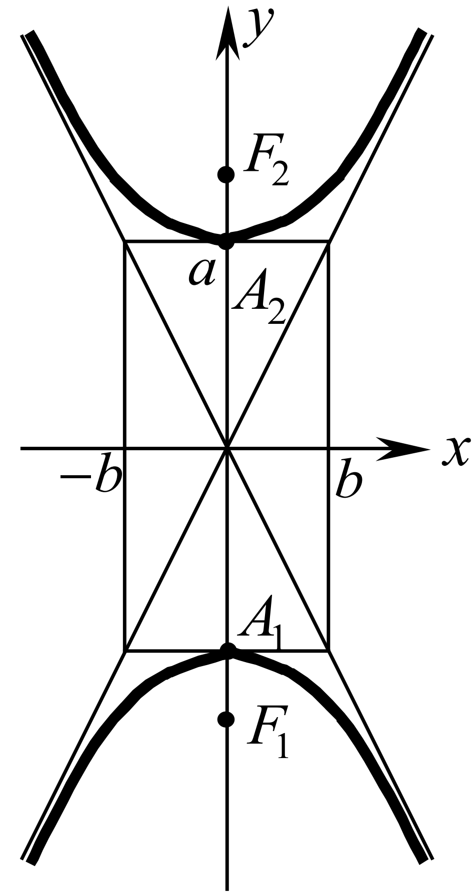
$\Rightarrow$ можно выбрать систему координат так, чтобы координатные оси совпали с асимптотами. Тогда уравнение гиперболы будет

$$xy = 0{,}5\mathrm{a}^2\,. \tag{3}$$

Уравнение (3) называют ***уравнением равнобочной гиперболы, отнесенной к асимптотам***.

2) Если выбрать систему координат так, чтобы фокусы F_1 и F_2 были на одинаковом расстоянии от $O(0;0)$, но лежали на Oy, то уравнение гиперболы будет иметь вид

$$-\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$



Для этой гиперболы:

действительная ось – ось Oy,

мнимая ось – ось Ox,

$F_1(0;-c)$ и $F_2\,(0;c)$ (где $c=\sqrt{a^2+b^2}$)

асимптоты: $y=\pm\dfrac{a}{b}x$

фокальные радиусы точки $M(x;y)$ находятся по формулам

а) при $y>0$:

$$r_1=|MF_1|=a+\varepsilon y,\quad r_2=|MF_2|=-a+\varepsilon y;$$

б) при $y<0$:

$$r_1=|MF_1|=-(a+\varepsilon y),\quad r_2=|MF_2|=-(-a+\varepsilon y).$$

3. Парабола

Пусть ℓ – некоторая прямая на плоскости, F – некоторая точка плоскости, не лежащая на прямой ℓ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Параболой*** *называется геометрическое место точек плоскости, расстояние от которых до фиксированной прямой ℓ и до фиксированной точки F (не лежащей на прямой ℓ) одинаково.*

Точку F называют ***фокусом параболы*** .

Прямую ℓ – ***директрисой***.

Выберем декартову прямоугольную систему координат так, чтобы 1) директриса ℓ была перпендикулярна Ox,

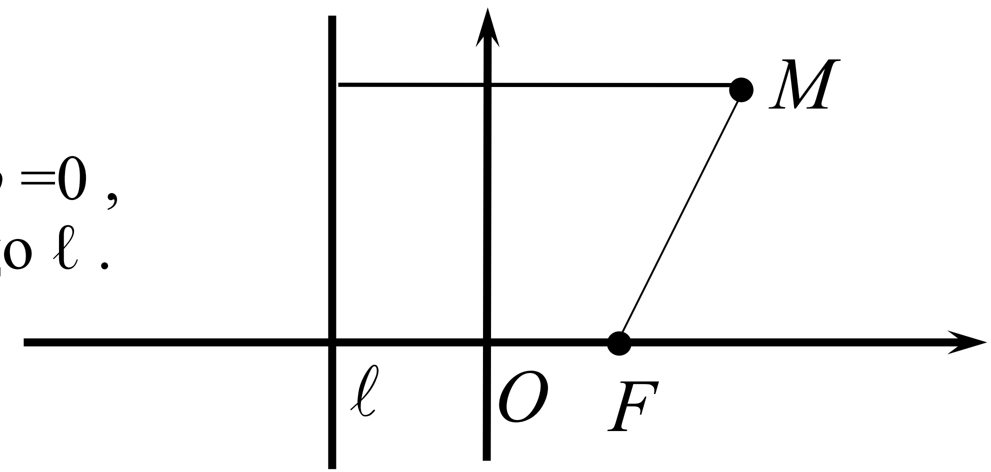
2) фокус F лежал на положительной части Ox ,

3) расстояние от O до F и до ℓ было одинаковым.

В такой системе координат:

$F(0{,}5p;0)$ и $\ell : x + 0{,}5p = 0$,

где p – расстояние от F до ℓ .



По определению параболы $d(M,\ell) = |FM|$.

$$\frac{|x+0{,}5p|}{\sqrt{1^2+0^2}} = \sqrt{(x-0{,}5p)^2+y^2},$$

$$\Rightarrow \quad |x+0{,}5p| = \sqrt{(x-0{,}5p)^2+y^2},$$

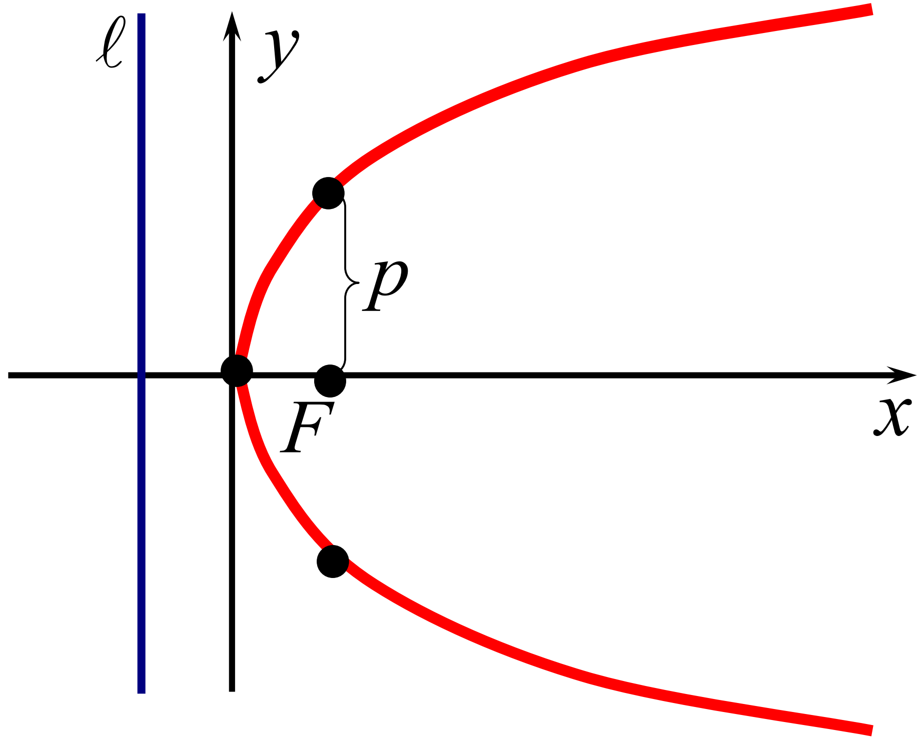
Избавимся от квадратного корня и получим:

$$(x+0{,}5p)^2 = (x-0{,}5p)^2 + y^2,$$

$$\Rightarrow \quad y^2 = 2px.$$

Уравнение $$y^2 = 2px \qquad (4)$$
называется ***каноническим уравнением параболы***.

Система координат, в которой парабола имеет такое уравнение, называется ее ***канонической системой координат***.



Точка, в которой парабола пересекает свою ось, называется ***вершиной параболы***,

Число p называется ***параметром параболы***.

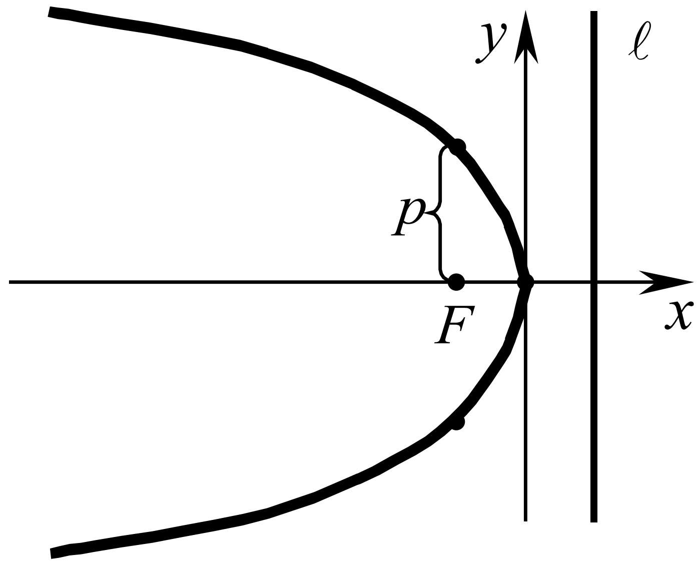
Если M – произвольная точка параболы, то отрезок MF и его длина называются ***фокальными радиусами точки*** M.

Замечание. Введем систему координат так, чтобы

а) фокус F параболы лежал на отрицательной части оси Ox,

б) директриса была перпендикулярна Ox,

в) расстояние от O до F и до директрисы было одинаково.



Тогда получим для параболы уравнение

$$y^2 = -2px, \tag{5}$$

а для директрисы и фокуса:

$$F(-0{,}5p;0) \quad \text{и} \quad \ell : x - 0{,}5p = 0.$$

Выберем систему координат так, чтобы директриса была перпендикулярна Oy, фокус лежал на положительной (отрицательной) части оси Oy и O была на одинаковом расстоянии от F и от директрисы (рис. 2 и рис. 3):

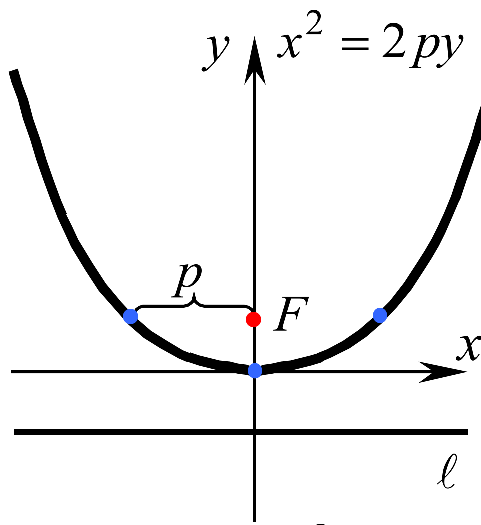


рис. 2

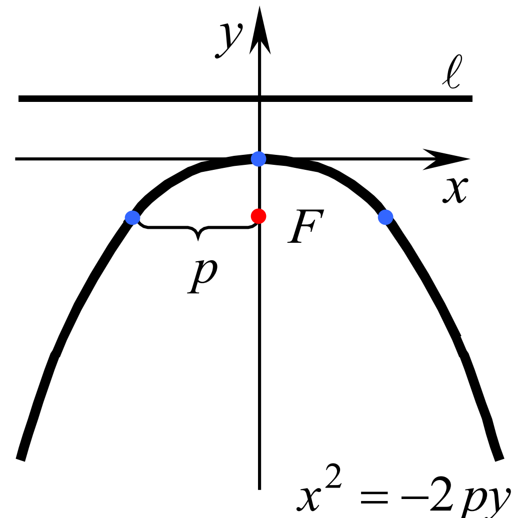


рис. 3

Тогда уравнение параболы будет иметь вид $\quad x^2 = \pm 2py, \qquad (6)$

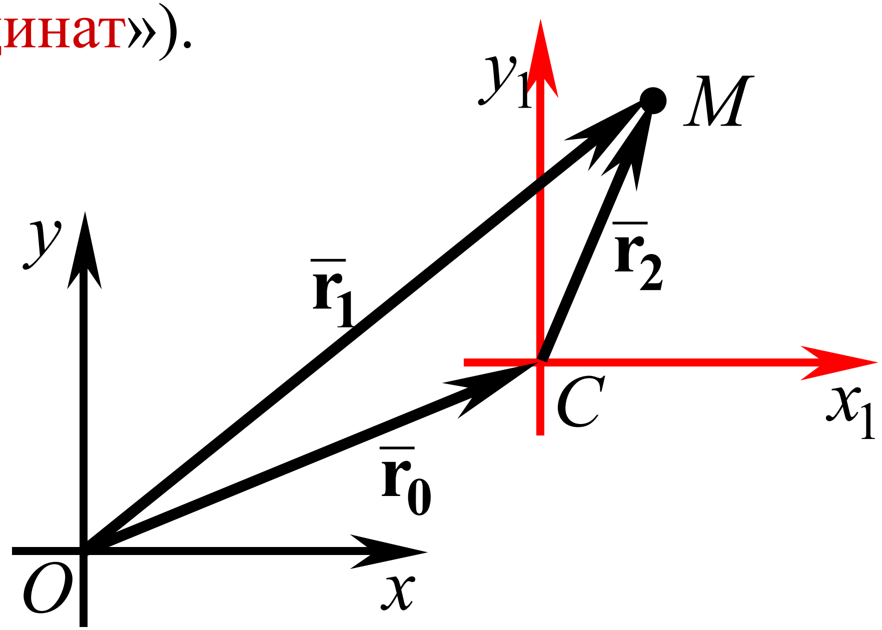
а для директрисы и фокуса получим:

$$F(0; \pm 0{,}5p) \quad \text{и} \quad \ell : y \pm 0{,}5p = 0.$$

Уравнения (5) и (6) тоже называются ***каноническими уравнениями параболы***, а соответствующие им системы координат – ***каноническими системами координат***.

4. Координаты точки в разных системах координат Общее уравнение кривой второго порядка

а) Пусть заданы декартовы прямоугольные системы координат xOy и x_1Cy_1 такие, что $Ox \uparrow\uparrow Cx_1$, $Oy \uparrow\uparrow Cy_1$ («параллельные системы координат»).



Получаем:

$$\begin{cases} x_1 = x - x_0, \\ y_1 = y - y_0 \end{cases} \qquad (7)$$

Формулу (7) называют ***формулой преобразования координат точки при переносе начала координат в точку*** $C(x_0;y_0)$.

Рассмотрим уравнение

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (8)$$

С помощью элементарных преобразований, уравнение (8) может быть приведено к виду:

$$\left.\begin{array}{ll} 1)\ \text{при } AC \neq 0: & \dfrac{(x-x_0)^2}{\alpha} + \dfrac{(y-y_0)^2}{\beta} = 1 \\ 2)\ \text{при } C = 0: & (x-x_0)^2 = \alpha(y-y_0) \\ 3)\ \text{при } A = 0: & (y-y_0)^2 = \alpha(x-x_0) \end{array}\right\} \qquad (9)$$

ВЫВОД: Уравнение (8) определяет кривую, каноническая система координат которой параллельна заданной, но имеет начало в точке $C(x_0,y_0)$.

Говорят: *уравнение* (8) *определяет кривую со смещенным центром (вершиной)*, а уравнение (9) называют ***каноническим уравнением кривой со смещенным центром (вершиной)***.

Примеры

Оставить 1 страницу

Замечание. Приводить уравнение (8) к виду (9) необходимо, если мы хотим построить кривую.

Тип кривой можно определить без уравнения (9). А именно:

1) если $AC = 0$, то кривая является параболой;

2) если $AC < 0$, то кривая является гиперболой;

3) если $AC > 0$, $A \neq C$– эллипсом;

4) если $AC > 0$, $A = C$ – окружностью.

5. Общее геометрическое определение эллипса, гиперболы и параболы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Прямые* $\ell_{1,2} : x = \mp \dfrac{a}{\varepsilon}$ *называются* ***директрисами*** *эллипса* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *и гиперболы* $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

Пусть M – произвольная точка эллипса или гиперболы.

$$r_\mathrm{i} = |\, MF_\mathrm{i} \,|, \qquad d_\mathrm{i} = d(M, \ell_\mathrm{i})$$

ТЕОРЕМА. *Для любой точки* M *эллипса (гиперболы) имеет место равенство*

$$\frac{r_i}{d_i} = \varepsilon$$

Замечание. По определению параболы $r = d$.

$\Rightarrow$ параболу можно считать кривой, у которой эксцентриситет ε = 1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Геометрическое место точек, для которых отношение расстояния до фиксированной точки (фокуса) к расстоянию до фиксированной прямой (директрисы) есть величина постоянная и равная* ε , *называется*

1) *эллипсом, если* $\varepsilon<1$;
2) *гиперболой, если* $\varepsilon>1$;
3) *параболой, если* $\varepsilon = 1$.